

ΧΡ. Γ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΑΙ

Δ', Ε', ΣΤ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1975



EX LIBRIS PROF. DR. DARCY CARVALHO.
SÃO PAULO, BRAZIL

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

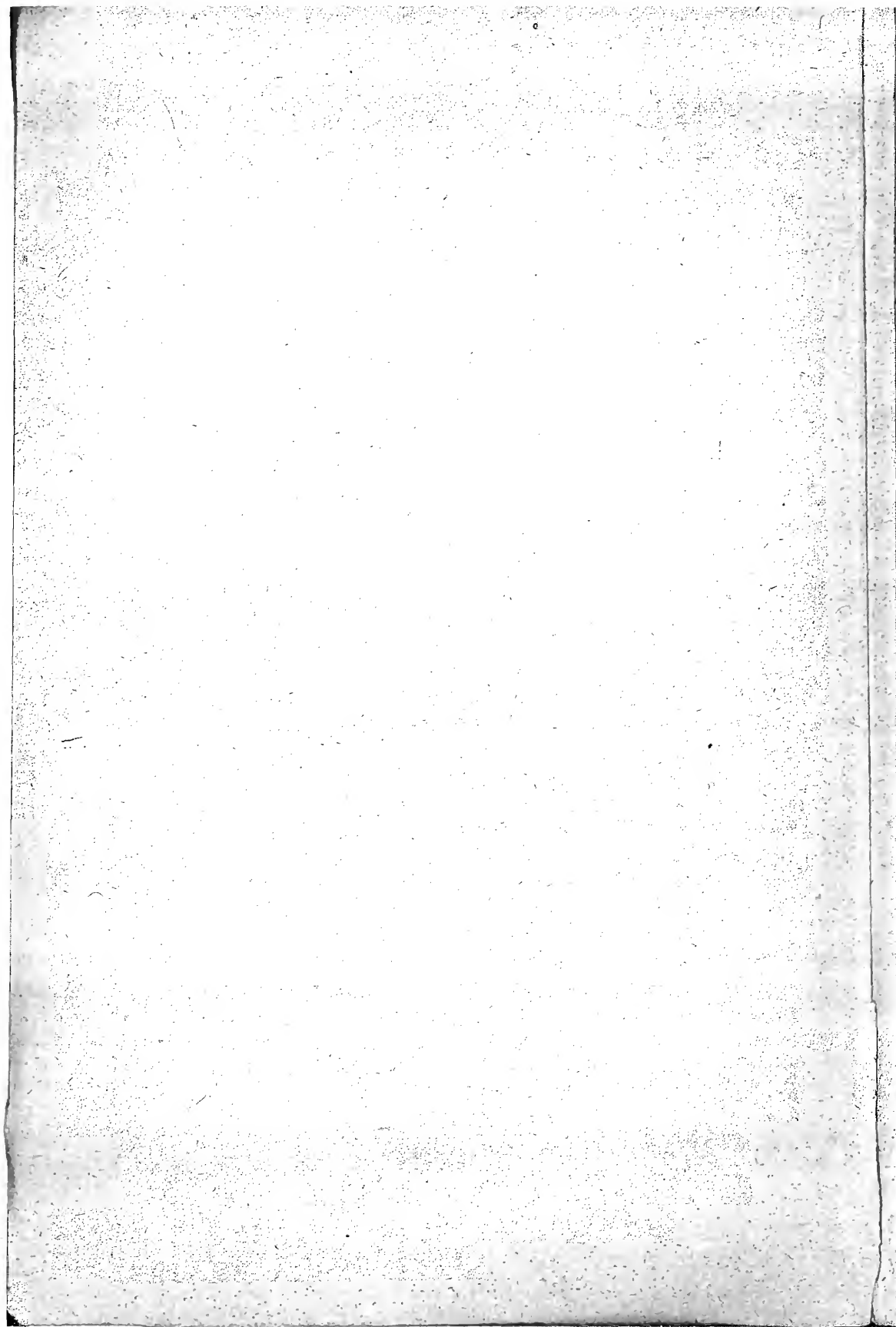
Τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον ἀπευθύνεται πρὸς τοὺς μαθητὰς τῶν τεσσάρων τελευταίων τάξεων τῶν Γυμνασίων θεωρητικῆς κατευθύνσεως καὶ πραγματεύεται διεξοδικῶς τὰ διὰ τὰς ἐν λόγῳ τάξεις θέματα τῆς ὕλης τῆς Εὐκλείδειου Γεωμετρίας τῆς καθοριζομένης ὑπὸ τοῦ ἰσχύοντος ἐπισήμου ἀναλυτικοῦ προγράμματος τοῦ Ὑπουργείου Ἐθνικῆς Παιδείας καὶ Θρησκευμάτων.

Ἐχει καταβληθῇ ἰδιαίτερα προσπάθεια διὰ τὴν εὐληπτον καὶ κατὰ τὸ δυνατόν ἀπλουστέραν ἐκθεσιν τῶν περιεχομένων θεμάτων, χωρὶς τοῦτο νὰ γίνεται εἰς βάρος τῆς ἐπιστημονικῆς ἀριότητος τοῦ βιβλίου. Ἐδάφια τὰ ὅποια ἔχουν σημειωθῇ δι' ἀστερίσκου, δύνανται νὰ παραληφθοῦν εἰς πρώτην ἀνάγνωσιν, ἐκρίθη σκόπιμος ὁμως ἡ ἀναγραφή των διὰ τὴν δλοκλήρωσιν τοῦ ἔργου καὶ δέον νὰ μελετηθοῦν ἀργότερον ὑπὸ τῶν ἐνδιαφερομένων διὰ τὴν βαθυτέραν γνῶσιν τῆς γεωμετρίας.

Ἐχει ἐκτεθῇ ἱκανὸν πλῆθος παραδειγμάτων εἰς τὰς περιοχὰς τῶν γεωμετρικῶν τόπων καὶ κατασκευῶν, αἱ δὲ προτεινόμεναι ἀσκήσεις πρὸς λύσιν κλιμακοῦνται εἰς δύο κατηγορίας, ὑπὸ τὸ στοιχεῖον Α τῶν ἀπλουστέρων καὶ ὑπὸ τὸ στοιχεῖον Β τῶν δυσκολωτέρων, ὥστε νὰ παρέχεται ἡ εὐχέρεια εἰς τὸν μαθητὴν τῆς προοδευτικῆς μεταβάσεως εἰς τὰς δυσκόλους ἀσκήσεις.

Τέλος μὲ τὴν πεποίθησιν ὅτι ἔχω ἐπιτύχει τὸν σκοπόν μου, παραδίδω τὸ βιβλίον εἰς τὴν μαθητιῶσαν νεολαίαν.

ΧΡΗΣΤΟΣ Γ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ἡ ἀρίθμησης ἀναφέρεται εἰς παραγράφους

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ §

Γεωμετρία - Πρωταρχικαὶ ἔννοιαι - Αἱ προτάσεις τῆς γεωμετρίας - Γεωμετρικὸν σχῆμα	1 - 9
Αἱ τρεῖς βασικαὶ κατηγορίαι ἀξιωμάτων - Ἀξιώματα θέσεως - Ἀξιώματα ἰσότητος - Ἀξιώματα διατάξεως	10 - 16
Ἡμιευθεῖα - Εὐθύγραμμον τμήμα	19 - 20
Ἰσότης εὐθυγράμμων τμημάτων - Ἰδιότητες	23
Πράξεις καὶ διάταξις εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων	25 - 32
Περὶ γραμμῶν	33 - 45
Ἡμιεπίπεδον - Ἐπίπεδα τμήματα	46 - 47
Εἶδη ἐπιφανειῶν	48
Ἐπιπεδομετρία καὶ Στερομετρία	49
Γωνίαι	50 - 51
Ἰσότης πράξεις καὶ διάταξις εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν	52 - 60
Παραπληρωματικαὶ γωνίαι - Διχοτόμος γωνίας - Ὀρθὴ γωνία	61 - 65
Ἀξονικὴ συμμετρία	71 - 72
Κάθετος καὶ πλάγιοι - Μεσοκάθετος - Γεωμετρικὸς τόπος	73 - 80
Ἰδιότης τῆς διχοτόμου γωνίας	81
Κεντρικὴ συμμετρία - Κατὰ κορυφὴν γωνίαι	82 - 84
Παράλληλοι εὐθεῖαι	86 - 92
Ὁμόρροπος καὶ ἀντίρροπος παραλλήλιαι	93
Γωνίαι μὲ πλευρὰς παραλλήλους ἢ καθετοὺς	94 - 95
Ἰσότης καὶ πράξεις εἰς τὸ σύνολον τῶν προσανατολισμένων εὐθυγράμμων τμημάτων	96 - 98

ΒΙΒΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

§ §

Πολύγωνα	99 - 100
Τὸ τρίγωνον - Εἶδη τριγώνων	101 - 104
Ἀθροισμα γωνιῶν τριγώνου καὶ πολυγώνου	105 - 106
Ἰσότης τριγώνων	107 - 110
Τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον	111 - 114
Ἀνισοτικαὶ σχέσεις εἰς τὰ τρίγωνα	115 - 118
Τετράπλευρα - Παραλληλόγραμμον	119 - 132
Ὀρθογώνιον - Ρόμβος - Τετράγωνον	133 - 146
Παράλληλος μεταφορὰ	147 - 148

Τράπεζιον - Ἴσοσκελές τραπέζιον	149 - 153
Ἐφαρμογαὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν παραλληλογράμμων	154 - 157
Κέντρα τοῦ τριγώνου - Περιέκντρον - Ὁρθόκντρον - Βαρύκντρον - Ἐγκντρον - Παράκντρα	158 - 164

BIBAION ΔΕΥΤΕΡΟΝ

§ §

Ὁ κύκλος - Ἴσοι κύκλοι - Συμμετρίαι	166 - 171
Ἐπίκντρος γωνία	173
Ἰσότης, πράξεις, διάταξις εἰς τὸ σύνολον τῶν τόξων	175
Μέσον τόξου - Διαδοχικά - Παραπληρωματικά τόξα	176 - 178
Σχετικαὶ θέσεις εὐθείας καὶ κύκλου	182 - 187
Σχετικαὶ θέσεις δύο κύκλων	189 - 196
Γωνία δύο κύκλων - Ὁρθογώνιοι κύκλοι	198 - 199
Σχέσις ἐπικέντρου καὶ ἐγγεγραμμένης γωνίας	204
Γωνία ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης	205
Γωνία τεμνομένων χορδῶν	206 - 207
Ἐγγεγραμμένα τετράπλευρα	210 - 213
Περιγεγραμμένα τετράπλευρα	216
Παρεγγεγραμμένα πολύγωνα	217 - 218
Γεωμετρικαὶ Κατασκευαὶ - Στοιχειώδη γεωμετρικὰ προβλήματα	219 - 231
Ἀπλὰ κατασκευαὶ τριγώνων	232 - 239
Ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος - Παραδείγματα	241 - 245
Στοιχειώδεις γεωμετρικοὶ τόποι - Παραδείγματα	246 - 252

BIBAION ΤΡΙΤΟΝ

§ §

Μετρικὴ Γεωμετρία - Γεωμετρικὰ μεγέθη - Μονάδες μετρήσεως	253 - 258
Ἀναλογίαι καὶ ἰδιότητες αὐτῶν	260 - 261
Μέση ἀνάλογος - Τετάρτη ἀνάλογος	262 - 263
Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ	264
Κατασκευὴ τετάρτης ἀναλόγου	266
Ὅμοια τρίγωνα	268 - 275
Ὅμοια πολύγωνα	276 - 279
Ὁμοιοθεσία	280 - 286
Γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ	287 - 288
Δέσμη εὐθειῶν - θεωρήματα τῆς δέσμης	289 - 292
Περὶ ὀρθῶν προβολῶν	293 - 294
Μετρικαὶ σχέσεις εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα	296
Πυθαγόρειον θεώρημα	297
Γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ	304 - 305
Μετρικαὶ σχέσεις εἰς τυχόν τρίγωνον	306 - 307
Θεωρήματα διαμέσων	308 - 309
Ἐμβαδὰ κλειστῶν εὐθυγράμμων σχημάτων	311 - 313
Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου καὶ παραλληλογράμμου	314 - 318
Ἐμβαδὸν τριγώνου	319
Ἐμβαδὸν τραπέζιου	321
Ἐμβαδὰ πολυγώνων	323 - 325
Μετασχηματισμὸς πολυγώνου	326
Τύπος Ἡρώου	328
Ὑπολογισμὸς ἀκτίνων τῶν κύκλων τριγώνου	329 - 331

Λόγος τῶν ἐμβαδῶν ὁμοίων πολυγώνων	332 - 333
Μετρικαὶ σχέσεις εἰς τετράπλευρα	334 - 335
Θεωρήματα τῆς διχοτόμου γωνίας τριγώνου	336 - 337
Ἀρμονικὴ διαίρεσις τμήματος	338 - 340
Ἀπολλώνιος κύκλος	341
Δύναμις σημείου πρὸς κύκλον	342 - 347
Ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ εἰς τὴν γεωμετρίαν	348
Διαίρεσις τμήματος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον	349
ΡΙΖΙΚὸς ἄξων - Ριζικὸν κέντρον	350 - 352

BIBAION TETARTON

§ §

Κανονικὰ πολύγωνα - Γενικὰ θεωρήματα καὶ συμβολισμοὶ	353 - 364
Τετράγωνον	365
Κανονικὸν ἑξάγωνον	366
Κανονικὸν (ισόπλευρον) τρίγωνον	367
Κανονικὸν δεκάγωνον	368
Κανονικὸν πεντάγωνον	369
Κανονικὸν δεκαπεντάγωνον	370
Μέτρησις τοῦ κύκλου - σχετικὰ θεωρήματα	371 - 376
Ὑπολογισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ π	377
Ἐμβαδὸν κύκλου - Κυκλικὸς τομεὺς - Κυκλικὸν τμήμα - Μηνίσκος	381 - 385

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

BIBAION ΠΕΜΠΤΟΝ

§ §

Τὸ ἐπίπεδον - Ἀξιώματα	386 - 388
Καθορισμὸς ἐπιπέδου	389 - 393
Ἐπίπεδα εἰς τὸν χώρον	397 - 399
Εὐθεῖαι καὶ ἐπίπεδον εἰς τὸν χώρον - Εὐθεῖα κάθετος πρὸς ἐπίπεδον	400 - 401
Θεωρήματα τριῶν καθέτων	405 - 407
Μεσοκάθετον ἐπίπεδον	412 - 413
Παράλληλοι εὐθεῖαι	414 - 417
Κάθετα καὶ πλάγια τμήματα πρὸς ἐπίπεδον	418 - 419
Παραλληλία εὐθείας καὶ ἐπιπέδου	420 - 424
Παράλληλα ἐπίπεδα - Θεώρημα Θαλοῦ	425 - 436
Ἀσύμβατοι εὐθεῖαι - κοινὴ κάθετος	437 - 444
Ὅρθαι προβολαὶ	445 - 452
Ἀξονικὴ συμμετρία	454 - 455
Συμμετρία ὡς πρὸς ἐπίπεδον	456 - 458
Κεντρικὴ συμμετρία	459 - 460
Διέδροι γωνίαι - Ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία - Διχοτομοῦν ἐπίπεδον - Εἶδη διέδρων - Κάθετα ἐπίπεδα	473 - 478
Στερεαὶ γωνίαι - Τριέδροι στερεαὶ γωνίαι	479 - 481
Προσανατολισμὸς τριέδρου στερεᾶς γωνίας	482
Παραπληρωματικὴ τριέδρου στερεᾶς γωνίας	484
Θεωρήματα ἰσότητος στερεῶν γωνιῶν	485 - 488
Ἀνισοτικὰί σχέσεις εἰς τὰς στερεᾶς γωνίας	489 - 492

ΒΙΒΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

§ §

Πολύεδρα – Τετράεδρον – Είδη τετράεδρων	493 - 495
Κέντρον βάρους τετράεδρου	496
Πυραμὶς – Κανονικὴ πυραμὶς	497 - 499
Κόλουρος πυραμὶς – Κανονικὴ κόλουρος πυραμὶς	500 - 501
Πρίσμα	502 - 505
Παραλληλεπίπεδον – Ὁρθογώνιον παραλληλεπίπεδον	506 - 511
Πρισματοειδές	512
Μέτρησις τῶν πολυέδρων – Ἐπιφάνειαι	513 - 519
Ὅγκοι τῶν πολυέδρων	520 - 529
Ὅμοια πολυέδρα	530 - 534

ΒΙΒΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

§ §

Ἐπιφάνειαι καὶ στερεὰ ἐκ περιστροφῆς – Ὁρισμοὶ	535
Κύλινδρος	536 - 543
Κῶνος	544 - 550
Κόλουρος κῶνος	551 - 552
Περὶ περιστροφῆς τριγώνου περὶ ἄξονα	553 - 554
Σφαῖρα – Ὁρισμοὶ – Συμμετρίαι	555 - 558
Σχετικαὶ θέσεις εὐθείας καὶ σφαίρας	559
Σχετικαὶ θέσεις σφαίρας καὶ ἐπιπέδου	560
Σχετικαὶ θέσεις δύο σφαιρῶν	561
Καθορισμὸς σφαίρας	565
Γεωμετρικοὶ τόποι	566
Γραφικαὶ ἐφαρμογαὶ	567 - 569
Σφαιρικὴ ζώνη – Σφαιρικὴ ἐπιφάνεια	570 - 572
Σφαιρικὸς τομεὺς – Ὅγκος σφαίρας – Σφαιρικὸς δακτύλιος – Σφαιρικὸν τμήμα	574 - 579
Σφαιρικὰ πολύγωνα	580 - 581

ΜΕΡΟΣ Α'

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Γεωμετρία καλεῖται ὁ κλάδος τῶν μαθηματικῶν, ὁ ὁποῖος ἐξετάζει τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν τῶν στερεῶν σωμάτων, ὡς καὶ τὰς μετρικὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑφίστανται μεταξύ αὐτῶν. Ἀδιαφορεῖ διὰ τὴν ὕλην καὶ ἐνδιαφέρεται μόνον διὰ τὴν μορφήν τῶν στερεῶν, θεωροῦσα αὐτὰ ἄϋλα καὶ ὡς ἐκ τούτου ἔχει τὸ δικαίωμα νὰ τὰ μεταφέρῃ καὶ νὰ θέτῃ τὸ ἐν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἢ καὶ τὸ ἐν ἐντὸς τοῦ ἄλλου.

Ἱστορικὸν σημείωμα. Γεωμετρία κατὰ τοὺς ἀρχαίους, εἶναι ἡ τέχνη τοῦ μετρᾶν τὴν Γῆν (τὸ ἔδαφος). Ὁ πατὴρ τῆς ἱστορίας Ἡρόδοτος ἀναφέρει ὅτι ἡ γεωμετρία ἐδημιουργήθη εἰς τὴν Αἰγύπτου τὴν ἐποχὴν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ βασιλεὺς Σέσωστρις διένειμεν εἰς κλήρους τὸ ἔδαφος τῆς Αἰγύπτου καὶ παρέστη ἀνάγκη νὰ ἀνευρίσκῃ ἕκαστος Αἰγύπτιος τὸν γεωργικὸν κλῆρον του, μετὰ ἑκάστην πλημμύραν τοῦ Νείλου.

Παρά ταῦτα ἡ ἀληθὴς πατρὶς τῆς Γεωμετρίας εἶναι ἡ ἀρχαία Ἑλλάς, διότι οἱ ἀρχαῖοι πρόγονοί μας ἔδωσαν μεγάλην ᾄθῃσιν εἰς τὴν σπουδὴν τῆς. Ὡς πρῶτος θεμελιωτὴς τῆς γεωμετρίας θεωρεῖται ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος (ΣΤ' αἰὼν π.Χ.), ὁ ὁποῖος διὰ τοῦ θεωρήματός τῶν ἀναλόγων τμημάτων, τῶν περιλαμβανομένων μεταξύ παραλλήλων εὐθειῶν, ὑπελόγησε τὸ ὕψος αἰγυπτιακῆς πυραμίδος, καταπλήξας τὸν βασιλέα τῆς Αἰγύπτου Ἀμασιν. Ὁ Θαλῆς ἱδρυσεν εἰς Μίλητον τὴν Ἰωνικὴν Σχολὴν καὶ ἐπλούτισε τὰς γεωμετρικὰς γνώσεις.

Ἡ σπουδὴ τῆς γεωμετρίας ἐξακολουθεῖ εἰς τὴν μεγάλην Ἑλλάδα (κάτω Ἰταλίαν) ὅπου ὁ ἐκ Σάμου Πυθαγόρας (580 - 500 π.Χ.) ἱδρυσεν εἰς τὸν Κρότωνα τὴν περίφημον Σχολὴν του. Κατόπιν ὁ Ἰπποκράτης ὁ Χῖος (450 π.Χ.) ἐδημοσίευσεν Στοιχεῖα Γεωμετρίας, θεωρεῖται δὲ ὡς ὁ πρῶτος γράψας βιβλίον γεωμετρίας.

Μετὰ ὁ φιλόσοφος Πλάτων (430 - 347 π.Χ.) ἐπεξέτεινε τὴν σπουδὴν τῆς γεωμετρίας, τόσῃ δὲ σημασίαν ἔδωκεν εἰς αὐτήν, ὥστε εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς θύρας τῆς ἱδρυθείσης ὑπ' αὐτοῦ ἐν Ἀθήναις Σχολῆς, τῆς «Ἀκαδημίας», ἀνέγραψε τὸ ρητόν : «μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίστω». Εἰς τὸν Πλάτωνα ὀφείλεται ἡ εἰσαγωγή τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου ἐρεῦνης καὶ ἡ διδασκαλία τῶν γεωμετρικῶν τόπων.

Κατόπιν οι τρεις μεγάλοι αρχαίοι συγγραφείς μαθηματικών βιβλίων Εὐκλείδης (330 - 270 π. Χ.), Ἀρχιμήδης (287 - 212 π. Χ.) και Ἀπολλώνιος (260 - 200 π. Χ.) συνετέλεσαν κατὰ πολὺ εἰς τὴν περαιτέρω ἀνάπτυξιν τῆς γεωμετρίας, ἰδίως δὲ ὁ Εὐκλείδης μὲ τὰ «Στοιχεῖα», σύγγραμμα ἀποτελούμενον ἀπὸ 13 βιβλία. Εἰς τὸν Εὐκλείδην ὀφείλεται ἡ εἰσαγωγή τῆς μεθόδου τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, εἰς δὲ τὸν Ἀρχιμήδην ὀφείλονται αἱ πρώται έννοιαι τῶν ὀρίων. Ὡθησιν ἐπίσης ἔδωσαν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς γεωμετρίας καὶ οἱ Ἀλεξανδρινοὶ Μενέλαος (80 π. Χ.), Πτολεμαῖος (125 μ. Χ.) καὶ Πάππος (Γ' Αἰὼν μ. Χ.).

Μετὰ τοὺς Ἀλεξανδρινούς, ἡ ἀνάπτυξις τῶν γεωμετρικῶν γνώσεων ὑπῆρξε βραδυτάτῃ μέχρι τῆς Ἀναγεννήσεως. Μετὰ τὴν Ἀναγέννησιν ἤρχισεν ἡ ἀλματώδης πρόοδος τῆς γεωμετρίας. Ὁ Καρτέσιος (Descartes 1596 - 1650) μὲ τὰς ὀρθογωνίους συντεταγμένας ἐνὸς σημείου, δημιουργεῖ τὴν ἀναλυτικὴν γεωμετρίαν, ἰδιαιτέρον κλάδον τῆς γεωμετρίας, ὁ ὁποῖος συνετέλεσε πάρα πολὺ εἰς τὴν περαιτέρω ἀνάπτυξιν τῶν μαθηματικῶν καὶ παρέσχε νέας μεθόδους ἐρεῦνης. Αἱ νέαι αὗται μέθοδοι καὶ ἡ κατὰ τὸν ΙΖ' αἰῶνα διατύπωσις τῆς ἀπειροστικῆς ἀνάλυσεως, συνετέλεσαν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς γεωμετρίας καὶ πρὸς ἄλλας κατευθύνσεις. Οὕτω ἐδημιουργήθησαν καὶ ἄλλοι κλάδοι τῆς γεωμετρίας, ὅπως ἡ διαφορικὴ γεωμετρία, ἡ παραστατικὴ γεωμετρία, ἡ προβολικὴ γεωμετρία ἢ γεωμετρία τῆς θέσεως κ.λ.π.

2. Πρωταρχικαὶ έννοιαι. Ἡ γεωμετρία θεωροῦσα τὰ ἀντικείμενά της ζύλα, δημιουργεῖ φανταστικά εἶδωλα αὐτῶν καὶ ὥς ἐκ τούτου ἔχει ἀνάγκην σαφοῦς θεμελιώσεως. Εὐρισκόμενοι εἰς ἀδυναμίαν νὰ ὀρίσωμεν τὰς πρώτας έννοιαις τῆς γεωμετρίας, θεωροῦμεν αὐτάς γνωστάς καὶ τὰς καλοῦμεν **πρωταρχικὰς έννοιαις**. Αὗται εἶναι τὸ «σημεῖον» ἢ «εὐθεΐα», ἢ «γραμμὴ», τὸ «ἐπίπεδον» ἢ «ἐπιφάνεια» καὶ ὁ «χώρος». Ἐπὶ τῶν έννοιῶν τούτων θὰ θεμελιωθῇ μὲν γεωμετρικὴ θεωρία διὰ τῶν προτάσεών της.

3. Συμβολισμός. Τὰ σημεῖα συνήθως θὰ συμβολίζωνται μὲ τὰ κεφαλαῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, αἱ εὐθεΐαι μὲ τὰ μικρὰ γράμματα ἐγκεκλισμένα ἐντὸς παρενθέσεων καὶ τὰ ἐπίπεδα μὲ τὰ κεφαλαῖα γράμματα ἐγκεκλισμένα ἐντὸς παρενθέσεων.

4. Αἱ προτάσεις τῆς γεωμετρίας. i). Ἀξίωμα καλεῖται μία πρότασις, τὴν ὁποίαν δεχόμεθα ὡς ἀληθῆ. Τὰ αξιώματα, κατὰ κανόνα, εἶναι προτάσεις ἀφ' ἑαυτῶν φανεραί, ἀπορρέουσai ἐκ τῆς ἐμπειρίας μας, πάντως εἶναι προτάσεις αὐθαίρετως παραδεκταί. Μία γεωμετρικὴ θεωρία θεμελιούται ἐπὶ πεπερασμένου ἀριθμοῦ αξιωμάτων.

Ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ δημιουργήσωμεν περισσότερας τῆς μιᾶς γεωμετρικᾶς θεωρίας, ἐκάστη δὲ θὰ βασίζεται εἰς αξιώματα ἐκ τῶν ὁποίων ὠρισμένα τοῦλάχιστον δὲν εἶναι παραδεκτὰ ὑπὸ τῆς ἄλλης. Οὕτω ἐκτὸς τῆς Εὐκλείδειου Γεωμετρίας, μὲ τὴν ὁποίαν καὶ θὰ ἀσχοληθῶμεν, ἐδημιουργήθησαν κατὰ καιροὺς καὶ ἄλλαι γεωμετρικαὶ θεωρίαι βασιζόμεναι εἰς διαφορετικὰς ομάδας αξιωμάτων, αἱ πλέον ἀξιόλογοι τῶν ὁποίων εἶναι τοῦ Gauss (1777 - 1856), τοῦ Lobatchefsky (1793 - 1856) καὶ τοῦ Riemann (1826 - 1866). Αἱ γεωμετρίαι αὗται ὀνομάσθησαν μὴ Εὐκλείδειοι γεωμετρίαι, ἢ ἀντευκλείδαιοι γεωμετρίαι.

ii). **Θεώρημα** καλεῖται μία πρότασις, ἡ ἀλήθεια τῆς ὁποίας γίνεται φανερὰ κατόπιν ἀποδείξεως, ἥτοι κατόπιν λογικῆς ἐπεξεργασίας βασιζομένης ἐπὶ τῶν τεθέντων ἀξιωμάτων καὶ τῶν προηγουμένως ἀποδεδειγμένων θεωρημάτων.

iii). **Πόρισμα** καλεῖται μία πρότασις, ἡ ὁποία εἶναι ἄμεσος συνέπεια μιᾶς ἄλλης προτάσεως (ἢ ἄλλων προτάσεων) καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ ἀπόδειξις τῆς συνήθως εἶναι περιττὴ ὡς προφανής.

iv). **Πρόβλημα** καλεῖται μία πρότασις, ἡ ὁποία ἐπὶ τῇ βάσει δεδομένων γνωστῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα παρέχει, ζητεῖ νὰ ὑπολογισθῇ ἢ νὰ κατασκευασθῇ γεωμετρικὸν τι μέγεθος. **Λύσις** τοῦ προβλήματος καλεῖται ἡ διαδικασία τοῦ ὑπολογισμοῦ ἢ τῆς κατασκευῆς τοῦ ζητουμένου.

v). **Αἴτημα**. Οὐσιώδης διαφορὰ μεταξὺ αἰτήματος καὶ ἀξιώματος δὲν ὑπάρχει. Τὸ αἴτημα, ὅπως καὶ τὸ ἀξίωμα, εἶναι πρότασις μὴ δυναμένη νὰ ἀποδειχθῇ.

Ὁ Εὐκλείδης (περί τὸ 285 π.Χ.) εἰς τὸ Α' βιβλίον τῶν «Στοιχείων» του διετύπωσε πρότασιν μὴ ἀποδειχθεῖσαν, τὴν ὁποίαν ἐκάλεσεν αἴτημα ἐπιζητῶν τὴν παραδοχὴν τῆς, διότι ἐγνώριζεν ὅτι ἡ μὴ παραδοχὴ τῆς προτάσεώς του, εἶναι δυνατόν νὰ μὴ ὀδηγῇ εἰς ἄτοπα συμπεράσματα (βλ. καὶ § 88).

vi). **Λήμμα** καλεῖται βοηθητικὴ πρότασις χρήζουσα ἀποδείξεως (βοηθητικὸν θεώρημα), ἡ ὁποία προτάσσεται θεωρήματος διὰ νὰ ἀπλουστεύσῃ καὶ συντομεύσῃ τὴν ἀπόδειξιν αὐτοῦ.

5. Ἡ Λογικὴ τῶν προτάσεων. Μία γεωμετρικὴ πρότασις περιέχει στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα δεχόμεθα ὅτι ἰσχύουν καὶ θὰ τὰ καλοῦμεν **ὑποθέσεις** καὶ ἄλλα στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα ἐπονται καὶ θὰ τὰ καλοῦμεν **συμπεράσματα**. Αἱ ὑποθέσεις καὶ τὰ συμπεράσματα μιᾶς προτάσεως καλοῦνται **συνθήκαι** αὐτῆς.

6. Ἀντίστροφος πρότασις. Ἐὰν εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρότασιν ἐναλλάξωμεν τὰς θέσεις ὑποθέσεων καὶ συμπερασμάτων καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, τότε δημιουργοῦμεν ἄλλας γεωμετρικὰς προτάσεις, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται **ἀντίστροφοι** τῆς πρώτης. Ἐὰν ἡ πρότασις περιέχῃ μίαν ὑπόθεσιν καὶ ἓν συμπέρασμα τότε ἔχει μίαν μόνον ἀντίστροφον πρότασιν.

7. Συνεπαγωγή. Ἐὰν μία συνθήκη A ἔχῃ ὡς συνέπειαν μίαν ἄλλην συνθήκην B, τότε λέγομεν ὅτι ἐκ τῆς A συνεπάγεται ἡ B καὶ συμβολίζομεν

$$A \Rightarrow B$$

Ἡ σχέση αὕτη καλεῖται **συνεπαγωγή**.

Εἰς τὴν ἀνωτέρω συνεπαγωγὴν, ἡ συνθήκη A καλεῖται **ικανὴ** διὰ τὴν B, διότι ἐὰν ὑπάρχῃ ἡ A, τοῦτο εἶναι ἀρκετὸν (ικανὸν) διὰ τὴν ὑπαρξιν καὶ τῆς B.

Ἐὰν διὰ τὰς συνθήκας A καὶ B συμβαίῃ $A \Rightarrow B$ ἀλλὰ καὶ $B \Rightarrow A$, τότε

τάς καλοῦμεν ισοδυνάμους συνθήκας ἢ ισοδυνάμους προτάσεις καὶ συμβολίζομεν

$$A \Leftrightarrow B$$

ἐκάστη δὲ ἐξ αὐτῶν καλεῖται **ἀναγκαία καὶ ἱκανή** συνθήκη διὰ τὴν ἄλλην.

Κατὰ ταῦτα ἡ φράσις «δείξατε ὅτι ἡ συνθήκη A εἶναι ἀναγκαία καὶ ἱκανή διὰ τὴν συνθήκην B » μᾶς ὑποχρεώνει εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς συνεπαγωγῆς $A \Rightarrow B$, διὰ τῆς ὁποίας ἡ A χαρακτηρίζεται ἱκανή διὰ τὴν B , ἀλλὰ καὶ τῆς ἀντιστρόφου τῆς $B \Rightarrow A$ διὰ τῆς ὁποίας ἡ A ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι ἀναγκαία συνέπεια τῆς B .

Ἐνίοτε ἡ φράσις «ἀναγκαία καὶ ἱκανή συνθήκη», διατυπώσεται καὶ ὡς ἐξῆς : «τότε καὶ μόνον τότε» ἢ «πρέπει καὶ ἀρκεῖ».

Ἀπὸ τὴν συνεπαγωγὴν $A \Rightarrow B$ διατυπώνομεν συναφῶς καὶ τὰς ἐξῆς προτάσεις

$$\text{Ἀπὸ ὅχι } A \Rightarrow \text{ὅχι } B$$

ἡ ὁποία καλεῖται **ἀντίθετος** τῆς ἀρχικῆς καὶ

$$\text{Ἀπὸ ὅχι } B \Rightarrow \text{ὅχι } A$$

ἡ ὁποία καλεῖται **ἀντιστροφoαντίθετος** τῆς ἀρχικῆς.

8. Ο ὡς εἶναι θεμελιώδης ἔννοια γνωστὴ ἐκ τῆς ἐμπειρίας μας (περιβάλλον εἰς τὸ ὁποῖον ζοῦμε). Ἐντὸς τοῦ χώρου ὑπάρχει ἡ ὕλη εἰς ὅλας τὰς μορφάς τῆς καὶ ἐντὸς αὐτοῦ συμβαίνουν τὰ φυσικὰ φαινόμενα.

9. Γεωμετρικὸν σχῆμα καλεῖται ἡ αὐλὸς ἀπεικόνις κάθε ὑποσυνόλου τοῦ (αἰσθητοῦ) χώρου εἰς τὸν ὡς τῆς νοήσεως. Ἡ ἀπεικόνις αὕτη εἶναι ἐν γένει ἐν σύνολον ἀπὸ σημεία, γραμμὰς καὶ ἐπιφανείας, δηλαδὴ εἶναι ἐν σημειοσύνολον, δεδομένου ὅτι αἱ γραμμαὶ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι εἶναι σημειοσύνολα.

Τὸ γεωμετρικὸν σχῆμα οὐδέποτε μᾶς πείθει διὰ κάποιαν ιδιότητα, τὴν ὁποίαν ἔχει ἐνδεχομένως τὸ ἐξεταζόμενον μέσω αὐτοῦ στερεόν. Ἀπλῶς μᾶς ὑποβοηθεῖ διὰ τὴν ἀνακάλυψιν καὶ ἀπόδειξιν αὐτῆς.

10. Αἱ τρεῖς βασικαὶ κατηγορίαι ἀξιώμάτων. Αἱ θεμελιώδεις ἔννοιαι τῆς γεωμετρίας εἶναι τὸ **σημεῖον**, ἡ **εὐθεΐα** καὶ τὸ **ἐπίπεδον**. Εἶναι ἔννοιαι μὴ δυνάμεναι νὰ ὁρισθοῦν (πρωταρχικαὶ ἔννοιαι) καὶ δι' αὐτῶν συγκροτοῦνται ὅλα τὰ γεωμετρικὰ σχήματα.

Τὸ σημεῖον δὲν ἔχει σχῆμα οὔτε ἔκτασιν, ἀλλὰ ἔχει μόνον θέσιν.

Λεπτὸν τεταμένον νῆμα δίδει τὴν εἰκόνα μέρους εὐθείας γραμμῆς.

Τέλος ἡ ἐπιφάνεια ἡρεμοῦντος ὕδατος (περιορισμένων διαστάσεων), δύναται νὰ δώσῃ τὴν εἰκόνα μέρους ἐπιπέδου ἐπιφανείας.

Τὰ ἀνωτέρω δὲν ἀποτελοῦν μαθηματικοὺς ὁρισμοὺς τῶν γεωμετρικῶν τούτων στοιχείων, ἀλλὰ αὐτὰ ἔχουν καθορισμένας ιδιότητας περιγραφόμενας ὑπὸ ἀξιώμάτων.

Τὰ ἀξιώματα ἐπὶ τῶν ὁποίων θεμελιόυται ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία, δια-
ροῦνται κυρίως εἰς τρεῖς ομάδας, ἥτοι :

i). Ἀξιώματα θέσεως. Τὰ ἀξιώματα τῆς ομάδος αὐτῆς ἐγκλείουν τὴν
ἐννοιαν τοῦ «περιέχειν» ἢ «περιέχεσθαι».

ii). Ἀξιώματα ισότητος. Ταῦτα διέπουν τὴν σχέσιν τῆς βασικῆς ἰσό-
τητος, μετὰ τὴν ὁποίαν θὰ ἐφοδιασθῇ τὸ σύνολον τῶν σχημάτων.

iii). Ἀξιώματα διατάξεως. Ταῦτα διέπουν τὰς σχετικὰς θέσεις ση-
μείων πρὸς ἄλληλα καὶ τὰς σχέσεις μεγέθους τῶν γεωμετρικῶν στοιχείων.

Εἰς τὰ ἐπόμενα ἡ θεμελίωσις τῆς Εὐκλείδειου Γεωμετρίας θὰ συμπλη-
ρωθῇ καὶ μετὰ ἄλλα τινὰ ἀξιώματα, ἐκ τῶν ὁποίων σπουδαιότερον εἶναι τὸ ἀξίω-
μα τοῦ Εὐκλείδου, σχετικὸν μετὰ τὰς παραλλήλους εὐθείας.

11. Ἀξιώματα θέσεως. Ἀξίωμα I. Μία εὐθεῖα περιέχει τοὐλάχιστον δύο
σημεῖα A καὶ B, ὑπάρχει δὲ τοὐλάχιστον ἓν σημεῖον Γ ἐκτὸς τῆς εὐθείας.

Παρατήρησις. Ὅταν θὰ λέγωμεν «δύο σημεῖα» ἀντιστοίχως «δύο εὐθεῖ-
αι» ἢ «δύο ἐπίπεδα» θὰ τὰ ἐννοοῦμεν ἐν γένει διακεκριμένα, δηλαδὴ μὴ συμπί-
πτοντα.

Ἀξίωμα II. Διὰ δύο σημείων μία καὶ μόνον μία εὐθεῖα διέρχεται.

Ἐξ αὐτοῦ ἐπεταὶ ὅτι δύο σημεῖα A καὶ B, ὀρίζουν πλήρως τὴν θέσιν μιᾶς
μόνον εὐθείας, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ συμβολίζωμεν καὶ ὡς εὐθ. AB.

Ἀξίωμα III. Ἐν ἐπίπедον περιέχει τρία τοὐλάχιστον σημεῖα A, B, Γ
μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ὑπάρχει δὲ τοὐλάχιστον ἓν σημεῖον Δ ἐκτὸς τοῦ ἐπι-
πέδου.

Ἀξίωμα IV. Διὰ τριῶν σημείων μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας, ἓν καὶ μόνον
ἐν ἐπίπедον διέρχεται.

Ἐξ αὐτοῦ ἐπεταὶ ὅτι τρία σημεῖα A, B καὶ Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας,
ὀρίζουν πλήρως τὴν θέσιν ἑνὸς μόνον ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ συμβο-
λίζωμεν καὶ ὡς ἐπίπ. (ABΓ).

Ἀξίωμα V. Ἄν A καὶ B εἶναι δύο σημεῖα ἐπιπέδου (Π), ἡ εὐθεῖα AB
ἀνήκει εἰς τὸ (Π).

Διὰ τὴν εὐθεῖαν καὶ τὸ ἐπίπεδον δεχόμεθα ἐπὶ πλέον καὶ τὰ ἀκόλουθα
ἀξιώματα :

Ἀξίωμα VI. Μία εὐθεῖα AB ἐκτείνεται ἀπεριορίστως ἐκατέρωθεν τῶν
σημείων A καὶ B.

Ἀξίωμα VII. Ἐν ἐπίπедον (ABΓ) ἐκτείνεται ἀπεριορίστως.

12. Μετατόπισις σχήματος καλεῖται πᾶσα ἀλλαγὴ τῆς θέσεως αὐτοῦ

ἐντὸς τοῦ χώρου. Συμβατικῶς δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχει καὶ ταυτοτική μετατόπισις, ἡ ὁποία ἀφίνει κάθε σχῆμα εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν.

Ἀξίωμα VIII. Πᾶσα μετατόπισις σχήματος (Σ) δὲν τὸ μεταβάλλει.

13. Ἴσα σχήματα. Τὸ σύνολον τῶν σχημάτων τὸ ἐφοδιάζομεν μὲ μίαν σχέσιν βασικῆς ἰσότητος, ἡ ὁποία ἔχει τὴν ἐξῆς ἔννοιαν :

Δύο σχήματα (Σ_1) καὶ (Σ_2) καλοῦνται ἴσα τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ὑπάρχῃ μετατόπισις, ἡ ὁποία νὰ θέτῃ τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου εἰς τρόπον, ὥστε τὰ δύο σχήματα νὰ ταυτισθοῦν, ἤτοι ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἑνὸς νὰ συμπίσῃ μὲ ἓν σημεῖον τοῦ ἄλλου καὶ ἀντιστρόφως. Συμβολικῶς γράφομεν

$$(\Sigma_1) = (\Sigma_2)$$

14. Ἀξιώματα τῆς ἰσότητος. Διὰ τὴν σχέσιν τῆς βασικῆς ἰσότητος δεχόμεθα τὰ κάτωθι ἀξιώματα.

Ἀξίωμα I. Ἐκαστον σχῆμα (Σ) εἶναι ἴσον πρὸς ἑαυτό, ἤτοι :

$$(\Sigma) = (\Sigma)$$

Ἐξ αὐτοῦ ἡ σχέσις τῆς βασικῆς ἰσότητος καλεῖται ἀνακλαστική.

Ἀξίωμα II. Ἐὰν $(\Sigma_1) = (\Sigma_2)$, τότε καὶ $(\Sigma_2) = (\Sigma_1)$. Συντόμως γράφωμεν

$$(\Sigma_1) = (\Sigma_2) \Rightarrow (\Sigma_2) = (\Sigma_1)$$

Ἐξ αὐτοῦ ἡ σχέσις τῆς βασικῆς ἰσότητος καλεῖται συμμετρική.

Ἀξίωμα III. Ἄν δύο σχήματα εἶναι ἴσα πρὸς τρίτον, τότε εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσα. Συντόμως γράφομεν :

$$(\Sigma_1) = (\Sigma_2) \wedge (\Sigma_2) = (\Sigma_3) \Rightarrow (\Sigma_1) = (\Sigma_3).$$

Ἐξ αὐτοῦ ἡ σχέσις τῆς βασικῆς ἰσότητος καλεῖται μεταβατική.

15. Διάταξις σημείων ἐπ' εὐθείας. Ἐὰν ὑπάρχουν τρία διάφορα ἀλλήλων σημεῖα A, B καὶ Γ ἀνήκοντα εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (δ) καὶ



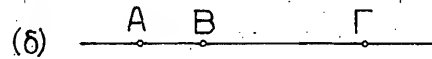
Σχ. 1

κεῖνται ὡς πρὸς ἀλλήλα ὅπως εἰς τὸ σχῆμα 1, τότε τὸ σημεῖον Γ καλεῖται ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ B. Ἰσοδυνάμως λέγομεν ὅτι τὸ σημεῖον Γ ἔχει ἐκατέρωθεν αὐτοῦ τὰ σημεῖα A καὶ B. Ἡ σημειοσειρὰ A, Γ, B ὅπως ἔχει εἰς τὸ σχ. 1,

λέγουμεν ὅτι εἶναι μία διάταξις τῶν τριῶν σημείων ἐπὶ τῆς εὐθείας (δ), ἢ ἀκόμη ὅτι τὰ τρία σημεῖα εἶναι διαδοχικὰ κατὰ τὴν σειρὰν A, Γ, B.

16. Ἀξιώματα διατάξεως. Ἀξίωμα I. Ἐὰν A καὶ B εἶναι δύο διάφορα ἀλλήλων σημεῖα εὐθείας (δ), ὑπάρχει ἓν τοῦλάχιστον σημεῖον Γ(δ) ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ B (σχ. 1).

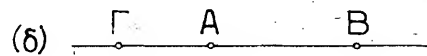
Ἀξίωμα II. Ἐὰν A καὶ B εἶναι δύο διάφορα ἀλλήλων σημεῖα εὐθείας



Σχ. 2

(δ), ὑπάρχει ἓν τοῦλάχιστον σημεῖον Γ(δ) οὕτως, ὥστε τὸ B νὰ εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ Γ (σχ. 2).

Ἀξίωμα III. Ἐὰν A καὶ B εἶναι δύο διάφορα ἀλλήλων σημεῖα εὐθείας

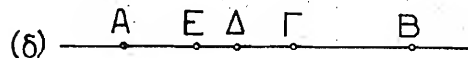


Σχ. 3

(δ), ὑπάρχει ἓν τοῦλάχιστον σημεῖον Γ(δ) οὕτως, ὥστε τὸ A νὰ εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν Γ καὶ B (σχ. 3).

17. Θεώρημα. Μία εὐθεῖα ἔχει ἄπειρα τὸ πλῆθος σημεῖα.

Ἀπόδειξις. Συμφώνως πρὸς τὰ τεθέντα ἀξιώματα, μία εὐθεῖα (δ) ἔχει τοῦλάχιστον δύο σημεῖα A καὶ B. Τότε, διὰ τὰ A καὶ B, ὑπάρχει ἓν τοῦ-



Σχ. 4

λάχιστον ἐνδιάμεσον σημεῖον Γ τῆς (δ). Διὰ τῆς αὐτῆς σκέψεως, ὑπάρχει ἓν τοῦλάχιστον σημεῖον Δ τῆς (δ) ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ Γ κ.ο.κ. Οὕτω δυνάμεθα νὰ συσσωρεύσωμεν μίαν ἄπειράν σημείων ἐνδιαμέσων τῶν A καὶ B. Ἄρα ἡ εὐθεῖα (δ) περιέχει ἄπειρα τὸ πλῆθος σημεῖα, ἐφ' ὅσον ἓν μέρος αὐτῆς περιέχει ἄπειρα σημεῖα.

18. Θεώρημα. Δύο διάφοροι μεταξύ των εὐθεῖαι (ε₁) καὶ (ε₂) ἔν τὸ πολὺ κοινὸν σημεῖον δύνανται νὰ ἔχουν.

Ἀπόδειξις. Κατ' ἀρχὴν ἂς παρατηρήσωμεν ὅτι δύο εὐθεῖαι δύνανται νὰ

έχουν ἓν κοινὸν σημεῖον. Διότι ἂν θεωρήσωμεν τρία σημεῖα A, B, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, τὰ A καὶ B ὀρίζουν τὴν εὐθεῖαν (ε_2) , ὁμοίως τὰ A καὶ Γ ὀρίζουν τὴν εὐθεῖαν (ε_1) , αἱ ὁποῖαι ἔχουν προφάνως κοινὸν σημεῖον τὸ A (σχ. 5).

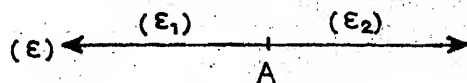
Ἐκτός τοῦ A δὲν δύνανται νὰ ἔχουν καὶ ἄλλο κοινὸν σημεῖον, διότι ἂν M ἦτο ἓν ἐπὶ πλέον κοινὸν σημεῖον τῶν (ε_1) καὶ (ε_2) αὗται θὰ ἐταυτίζοντο, διότι τὰ A καὶ M μίαν μόνον εὐθεῖαν ὀρίζουν. Ἄρα δύο διάφοροι μεταξύ των εὐθεῖαι ἓν τὸ πολὺ κοινὸν σημεῖον δύνανται νὰ ἔχουν.

Τότε λέγομεν ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) τέμνονται, τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον A αὐτῶν λέγεται **σημεῖον τομῆς** των, ἢ ἴχνος ἢ ποὺς τῆς μιᾶς εὐθείας ἐπὶ τὴν ἄλλην.

19. Ήμιευθεῖα. Ἄς θεωρήσωμεν εὐθεῖαν (ε) καὶ σημεῖον A αὐτῆς (σχ. 6). Διὰ τοῦ σημείου A ἡ εὐθεῖα (ε) , ὡς σημειοσύνολον, διαιρεῖται εἰς δύο ὑποσύνολα (ε_1) καὶ (ε_2) τοιαῦτα ὥστε νὰ εἶναι :

$$(\varepsilon_1) \cup (\varepsilon_2) = (\varepsilon) - \{A\} \text{ καὶ } (\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2) = \emptyset$$

Τὰ ὑποσύνολα (ε_1) καὶ (ε_2) καλοῦνται **ἡμιευθεῖαι** με **ἀρχὴν** τὸ σημεῖον A .



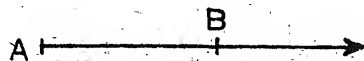
Σχ. 6

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν, ἡ ἀρχὴ A δὲν ἀνήκει εἰς τὰς ἡμιευθεῖας (ε_1) καὶ (ε_2) καὶ τότε θὰ τὰς λέγωμεν **ἀνοικτὰς ἡμιευθεῖας**. Ἐὰν ὅμως θέλωμεν νὰ συμπεριλάβωμεν εἰς αὐτάς καὶ τὴν ἀρχὴν των A , ὁπότε θὰ τὰς καλοῦμεν **κλειστάς ἡμιευθεῖας**, τότε θὰ πληροῦνται αἱ σχέσεις :

$$(\varepsilon_1) \cup (\varepsilon_2) = (\varepsilon) \text{ καὶ } (\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2) = \{A\}.$$

Αἱ ἡμιευθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) καλοῦνται **ἀντίθετοι ἡμιευθεῖαι**, ἐφ' ὅσον ἔχουν κοινὴν ἀρχὴν καὶ ἀποτελοῦν εὐθεῖαν, ἐκάστη δὲ δύναται νὰ λέγεται καὶ **συμπληρωματικὴ** τῆς ἄλλης.

Εὐνόητον εἶναι ὅτι μία ἡμιευθεῖα με ἀρχὴν σημεῖον A , ἐκτείνεται ἀπεριόριστως ἀπὸ τὸ ἓν μόνον μέρος της. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν μιᾶς ἡμιευθείας ἀπαι-



Σχ. 7

τεῖται νὰ γνωρίζωμεν τὴν ἀρχὴν της A καὶ ἓν τυχὸν σημεῖον της B (σχ. 7). Διὰ τὸν συμβολισμὸν της γράφομεν ἡμιευθ. AB ἢ ἀπλῶς AB , ὅταν ἔχη ἀνα-

φερθῇ προηγουμένως ὅτι πρόκειται περὶ ἡμιευθείας. Πάντως εἰς τὸν συμβολισμόν προτάσσεται ἡ ἀρχὴ Α.

20. Εὐθύγραμμον τμήμα. Ἐστω εὐθεΐα (δ) καὶ Α, Β δύο σημεῖα τῆς. Καλοῦμεν εὐθύγραμμον τμήμα με ἄκρα τὰ Α καὶ Β τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς εὐθείας (δ), τὰ ὅποια εἶναι ἐνδιάμεσα τῶν σημείων Α καὶ Β (σχ. 8). Συμβολικῶς γράφομεν $\tau\mu. AB$ ἢ ἀπλῶς AB , ὅταν προηγουμένως ἔχῃ ἀναφερθῇ



Σχ. 8

ὅτι εἶναι εὐθύγραμμον τμήμα. Πρὸς μεγαλυτέραν ἀπλούστευσιν διὰ τὸν συμβολισμόν, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιοῦμεν καὶ μικρὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ἥτοι ἐν τμήμα AB τὸ ὀνομάζομεν α .

Κατὰ τὸν ὀρισμόν, τὰ ἄκρα τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB , τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ τὸ καλοῦμεν ἀπλῶς τμήμα AB , δὲν περιέχονται εἰς αὐτὸ καὶ ὥς ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ τὸ λέγωμεν καὶ ἀνοικτὸν τμήμα. Δυνατὸν ὅμως νὰ θέλωμεν νὰ συμπεριλάβωμεν ἐντὸς τοῦ τμήματος καὶ τὰ ἄκρα αὐτοῦ καὶ τότε θὰ τὸ λέγωμεν κλειστὸν τμήμα. Ἀναλόγως ὀρίζεται καὶ ἡμιἀνοικτὸν τμήμα, ὅταν τὸ ἐν μόνον τῶν δύο ἄκρων περιλαμβάνεται εἰς αὐτό.

Συμβατικῶς δεχόμεθα τὴν ὕπαρξιν εὐθυγράμμου τμήματος τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα συμπίπτουν. Τοῦτο θὰ τὸ λέγωμεν **μηδενικὸν εὐθύγραμμον τμήμα**.

21. Ἀπόστασις δύο σημείων. Τὴν ἔννοιαν «ἀπόστασις δύο σημείων» τὴν θεωροῦμεν γνωστὴν ἐκ τῆς ἐμπειρίας. Τονίζομεν ὅμως ὅτι ἡ ἀπόστασις δύο σημείων Α καὶ Β δὲν εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB , δεδομένου ὅτι τὸ τμήμα AB εἶναι σημειοσύνολον, ἐνῶ ἡ ἀπόστασις AB εἶναι ἔννοια διάφορος τῆς ἔννοιας τοῦ σημειοσυνόλου.

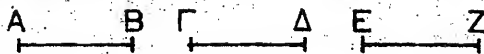
22. Μῆκος εὐθυγράμμου τμήματος καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν ἄκρων αὐτοῦ.

23. Ἰσότης εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἰδιότητες. Τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τὸ ἐφοδιάζομεν με τὴν σχέσιν τῆς βασικῆς ἰσότητος, ὥς αὕτη ἔχει ὀρισθῇ γενικῶς εἰς τὸ σύνολον τῶν σχημάτων (§ 13), ἥτοι :

Δύο εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$ καλοῦνται ἴσα τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν δύνανται νὰ ταυτισθοῦν διὰ μετατοπίσεως (ἕκαστον σημεῖον τοῦ πρώτου νὰ ταυτισθῇ με ἓν σημεῖον τοῦ δευτέρου καὶ ἀντιστρόφως).

Ὡς ἰδιότητες τῆς βασικῆς ἰσότητος ἀναφέρονται τὰ τρία γενικά ἀξιώματα αὐτῆς, ἥτοι ἡ ἰσότης εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι σχέσις :

i) Ἀνακλαστική, ἥτοι (σχ. 9) : $AB = AB$ (πᾶν τμήμα ἰσοῦται πρὸς ἑαυτό).



Σχ. 9

ii) Συμμετρική, ἥτοι : $AB = ΓΔ \Rightarrow ΓΔ = AB$.

iii) Μεταβατική, ἥτοι : $AB = ΓΔ \wedge ΓΔ = ΕΖ \Rightarrow AB = ΕΖ$.

Πᾶσα σχέσις, εἰς τὴν ὁποίαν ἰσχύουν τὰ τρία προηγούμενα ἀξιώματα, χαρακτηρίζεται ὡς σχέσις ἰσοδυναμίας, κατὰ συνέπειαν ἡ σχέσις τῆς βασικῆς ἰσότητος, εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

Παρατήρησις. Ἐν εὐθύγραμμον τμήμα AB , ὡς σημειοσύνολον, συμπίπτει μὲ τὸ σημειοσύνολον BA . Ἄρα δυνάμεθα νὰ ἀναφέρωμεν ὡς ἰδιότητα τῆς ἰσότητος καὶ τὴν $AB = BA$.

24. Μέσον εὐθυγράμμου τμήματος καλεῖται ἓν σημεῖον αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος. Ἐὰν AB εἶναι ἓν εὐθύγραμμον τμήμα (σχ. 10) καὶ M εἶναι τὸ μέσον του, τότε θὰ εἶναι $MA = MB$.

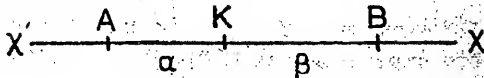


Σχ. 10

Ἀξίωμα. Ἐν εὐθύγραμμον τμήμα AB ἔχει ἓν καὶ μόνον ἓν μέσον M .

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

25. Ἀθροισμα εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἐστώσαν α καὶ β δύο εὐθύγραμμα τμήματα. Ἐπ' εὐθείας xx' λαμβάνομεν σημεῖον K (σχ. 11) καὶ ἐπὶ τῶν ἡμιευθειῶν Kx' καὶ Kx λαμβάνομεν σημεῖα A καὶ B ἀντίστοιχως οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $KA = \alpha$ καὶ $KB = \beta$. Ὡς ἄθροισμα τῶν δύο τμημάτων α καὶ β ὀρίζομεν τὸ τμήμα AB καὶ συμβολίζομεν



Σχ. 11

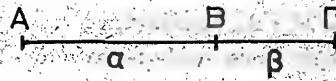
$$\alpha + \beta = AB \quad \eta \quad AK + KB = AB.$$

Ἡ ἀνωτέρω διαδικασία πρὸς εὗρεσιν τοῦ ἀθροίσματος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων καλεῖται **πρᾶξις προσθέσεως** ἢ ἀπλῶς **πρόσθεσις** τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων.

Τὸ ἄθροισμα τριῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ὀρίζεται ἀναλόγως, ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθέσωμεν τὸ τρίτον τμήμα, ὁμοίως δὲ 4, 5, ..., n τμημάτων.

26. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως. i) Ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι ἀντιμεταθετική, ἥτοι ἐὰν α, β εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα $\Rightarrow \alpha + \beta = \beta + \alpha$

Ἀπόδειξις. Ἐὰν $AB = \alpha$ καὶ $B\Gamma = \beta$ (σχ. 12) $\Rightarrow A\Gamma = AB + B\Gamma = \alpha + \beta$ (1).



Σχ. 12

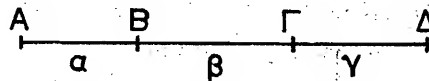
Ἐπίσης εἶναι $\Gamma A = \Gamma B + BA = \beta + \alpha$ (2)

Ἀλλὰ $A\Gamma = \Gamma A$ καὶ ἐπομένως ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν : $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

ii) Ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι προσεταιριστική, ἥτοι ἐὰν α, β, γ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα $\Rightarrow (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Ἀπόδειξις. Ἐπ' εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικῶς σημεῖα A, B, Γ, Δ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $\Gamma\Delta = \gamma$ (σχ. 13).

Τότε εἶναι : $A\Delta = A\Gamma + \Gamma\Delta = (\alpha + \beta) + \gamma$ (3)



Σχ. 13

καὶ $A\Delta = AB + B\Delta = \alpha + (\beta + \gamma)$

(4). Αἱ σχέσεις (3) καὶ (4) ἔχουν

τὰ πρῶτα μέλη των ἴσα, ἄρα θὰ εἶναι καὶ $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

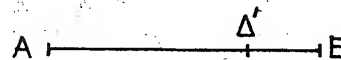
iii) Ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ἔχει οὐδέτερον στοιχείον τὸ μηδενικὸν εὐθύγραμμον τμήμα, συμβολιζόμενον μὲ 0, ἥτοι εἶναι $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$, ὅπου τὸ α εἶναι εὐθύγραμμον τμήμα.

iv) Ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι μονότροπος καὶ ἐσωτερικὴ πρᾶξις τοῦ συνόλου τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, ἥτοι τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι κλειστὸν ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως.

Πράγματι, ἀπὸ τὰς προηγουμένης ιδιότητος ἐπεταὶ ὅτι ν τὸ πλῆθος εὐθύγραμμα τμήματα δύνανται νὰ προστεθοῦν καθ' οἷανδήποτε σειρὰν μὲ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως (ἄθροισμα) τὸ αὐτὸ εὐθύγραμμον τμήμα, ἥτοι εἶναι μονότροπος. Ἐπίσης εἶναι ἐσωτερικὴ πρᾶξις τοῦ συνόλου τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, διότι τὸ ἄθροισμα εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι εὐθύγραμμον τμήμα, δηλαδὴ στοιχείον τοῦ αὐτοῦ συνόλου.

27. Διάταξις εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων. Ὡς θεωρήσωμεν δύο ἄνισα (ὄχι ἴσα) εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$ (σχ. 14).

Μετατοπίζομεν τὸ $\Gamma\Delta$ εἰς τὴν θέσιν $A\Delta'$ οὕτως, ὥστε τὰ δύο τμήματα νὰ ἀποκτήσουν κοινὸν ἄκρον τὸ A καὶ κοινὸν μέρος.



Τότε δύο εἶναι τὰ πιθανὰ ἐνδεχόμενα :



Σχ. 14

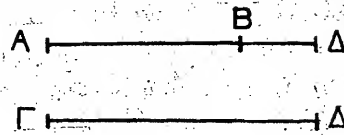
i) Τὸ Δ' ἐπὶ τῆς εὐθείας AB , εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ B (σχ. 14).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὸ τμήμα AB εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $A\Delta'$, ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, τὸ AB εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\Gamma\Delta$ καὶ συμβολίζομεν

$AB > \Gamma\Delta$. Ίσοδύναμος πρὸς τὴν προηγουμένην σχέσιν εἶναι καὶ ἡ $\Gamma\Delta < AB$, ἢ ὁποῖα διαβάζεται «τὸ $\Gamma\Delta$ εἶναι μικρότερον τοῦ AB ».

ii) Τὸ B ἐπὶ τῆς εὐθείας AB εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ Δ' (σχ. 15). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὸ τμήμα AB εἶναι μικρότερον τοῦ $\Gamma\Delta$ (συμβολικῶς $AB < \Gamma\Delta$) ἢ τὸ $\Gamma\Delta$ μεγαλύτερον τοῦ AB (συμβολικῶς $\Gamma\Delta > AB$).

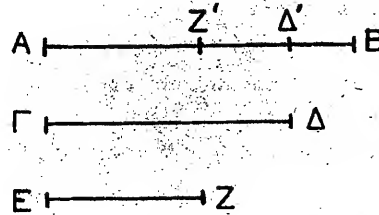
Ἡ σχέσις $AB > \Gamma\Delta$ (ἀντιστοίχως $AB < \Gamma\Delta$) καλεῖται σχέσις ἀνισότητος.



Σχ. 15

28. Ἰδιότητες. i) Ἡ σχέσις τῆς ἀνισότητος εἶναι μεταβατική, ἥτοι ἐὰν $AB > \Gamma\Delta \wedge \Gamma\Delta > EZ \Rightarrow AB > EZ$.

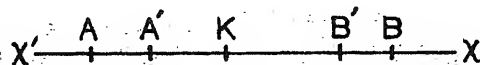
Ἀπόδειξις. Μετατοπίζομεν τὰ τμήματα $\Gamma\Delta$ καὶ EZ ἐπὶ τοῦ AB οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα Γ καὶ E νὰ ταυτισθοῦν μετὰ τοῦ A (σχ. 16) καὶ τὰ Δ καὶ Z νὰ λάβουν θέσεις Δ' καὶ Z' ἀντιστοίχως ἐπὶ τῆς εὐθείας AB . Ἐπειδὴ $AB > \Gamma\Delta$ καὶ $\Gamma\Delta = A\Delta' \Rightarrow AB > A\Delta'$, ἥτοι τὸ Δ' εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ B . Ὁμοίως ἐπειδὴ $\Gamma\Delta > EZ \Rightarrow A\Delta' > AZ'$, ἔπεται ὅτι τὸ Z' εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ Δ' . Ἀρα τὸ Z' εἶναι ἐνδιάμεσον καὶ τῶν A καὶ $B \Rightarrow AB > AZ' \Leftrightarrow AB > EZ$.



Σχ. 16

Παρατήρησις. Ἡ σχέσις τῆς ἀνισότητος δὲν εἶναι συμμετρική, δηλαδὴ ἐὰν $AB > \Gamma\Delta$ ἀποκλείεται νὰ εἶναι καὶ $\Gamma\Delta > AB$. Κάθε σχέσις μεταβατικὴ καὶ μὴ συμμετρική, χαρακτηρίζεται ὡς σχέσις διατάξεως καὶ ἐπομένως ἡ σχέσις τῆς ἀνισότητος εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, εἶναι σχέσις διατάξεως.

ii) Ἐὰν $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα τοιαῦτα, ὥστε $\alpha > \alpha' \wedge \beta > \beta' \Rightarrow \alpha + \beta > \alpha' + \beta'$ ἥτοι δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν κατὰ μέλη ὁμοιοστροφούς ἀνισότητας.



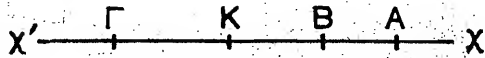
Σχ. 17

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ εὐθείας $\chi\chi'$ λαμβάνομεν σημεῖον K (σχ. 17). Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας $K\chi'$ λαμβάνομεν σημεῖα A καὶ A' , οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $KA = \alpha$ καὶ $KA' = \alpha'$ καὶ ἐπὶ τῆς $K\chi$ σημεῖα B καὶ B' οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $KB = \beta$ καὶ $KB' = \beta'$. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha > \alpha' \Rightarrow KA > KA'$, ἔπεται ὅτι τὸ A εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν K καὶ A . Ὁμοίως τὸ B' εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν K καὶ B .

Ἡ τοιαύτη διάταξις τῶν σημείων ἐπὶ τῆς εὐθείας xx' , ἐξασφαλίζει τόσον τὰ A, B ὅσον καὶ τὰ A', B' ἐκατέρωθεν τοῦ K , τὰ δὲ A καὶ B , ἐκατέρωθεν τῶν A' καὶ B' ἀντιστοιχῶς. Τότε θὰ εἶναι : $AB > AB' \wedge AB' > A'B' \Rightarrow AB > A'B'$ (1) (μεταβατικὴ ιδιότης). Ἀλλὰ $AB = AK + KB = \alpha + \beta$ καὶ $A'B' = A'K + KB' = \alpha' + \beta'$. Τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται : $\alpha + \beta > \alpha' + \beta'$.

iii) Ἐὰν α, β, γ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα μὲ $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$, ἤτοι δυνάμεθα εἰς τὰ μέλη μιᾶς ἀνισότητος νὰ προσθέσωμεν τὸ αὐτὸ εὐθύγραμμον τμήμα.

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ εὐθείας xx' λαμβάνομεν σημεῖον K (σχ. 18). Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Kx λαμβάνομεν σημεία A καὶ B οὕτως, ὥστε $KA = \alpha$ καὶ $KB = \beta$. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha > \beta \Rightarrow KA > KB$ καὶ ἐπομένως τὸ σημεῖον B εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν K καὶ A . Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Kx' λαμβάνομεν σημεῖον Γ οὕτως ὥστε $K\Gamma = \gamma$. Ἡ τοιαύτη διάταξις τῶν σημείων ἐπὶ τῆς εὐθείας $x'x$, ἐξασφαλίζει τὸ K ἐνδιάμεσον τῶν Γ καὶ B , ὡς καὶ τὸ B ἐνδιάμεσον τῶν Γ καὶ A . Ἀρα θὰ εἶναι :

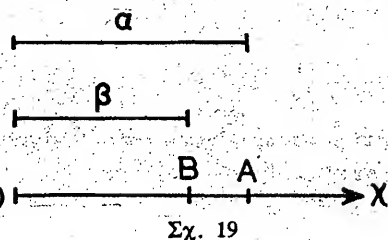


Σχ. 18

$\Gamma A > \Gamma B$ (2). Ἀλλὰ $\Gamma A = \Gamma K + KA = \gamma + \alpha$ καὶ $\Gamma B = \Gamma K + KB = \gamma + \beta$. Τότε ἡ σχέσις (2) γράφεται $\gamma + \alpha > \gamma + \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

29. Διαφορά εὐθυγράμμων τμημάτων. Ὡς θεωρήσωμεν δύο ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα α καὶ β μὲ $\alpha > \beta$.

Ἐπὶ ἡμιευθείας Ox (σχ. 19) λαμβάνομεν $OA = \alpha$ καὶ $OB = \beta$. Τὸ τμήμα AB (ἢ καὶ κάθε ἴσον πρὸς αὐτὸ) καλοῦμεν **διαφορὰν** τῶν τμημάτων α καὶ β καὶ συμβολίζομεν $OA - OB = AB$ ἢ $\alpha - \beta = AB \Leftrightarrow \alpha = \beta + AB$.



Σχ. 19

Ἡ διαδικασία, μέσω τῆς ὁποίας δοθέντων δύο εὐθυγράμμων τμημάτων εὐρίσκομεν τὴν διαφορὰν των, καλεῖται **πρῶξις τῆς ἀφαιρέσεως** ἢ ἀπλῶς **ἀφαίρεσις**.

Ἐὰν τὰ τμήματα α καὶ β ᾖσαν ἴσα, ἡ διαφορὰ των θὰ ᾖ τὸ μηδενικὸν εὐθύγραμμον τμήμα, ἤτοι ἐὰν $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha - \beta = 0$.

Παρατήρησις. Ἐὰν δύο τμήματα α καὶ β ἔχουν ἄθροισμα γ , ἤτοι $\alpha + \beta = \gamma$ (σχ. 20), ἀπὸ τὸν ὅρισμὸν τῆς διαφορᾶς ἐπεταί ὅτι τὸ β εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν γ καὶ α , ὡς ἐπίσης τὸ α εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν γ καὶ β . Ἀρα ἀπὸ τὴν σχέσιν $\alpha + \beta = \gamma$ ἐπονται αἱ σχέσεις $\beta = \gamma - \alpha$ καὶ $\alpha = \gamma - \beta$.



Σχ. 20

30. Γινόμενον εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ φυσικὸν ἀριθμόν.

Ἐστω εὐθύγραμμον τμήμα AB. Καλεῖται γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν φυσικὸν ἀριθμόν ν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AN (σχ. 21), τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ τὴν



Σχ. 21

πρόσθεσιν ν εὐθυγράμμων τμημάτων ἴσων πρὸς τὸ AB. Τότε γράφομεν

$$AN = \nu \cdot AB$$

31. Πηλίκον εὐθυγράμμου τμήματος διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐστω εὐθύγραμμον τμήμα AN. Καλεῖται πηλίκον αὐτοῦ διὰ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB (σχ. 21) διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἡ σχέση $AN = \nu \cdot AB$. Τότε γράφομεν

$$AB = \frac{AN}{\nu}$$

(βλέπε καὶ § 227 διὰ τὴν ὑπαρξιν τοῦ πηλίκου εὐθυγράμμου τμήματος διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ).

32. Γινόμενον εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ ρητόν. Ἐστω εὐθύ-

γραμμον τμήμα AB καὶ $\frac{\mu}{\nu}$ ρητὸς ἀριθμός. Καλοῦμεν γινόμενον τοῦ AB ἐπὶ τὸν

ρητόν $\frac{\mu}{\nu}$ ἓνα τμήμα AΓ, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἂν τὸ AB πολλαπλασιάσωμεν

ἐπὶ μ καὶ ἓν συνεχεῖα τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ ν . Τότε γράφομεν

$$A\Gamma = \frac{\mu}{\nu} \cdot AB.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A.

1. Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ. Ἄν εἶναι $A\Gamma = B\Delta$, δείξατε ὅτι θὰ εἶναι καὶ $AB = \Gamma\Delta$.

2. Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ σημεῖα A, B, Γ. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος BΓ, δείξατε ὅτι

$$A\Delta = \frac{A\Gamma + AB}{2} \quad \text{καὶ} \quad \Delta\Gamma = \frac{A\Gamma - AB}{2}.$$

3. Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ. Δείξατε ὅτι $A\Gamma + B\Delta = A\Delta + B\Gamma$.

4. Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ σημεῖα A, B, Γ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶ-

ναί $AB = 2\alpha$ καὶ $BF = 2\beta$. Ἄν Δ , E καὶ Z εἶναι ἀντιστοίχως τὰ μέσα τῶν τμημάτων AB , BF , καὶ AG , νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τμήματα AE καὶ AZ ἔχουν τὸ αὐτὸ μέσον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου τοῦ τμήματος AZ ἀπὸ τὸ Γ .

5. Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ . Ἄν εἶναι M τὸ μέσον τοῦ τμήματος AB καὶ N τὸ μέσον τοῦ $\Gamma\Delta$ δείξατε ὅτι

$$MN = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2}$$

B'.

6. Ἐάν τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας καὶ εἰς τρόπον, ὥστε τὰ τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$ νὰ ἔχουν κοινὸν μέσον, τότε θὰ εἶναι $A\Gamma = B\Delta$. Ἐξετάσατε ἐάν ἀληθεύῃ τὸ ἀντίστροφον.

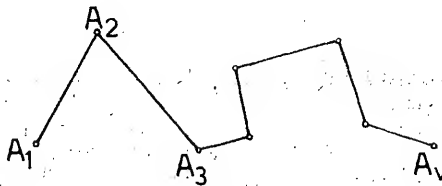
7. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι 6 διακεκριμένα σημεῖα μὴ κείμενα ἀνὰ τρία ἀπ' εὐθείας, ὀρίζουν 15 εὐθύγραμμα τμήματα.

8. Πόσα εὐθύγραμμα τμήματα ὀρίζονται ἀπὸ n τὸ πλῆθος διακεκριμένα σημεῖα μὴ κείμενα ἀνὰ τρία ἐπὶ εὐθείας; Ἐφαρμογὴ διὰ $n=20$.

9. Πόσα σημεῖα ὀρίζονται ἀπὸ n τὸ πλῆθος εὐθείας τεμνομένης ἀνὰ δύο καὶ μὴ διερχομένης ἀνὰ τρεῖς διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου;

ΠΕΡΙ ΓΡΑΜΜΩΝ

33. **Τεθλασμένη γραμμή.** Ἄς θεωρήσωμεν n διακεκριμένα σημεῖα A_1, A_2, \dots, A_n μὴ κείμενα ὅλα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (σχ. 22). Θεωροῦμεν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$. Ἡ οὕτω κατασκευασθεῖσα γραμμὴ καλεῖται **τεθλασμένη γραμμὴ ἢ πολυγωνικὴ γραμμὴ**. Τὰ σημεῖα A_1, A_2, \dots, A_n καλοῦνται **κορυφαὶ** αὐτῆς, καὶ τὰ τμήματα $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ **πλευραὶ** αὐτῆς.



Σχ. 22

34. **Μήκος τεθλασμένης γραμμῆς** $A_1A_2A_3 \dots A_n$ καλεῖται τὸ **μῆκος** εὐθυγράμμου τμήματος ἴσου πρὸς τὸ ἄθροισμα

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n$$

35. **Καμπύλη γραμμή.** Μία γραμμή (Γ) καλείται καμπύλη, όταν οὐδέν τμήμα αὐτῆς εἶναι εὐθύγραμμον (σχ. 23). Τότε κάθε τμήμα της καλεῖται καμπύλον. Ἐν οἰονδήποτε



Σχ. 23

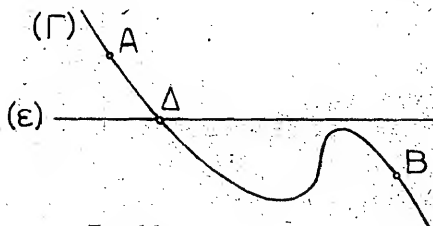


Σχ. 24

τμήμα μιᾶς καμπύλης με ἄκρα σημεία A καὶ B καλεῖται τόξον αὐτῆς καὶ συμβολίζεται με \widehat{AB} .

36. **Μικτή γραμμή.** Μία γραμμή (Γ) καλεῖται μικτή, όταν αὐτὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθύγραμμου καὶ ἀπὸ καμπύλου τμήματα (σχ. 24).

37. **Ἀξίωμα.** Ἐστώσαν ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) εὐθεῖα (ϵ) καὶ δύο σημεία A καὶ B ἐκατέρωθεν αὐτῆς (σχ. 25). Πᾶσα γραμμή (Γ) τοῦ ἐπιπέδου (Π) διερχομένη διὰ τῶν A καὶ B ἔχει ἓν τοῦλάχιστον κοινὸν σημεῖον Δ μετὰ τῆς εὐθείας (ϵ) .



Σχ. 25

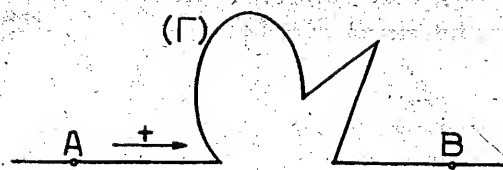
38. **Ἐπίπεδος καὶ στρεβλὴ γραμμή.** Μία γραμμή καλεῖται ἐπίπεδος τότε καὶ μόνον τότε, όταν ὅλα τὰ σημεία της κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐὰν τοῦτο δὲν συμβαίνει, τότε ἡ γραμμή καλεῖται στρεβλή.

Ὡς παράδειγμα στρεβλῆς γραμμῆς ἀναφέρομεν σπειροειδὲς ἐλατήριο, νοούμενον ὡς γραμμή.

39. **Προσανατολισμένη γραμμή.** Ἐστω μία γραμμή (Γ) καὶ A καὶ B δύο σημεία της (σχ. 26).

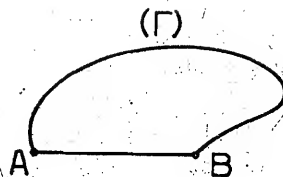
Ἡ γραμμή αὐτὴ δύναται νὰ διαγραφῇ ὑπὸ κινητοῦ σημείου ἄνευ παλινδρομήσεως κατὰ δύο διαφόρους τρόπους, ἥτοι ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B ἢ ἐκ τοῦ B πρὸς τὸ A. Πρὸς διαφοροποίησιν τῶν δύο τούτων τρόπων διαγραφῆς της, τὸν ἓνα ἐξ αὐτῶν, ἔστω τὸν ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B καλοῦμεν **θετικὴν φοράν διαγραφῆς**. Τότε ἡ φορὰ ἐκ τοῦ B πρὸς τὸ A θὰ λέγεται **ἀρνητικὴ**. Ἡ ἐκλογὴ τῆς θετικῆς φορᾶς διαγραφῆς εἶναι αὐθαίρετος.

Μία γραμμή, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῇ ἡ θετικὴ φορὰ διαγραφῆς της, καλεῖται **προσανατολισμένη ἢ προσημιάσμένη γραμμή**.



Σχ. 26

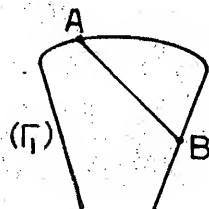
40. **Ἀξίωμα.** Ἄν A καὶ B εἶναι δύο σημεία, τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB ποὺ ὁρίζουν, ἔχει μῆκος μικρότερον τοῦ μήκους πάσης ἄλλης γραμμῆς (Γ) μετὰ τὰ αὐτὰ ἄκρα A καὶ B (σχ. 27).



Σχ. 27

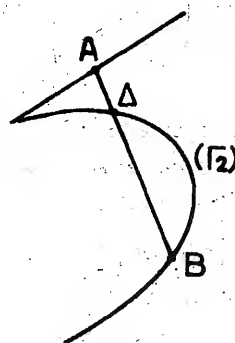
41. **Ἐπίπεδα σχήματα.** Ἐν σχῆμα (Σ) καλεῖται ἐπίπεδον σχῆμα, ἐὰν ὅλα τὰ σημεία αὐτοῦ εὑρίσκωνται ἐπὶ ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (Π) .

42. **Κυρτή και μη κυρτή γραμμή.** Θεωροῦμεν μίαν ἐπίπεδον γραμμήν (Γ_1) (σχ. 28). Ἡ γραμμή αὕτη, θὰ λεγεται κυρτή γραμμή, τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε ζευγὸς σημείων τῆς A καὶ B , τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχει μετὰ τῆς (Γ_1) (ἐκτὸς τῶν A καὶ B), ἢ κεῖται ἐξ



Σχ. 28

ὁλοκλήρου ἐπὶ τῆς (Γ_1) , ἐὰν τὰ A καὶ B ληφθοῦν ἐπὶ εὐθυγράμμου τινὸς τμήματος τῆς (Γ_1) .

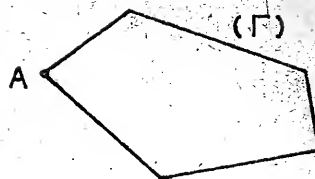


Σχ. 29

Ἡ ἐπίπεδος γραμμή (Γ_2) θὰ λέγεται **μη κυρτή** γραμμή (σχ. 29), ὅταν δὲν εἶναι κυρτή, δηλαδὴ ὅταν ἐπ' αὐτῆς ὑπάρχη ἐν τοῦλάχιστον ζευγὸς σημείων A καὶ B τοιοῦτον, ὥστε τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB νὰ ἔχη ἐν τοῦλάχιστον κοινὸν σημεῖον Δ μετὰ τῆς (Γ_2) (διάφορον τῶν A καὶ B).

43. **Κλειστή γραμμή.** Μία γραμμή (Γ) (ὄχι ἀπέραντος) καλεῖται

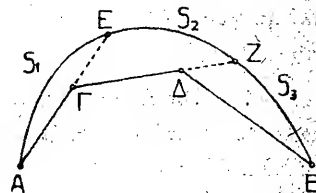
κλειστή γραμμή (σχ. 30), όταν άρχομένη εκ τινος σημείου A, περατοῦται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον A (κλείνει).



Σχ. 30

44. Θεώρημα. Τὸ μήκος κάθε κυρτῆς τεθλασμένης γραμμῆς με ἄκρα τὰ σημεία A καὶ B, εἶναι μικρότερον τοῦ μήκους κάθε ἄλλης γραμμῆς, ἡ ὁποία τὴν περιβάλλει καὶ ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν ἡ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ AΓΔB καὶ S τὸ μήκος τυχούσης ἄλλης γραμμῆς με ἄκρα τὰ A καὶ B, ἡ ὁποία περιβάλλει τὴν τεθλασμένην (σχ. 31). Προεκτείνομεν τὰ τμήματα AΓ καὶ ΓΔ ἕως ὅτου τμήσουν τὴν S εἰς τὰ E καὶ Z ἀντιστοίχως. Ἐὰν καλέσωμεν



Σχ. 31

$\widehat{AE} = S_1$, $\widehat{EZ} = S_2$ καὶ $\widehat{ZB} = S_3$
τὰ τρία τμήματα τῆς γραμμῆς S εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη ἐχωρίσθη, τότε θὰ ἔχωμεν (§ 40).

$$\begin{aligned} AE < \widehat{AE} &\Rightarrow A\Gamma + \Gamma E < S_1 \\ \Gamma Z < \Gamma E + \widehat{EZ} &\Rightarrow \Gamma\Delta + \Delta Z < \Gamma E + S_2 \\ \Delta B < \Delta Z + \widehat{ZB} &\Rightarrow \Delta B < \Delta Z + S_3 \end{aligned}$$

Διὰ προσθέσεως τῶν δευτέρων σχέσεων κατὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$A\Gamma + \Gamma E + \Gamma\Delta + \Delta Z + \Delta B < S_1 + \Gamma E + S_2 + \Delta Z + S_3$$

$$\Rightarrow A\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta B < S_1 + S_2 + S_3$$

$$\Rightarrow A\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta B < S$$

45. Ἐφαρμογή. Δίδεται κλειστὴ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ ABΓΔA καὶ τρία σημεία E, Z, H περικλειόμενα ἐντὸς αὐτῆς. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$EH + HZ + ZE < AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A.$$

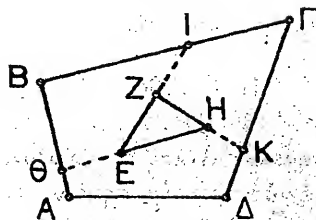
Ἀπόδειξις. Αἱ ἡμιευθεῖαι EZ, ZH καὶ HE τέμνουν τὴν γραμμὴν ABΓΔA εἰς τὰ σημεία I, K καὶ Θ ἀντιστοίχως (σχ. 32). Τότε (§ 40) ἔχομεν :

$$H\Theta < \Theta A + A\Delta + \Delta K + KH \quad \eta$$

$$(1) \quad EH + E\Theta < \Theta A + A\Delta + \Delta K + KH, \\ ZK < ZI + I\Gamma + \Gamma K \quad \eta$$

$$(2) \quad HZ + HK < ZI + I\Gamma + \Gamma K \quad \text{καὶ} \\ EI < E\Theta + \Theta B + BI \quad \eta$$

$$(3) \quad ZE + ZI < E\Theta + \Theta B + BI$$



Σχ. 32

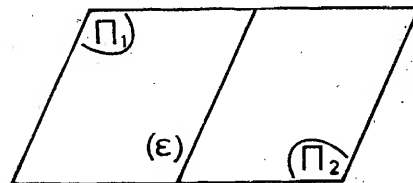
Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (1), (2) καὶ (3) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν :
 $EH + HZ + ZE + EO + HK + ZI < (OA + OB) + (BI + IF) + (KA + KG) + AD + ZI + EO + KH \Leftrightarrow$
 $EH + HZ + ZE < AB + BG + ΓΔ + ΔΑ.$

46. Ἡμιεπίπεδον. Ἐστω ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθεῖα (ϵ) αὐτοῦ. Διὰ τῆς (ϵ) τὸ ἐπίπεδον (Π) διαιρεῖται εἰς δύο μέρη (Π_1) καὶ (Π_2) , (σχ. 33), διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι :

$$(\Pi_1) \cup (\Pi_2) = (\Pi) - (\epsilon)$$

$$\text{καὶ } (\Pi_1) \cap (\Pi_2) = \emptyset$$

Τὰ (Π_1) καὶ (Π_2) καλοῦνται ἡμι-επίπεδα.



Σχ. 33

Κατὰ τὸν ὅρισμόν ἡ εὐθεῖα (ϵ) , ἡ ὁποῖα καλεῖται καὶ ἀρχικὴ εὐθεῖα τῶν ἡμιεπιπέδων, δὲν ἀνήκει εἰς οὐδὲν ἐξ αὐτῶν. Τότε δυνάμεθα ταῦτα νὰ τὰ λέγωμεν καὶ **ἀνοικτὰ** ἡμιεπίπεδα.

Ἐὰν ὁμῶς θέλωμεν νὰ συμπεριλάβωμεν καὶ τὴν (ϵ) εἰς τὰ ἡμιεπίπεδα, τότε ταῦτα θὰ λέγωνται **κλειστὰ** καὶ θὰ εἶναι :

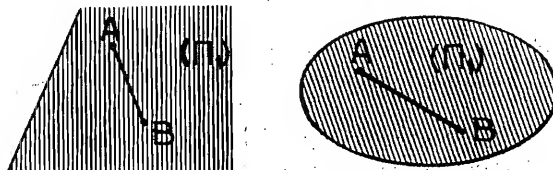
$$(\Pi_1) \cup (\Pi_2) = (\Pi) \quad \text{καὶ}$$

$$(\Pi_1) \cap (\Pi_2) = (\epsilon)$$

47. Ἐπίπεδα τμήματα. Διακρίνομεν δύο εἶδη ἐπιπέδων τμημάτων, κυρτὰ καὶ μὴ κυρτὰ.

Κυρτὸν ἐπίπεδον τμήμα καλεῖται κάθε ὑποσύνολον (Π_1) ἐπιπέδου (Π) , διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει τὸ ἐξῆς (σχ. 34) :

Διὰ κάθε ζευγὸς σημείων $A, B \in (\Pi_1)$ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB ἀνήκει εἰς τὸ (Π_1) , ἥτοι $AB \in (\Pi_1)$

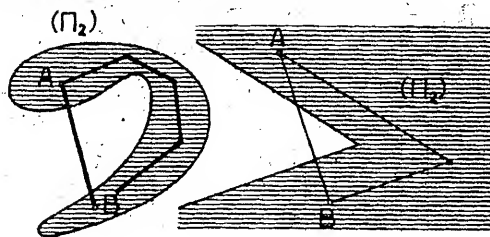


Σχ. 34

Μὴ κυρτὸν ἐπίπεδον τμήμα καλεῖται κάθε ὑποσύνολον (Π_2) ἐπιπέδου (Π) , διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει τὸ ἐξῆς (σχ. 35) :

Ὑπάρχει ἓν τοῦλάχιστον ζευγὸς σημείων $A, B \in (\Pi_2)$ τοιοῦτον, ὥστε τὸ

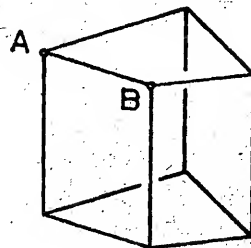
εὐθύγραμμον τμήμα AB νὰ μὴν ἀνήκῃ ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὸ (Π_2) , ἀλλὰ ὑπάρχει γραμμὴ με ἄκρα τὰ A καὶ B ἀνήκουσα εἰς τὸ (Π_2) .



Σχ. 35

48. Εἶδη ἐπιφανειῶν. Ἡ ἔννοια τῆς ἐπιφανείας γενικῶς δὲν ὀρίζεται, θεωρουμένη ὡς πρωταρχικὴ ἔννοια. Πάντως τὰ διάφορα εἶδη ἐπιφανειῶν δύνανται νὰ περιγραφοῦν περιφραστικῶς εἴτε καὶ διὰ μαθηματικῶν σχέσεων εἰς ἐπαρκῆ ἕως πλήρη βαθμὸν ἀναγνωρίσεως αὐτῶν. Θὰ ἀρκεσθῶμεν εἰς τὴν περιφραστικὴν μόνον περιγραφὴν τῶν κυριωτέρων εἰδῶν ἐπιφανειῶν τὰ ὅποια, ἐκτὸς τῆς ἤδη γνωστῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας, εἶναι :

i) **Τεθλασμένη ἢ πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια.** Ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα τμήματα (σχ. 36) ὅχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὅποια καλοῦνται ἔδραι τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας. Ἡ τομὴ δύο ἐδρῶν εἶναι εὐθεῖα ἢ τμήμα εὐθείας (βλ. εἰς σχῆμα τὴν AB) καὶ καλεῖται **ἄκμῃ** τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας καὶ ἡ τομὴ τριῶν τοῦλάχιστον ἐδρῶν (ἂν ὑπάρχῃ) εἶναι σημεῖον (βλ. εἰς σχῆμα τὸ B), τὸ ὁποῖον καλεῖται **κορυφὴ** τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας.

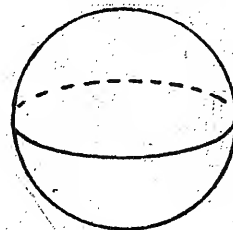


Σχ. 36

ii) **Καμπύλη ἐπιφάνεια.** Ἐπ' αὐτῆς οὐδὲν ἐπίπεδον τμήμα ὑπάρχει. Καμπύλη ἐπιφάνεια εἶναι ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια (σχ. 37) ἢ ὁποῖα ἄς θεωρηθῇ γνωστὴ, ὡς παράδειγμα, ἀπὸ τὴν προηγουμένην τάξιν.

iii) **Μικτὴ ἢ τυχαία ἐπιφάνεια.** Αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα καὶ καμπύλα τμήματα.

Αἱ ἐπιφάνεια γενικῶς διακρίνονται εἰς κυρτὰς καὶ μὴ, κυρτὰς, ὀριζομένων τῶν ἔννοιων τούτων κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὰς ἀντιστοιχοῦς ἔννοιās διὰ τὰς γραμμὰς (§ 42).



Σχ. 37

49. Ἐπιπεδομετρία καὶ Στερεομετρία. Ἡ γεωμετρία, ἐξετάζουσα τὰ σχήματα τῶν στερεῶν, τέμνει κατ' ἀρχὰς αὐτὰ δι' ἐπιπέδων καὶ ἐξετάζει τὰς τομὰς. Εἰς τὸ πρῶτον (καὶ μεγαλύτερον) μέρος της, ὅπου ἐξετάζει τὰς

επίπεδους αὐτὰς τομάς, ἡ γεωμετρία καλεῖται **Ἐπιπεδομετρία**. Εἰς τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἡ γεωμετρίας, ἐξετάζει τὰ σχήματα τῶν στερεῶν ἐν ὅλῳ καὶ καλεῖται **Στερεομετρία**.

Εἰς τὸ πρῶτον μέρος τῆς γεωμετρίας, δηλαδή εἰς τὴν ἐπιπεδομετρίαν, ὅταν θὰ λέγωμεν «σχῆμα» θὰ ἐννοοῦμεν ἐπίπεδον σχῆμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β'.

10. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας καὶ φέρομεν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ. Ἐὰν Ο εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ σχήματος ΑΒΓ, δείξατε ὅτι :

$$\frac{ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ}{2} < ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ < ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ.$$

11. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ κλειστῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΒΓΑ, λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Α', Β', Γ' ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι

$$Α'Β' + Β'Γ' + Γ'Α' < ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ.$$

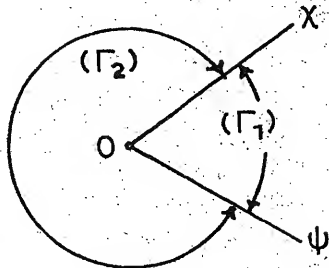
12. Δίδεται ἡ κλειστὴ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔΑ καὶ φέρομεν τὰ τμήματα ΑΓ καὶ ΒΔ. Δείξατε ὅτι

$$\frac{ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ}{2} < ΑΓ + ΒΔ < ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ.$$

13. Νὰ διατυπωθοῦν οἱ ὁρισμοὶ κυρτῆς καὶ μὴ κυρτῆς ἐπιφανείας ἀντίστοιχοι πρὸς ἐκείνους τῆς κυρτῆς καὶ μὴ κυρτῆς γραμμῆς. Νὰ ἀναφερθῇ ἀνὰ ἓν παράδειγμα ἀπὸ τὰς ἐπιφανείας γνωστῶν στερεῶν.

ΓΩΝΙΑΙ

50. **Ὁρισμός.** Δύο ἡμιευθεῖαι Οχ καὶ Οψ μὲ κοινὴν ἀρχὴν σημεῖον Ο (σχ. 38), διαιροῦν τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο ἐπίπεδα τμήματα (Γ₁) καὶ (Γ₂), ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι κυρτὸν καὶ τὸ ἄλλο μὴ κυρτὸν. Ἐκαστον ἐκ τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων τμημάτων (Γ₁) καὶ (Γ₂) καλεῖται γωνία καὶ μάλιστα ἡ μία κυρτὴ καὶ ἡ ἄλλη μὴ κυρτὴ. Ἄρα γωνία καλεῖται ἕκαστον ἐκ τῶν δύο ἐπιπέδων τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα δύο ἡμιευθεῖαι μὲ κοινὴν ἀρχὴν διαιροῦν τὸ ἐπίπεδόν των.

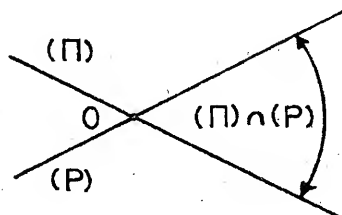


Σχ. 38

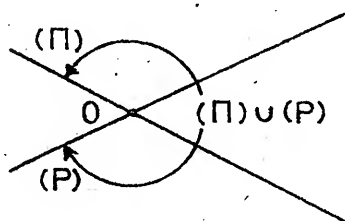
Αἱ ἡμιευθεῖαι Οχ καὶ Οψ καλοῦνται **πλευραὶ** ἐκάστης γωνίας καὶ ἡ κοινὴ ἀρχὴ Ο τῶν πλευρῶν καλεῖται **κόρυφή** ἐκάστης γωνίας ἐκ τῶν (Γ₁) καὶ (Γ₂), συμβολίζονται δὲ χΟψ καὶ ψΟχ ἀντιστοίχως.

Ίσοδύναμοι πρὸς τὸν προηγούμενον ὅρισμόν εἶναι καὶ οἱ ἀκόλουθοι δύο ὅρισμοί :

Κυρτή γωνία καλεῖται ἡ τομή δύο ἡμιεπιπέδων (Π) καὶ (P) τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ ἀρχικαὶ εὐθεῖαι τέμνονται εἰς σημεῖον O (σχ. 39).



Σχ. 39

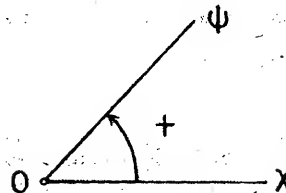


Σχ. 40

Μη κυρτή γωνία καλεῖται ἡ ἔνωση δύο ἡμιεπιπέδων (Π) καὶ (P) τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ ἀρχικαὶ εὐθεῖαι τέμνονται εἰς σημεῖον O (σχ. 40).

51. Προσανατολισμός γωνίας — Ἐπέκτασις τῆς ἐννοίας τῆς γωνίας. Σκόπιμον εἶναι ὠρισμένας φοράς νὰ θεωρήσωμεν τὴν γωνίαν, ὡς περιοχὴν τοῦ ἐπιπέδου, διαγραφομένην ὑπὸ ἡμιευθείας Ox , στρεφομένης εἰς τὸ ἐπίπεδον περὶ τὴν ἀρχὴν O κατὰ ὠρισμένην φοράν περιστροφῆς (σχ. 41). Κατὰ ταῦτα, μία γωνία θὰ θεωρεῖται πλήρως καθωρισμένη, ὅταν εἶναι γνωστὰ τὰ ἀκόλουθα τέσσαρα στοιχεῖα τῆς :

- i) Ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ τῆς Ox .
- ii) Ἡ τελικὴ πλευρὰ τῆς Oy .
- iii) Ἡ φορά διαγραφῆς τῆς, ἥτοι ἡ φορά κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ τῆς Ox , στρεφομένη περὶ τὴν ἀρχὴν O , λαμβάνει τὴν θέσιν Oy .



Σχ. 41

- iv) Ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς k , ὁ ὅποιος δεικνύει πόσας πλήρεις περιστροφὰς ἐξέτελεσεν ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ Ox , πρὶν αὕτη λάβῃ τὴν τελικὴν θέσιν τῆς Oy .

Μία γωνία μὲ τὰ προηγούμενα τέσσαρα στοιχεῖα, καλεῖται **προσανατολισμένη γωνία**.

Εἶναι προφανές ὅτι δύο μόνον εἶναι αἱ δυναταὶ φοράι περιστροφῆς τῆς ἀρχικῆς πλευρᾶς Ox περὶ τὴν ἀρχὴν O . Πρὸς διαφοροποίησιν αὐτῶν τῶν δύο φορῶν περιστροφῆς, τὴν μίαν, αὐθαιρέτως ἐκλεγείσαν, καλοῦμεν **θετικὴν** καὶ τὴν ἄλλην (ἀντίθετον τῆς πρώτης) **ἀρνητικὴν** φοράν περιστροφῆς. Κατὰ συνήθειαν, ὡς θετικὴν φοράν περιστροφῆς θεωροῦμεν τὴν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὥρολογίου (σχ. 41).

Προκειμένου διὰ δύο ἢ περισσοτέρας γωνίας αὐτὸ πού μᾶς ἐνδιαφέρει

κυρίως, δὲν εἶναι τὸ ἂν εἶναι θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμένοι, ἀλλὰ τὸ ἂν αὐταὶ εἶναι ὁμοίοστροφοι ἢ ἐτερόστροφοι, ἥτοι ἂν εἶναι τῆς αὐτῆς ἢ ἀντιθέτου φοράς. Εἰς τὴν συμβολικὴν ἀναγραφὴν των, προτάσσομεν τὸ σύμβολον \angle ἐνῶ εἰς τὴν ἀναγραφὴν τῆς γωνίας προτάσσομεν πάντοτε τὴν ἀρχικὴν πλευρὰν π.χ. $\angle XAY$ σημαίνει προσανατολισμένη γωνία με ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν Ax . Χρησιμοποιεῖται καὶ ὁ συμβολισμὸς $(\widehat{Ax}, \widehat{Ay})$ διὰ διατεταγμένου ζεύγους ἡμιευθειῶν, ὅπου ἡ Ax εἶναι ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ καὶ ἡ Ay ἡ τελικὴ πλευρὰ τῆς γωνίας.

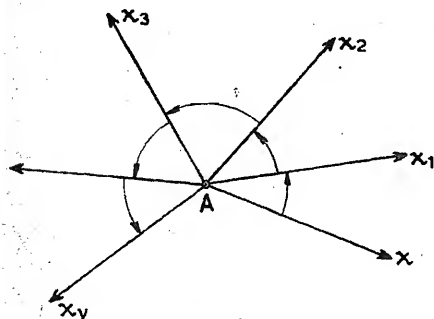
52. Ίσότης εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιών. Δύο γωνίαι καλοῦνται ἴσαι τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν δύνανται νὰ ταυτισθοῦν διὰ μετατοπίσεως τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς ἄλλης.

Ἐπὶ προσανατολισμένων γωνιών πρέπει ἐπὶ πλέον νὰ εἶναι τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ, ἡ ἀρχικὴ δὲ πλευρὰ των νὰ ἔχη ἐκτελέσει τὸ αὐτὸ πλῆθος k πλήρων περιστροφῶν πρὶν λάβῃ τὴν τελικὴν τῆς θέσιν.

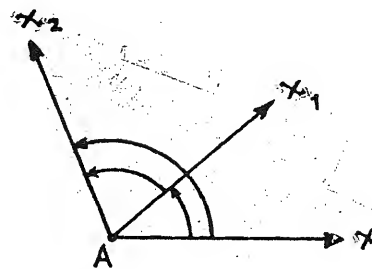
Ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική, ἥτοι ἐὰν (Γ_1) , (Γ_2) , (Γ_3) εἶναι γωνίαι, τότε :

- i) $(\Gamma_1) = (\Gamma_1)$
- ii) $(\Gamma_1) = (\Gamma_2) \Rightarrow (\Gamma_2) = (\Gamma_1)$
- iii) $(\Gamma_1) = (\Gamma_2) \wedge (\Gamma_2) = (\Gamma_3) \Rightarrow (\Gamma_1) = (\Gamma_3)$.

53. Ἐφεξῆς καὶ διαδοχικαὶ γωνίαι. Ἐφεξῆς καλοῦνται δύο γωνίαι $\widehat{xAx_1}$ καὶ $\widehat{x_1Ax_2}$ (σχ. 43), ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ, νοούμεναι προσανατολισμέναι, εἶναι τῆς αὐτῆς φοράς, ἡ τελικὴ δὲ πλευρὰ τῆς πρώτης εἶναι ἀρχικὴ πλευρὰ τῆς δευτέρας.



Σχ. 42



Σχ. 43

Διαδοχικαὶ καλοῦνται n τὸ πλῆθος γωνίαι (σχ. 42), ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν A καὶ, νοούμεναι προσανατολισμέναι, εἶναι τῆς αὐτῆς φοράς, ἡ τελικὴ δὲ πλευρὰ ἐκάστης εἶναι ἀρχικὴ πλευρὰ τῆς ἐπομένης π.χ. αἱ γωνία $\angle xAx_1$, $\angle x_1Ax_2$, ..., $\angle x_{n-1}Ax_n$.

54. *Άθροισμα γωνιών. *Άθροισμα δύο έφεξης γωνιών $\angle xAx_1$ και $\angle x_1Ax_2$ καλεῖται ἡ γωνία $\angle xAx_2$ με ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν ἀρχικὴν πλευρὰν τῆς πρώτης γωνίας καὶ τελικὴν τὴν τελικὴν πλευρὰν τῆς δευτέρας γωνίας (σχ. 43). Συμβολικῶς γράφομεν $\angle xAx_1 + \angle x_1Ax_2 = \angle xAx_2$.

Ἐὰν αἱ γωνίαι δὲν εἶναι έφεξης, δυνάμεθα διὰ μετατοπίσεως νὰ τὰς καταστήσωμεν έφεξης. Ἡ διαδικασία πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἄθροίσματος δύο γωνιών καλεῖται **πρᾶξις τῆς προσθέσεως** ἢ ἀπλῶς **πρόσθεσις** τῶν γωνιών.

Ἀναλόγως ὀρίζεται τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο γωνιών, ἂν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθέσωμεν τὴν τρίτην γωνίαν κ.ο.κ.

Εἰς τὸ σχῆμα 44 ἔχομεν :

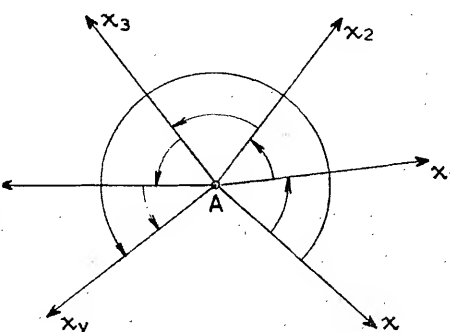
$$\angle xAx_1 + \angle x_1Ax_2 + \dots + \angle x_{n-1}Ax_n = \angle xAx_n.$$

Ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιών εἶναι έσωτερικὴ πρᾶξις, διότι τὸ ἄθροισμα δύο γωνιών εἶναι γωνία καὶ έπομένως τὸ σύνολον τῶν γωνιών εἶναι κλειστὸν ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως. Ἐπὶ πλέον εἶναι ἀντιμεταθετικὴ προσεταιριστικὴ καὶ μονότροπος, ἥτοι έάν (Γ_1) , (Γ_2) , (Γ_3) εἶναι γωνίαι, ισχύουν :

$$i) (\Gamma_1) + (\Gamma_2) = (\Gamma_2) + (\Gamma_1)$$

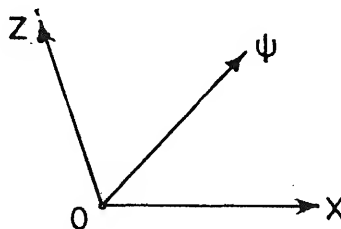
$$ii) [(\Gamma_1) + (\Gamma_2)] + (\Gamma_3) = (\Gamma_1) + [(\Gamma_2) + (\Gamma_3)].$$

Αἱ ἀποδείξεις τῶν ιδιοτήτων τούτων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιστοιχοῦς ἀποδείξεις διὰ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα καὶ παραλείπονται.



Σχ. 44

Παρατήρησις. Εἰς τὴν γεωμετρίαν χρησιμοποιοῦμεν κατὰ κανόνα γωνίας κυρτὰς καὶ μὴ προσανατολισμένας. Κατὰ ἀπλούστερον ὅρισμόν, τὸ ἄθροισμα δύο τοιούτων έφεξης γωνιών \widehat{xOy} καὶ \widehat{yOz} (σχ. 45), εἶναι ἡ γωνία \widehat{xOz} με τὴν αὐτὴν κορυφὴν O, πλευρὰς τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς OX καὶ Oz τῶν γωνιών καὶ περιέχουσα τὴν κοινὴν πλευρὰν Oy αὐτῶν. Ἀναλόγως ὀρίζεται καὶ τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο γωνιών.



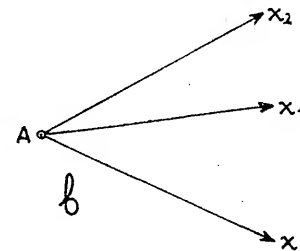
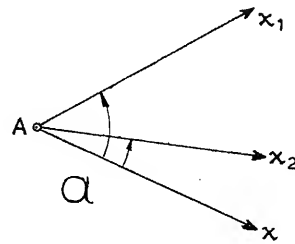
Σχ. 45

55. Διαφορὰ δύο γωνιών. Ἀς θεωρήσωμεν δύο προσανατολισμένας γωνίας $\angle xAx_1$ καὶ $\angle xAx_2$ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ, με κοινὴν κορυφὴν A καὶ κοινὴν ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν Ax (σχ. 46 α, β). Διαφορὰ τῆς $\angle xAx_2$ ἀπὸ τῆς $\angle xAx_1$, συμβολιζομένη με $\angle xAx_1 - \angle xAx_2$, καλεῖται ἡ προσανατολισμένη γωνία $\angle x_2Ax_1$, ἥτοι εἶναι $\angle xAx_1 - \angle xAx_2 =$

$\angle x_2Ax_1$, τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν $\angle xAx_1 = \angle xAx_2 + \angle x_2Ax_1$.

Ἡ διαδικασία πρὸς εὑρεσιν τῆς διαφορᾶς δύο γωνιῶν καλεῖται **πρᾶξις τῆς ἀφαιρέσεως ἢ ἀπλῶς ἀφαιρέσεις** τῶν δύο γωνιῶν.

Συναφῶς ὀρίζομεν καὶ τὴν σχέσιν τῆς ἀνισότητος (διατάξεως) εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν, ὡς ἀκολούθως: Ἐὰν ἡ διαφορὰ $\angle x_2Ax_1$ τῶν δύο γωνιῶν εἶναι τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ πρὸς ἐκεῖνον τῶν ἀρχικῶν γωνιῶν, ἢ πρώτη ἀπὸ τὰς ἀρχικὰς γωνίας $\angle xAx_1$ καλεῖται **μεγαλύτερα** (ἀπολύτως) τῆς δευτέρας γωνίας $\angle xAx_2$ (σχ. 46α) καὶ συμβολίζομεν $\widehat{xAx_1} > \widehat{xAx_2}$. Ἐὰν ἡ διαφορὰ $\angle x_2Ax_1$ εἶναι ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ πρὸς ἐκεῖνον τῶν ἀρχικῶν γωνιῶν, ἢ πρώτη ἀπὸ τὰς ἀρχικὰς γωνίας $\angle xAx_1$ καλεῖται **μικροτέρα** (ἀπολύτως) τῆς δευτέρας γωνίας $\angle xAx_2$ (σχ. 46β) καὶ συμβολίζομεν $\widehat{xAx_1} < \widehat{xAx_2}$. (Αἱ προηγούμεναι σχέσεις ἀνισότητος εἶναι σχέσεις ἀπόλυτοι, ἤτοι ἀπηλλαγμένοι προσανατολισμοῦ).



Σχ. 46

Ἐὰν (Γ_1) , (Γ_2) , (Γ_3) , (Γ_4) εἶναι γωνίαι, διατυπώνομεν τὰς ἀκολουθοῦσας ιδιότητας τῆς ἀνισότητος εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν :

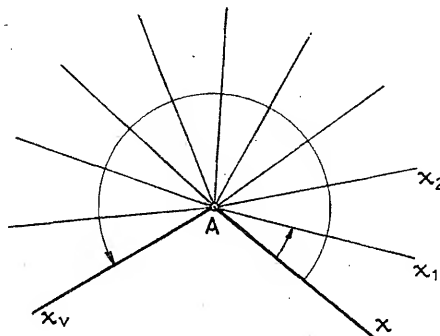
i) Ἡ σχέσηις τῆς ἀνισότητος εἶναι μεταβατική, ἤτοι :

$$(\Gamma_1) > (\Gamma_2) \wedge (\Gamma_2) > (\Gamma_3) \Rightarrow (\Gamma_1) > (\Gamma_3).$$

ii) $(\Gamma_1) > (\Gamma_2) \wedge (\Gamma_3) > (\Gamma_4) \Rightarrow (\Gamma_1) + (\Gamma_3) > (\Gamma_2) + (\Gamma_4)$ δηλαδή δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν κατὰ μέλη ὁμοιοστροφούς ἀνισότητας.

iii) $(\Gamma_1) > (\Gamma_2) \Rightarrow (\Gamma_1) + (\Gamma_3) > (\Gamma_2) + (\Gamma_3)$ δηλαδή δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἀνισότητος γωνιῶν, τὴν αὐτὴν γωνίαν.

Αἱ ἀποδείξεις τῶν ιδιοτήτων τούτων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς ἐκεῖνας τῶν ἀντιστοιχῶν ιδιοτήτων διὰ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα.



Σχ. 47

56. Γινόμενον γωνίας ἐπὶ φυσικὸν ἀριθμὸν. Ἐστω μία γωνία $\angle xAx_1$. Καλεῖται γινόμενον αὐτῆς ἐπὶ τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν n ἡ γωνία $\angle xAx_n$, ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν n γωνιῶν ἴσων πρὸς τὴν $\angle xAx_1$ (σχ. 47).

Τότε γράφομεν : $\angle xAx_v = v \cdot \angle xAx_1$.

57. Πηλίκον γωνίας διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ. Ἐστω ἡ γωνία $\angle xAx_v$. Καλεῖται πηλίκον αὐτῆς διὰ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ v ἡ γωνία $\angle xAx_1$, διὰ τὴν ὅποیان ἰσχύει ἡ σχέσις $\angle xAx_v = v \cdot \angle xAx_1$. Τότε γράφομεν :

$$\angle xAx_1 = \frac{\angle xAx_v}{v}.$$

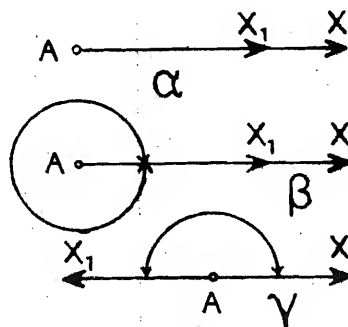
58. Πολλαπλασιασμός γωνίας ἐπὶ ρητόν. Ἐστω γωνία ω καὶ μ/v εἰς ρητὸς ἀριθμός. Γινόμενον τῆς γωνίας ω ἐπὶ τὸν ρητόν μ/v καλεῖται μία γωνία φ , ἡ ὅποια προκύπτει ἐὰν τὴν γωνίαν ω τὴν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον μ καὶ τὸ γινόμενον τὸ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀκεραίου v . Τότε γράφομεν

$$\varphi = \frac{\mu}{v} \omega \quad \eta \quad \varphi = \frac{\mu \cdot \omega}{v}$$

Παρατήρησις. Τὰς γωνίας, δυνάμεθα νὰ τὰς συμβολίζομεν, πρὸς ἀπλούστευσιν, καὶ μὲ πεζὰ (μικρὰ) γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ὡς τὰ ω , φ , σ κλπ.

59. Μηδενικὴ καὶ πλήρης γωνία. Διὰ νὰ ἔχη νόημα καὶ ἡ διαφορὰ δύο ἴσων γωνιῶν, δεχόμεθα τὴν ὑπαρξιν **μηδενικῆς** γωνίας, ἥτοι γωνίας $\hat{A}x_1$ τῆς ὁποίας αἱ δύο πλευραὶ ταυτίζονται (σχ. 48α). Ἡ μηδενικὴ γωνία ἀποτελεῖ τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον διὰ τὴν πράξιν τῆς προσθέσεως εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν, συμβολίζεται μὲ \hat{O} ἢ $\angle 0$ καὶ εἶναι $\hat{A} + \hat{O} = \hat{O} + \hat{A} = \hat{A}$ διὰ κάθε γωνίαν \hat{A} .

Πλήρης γωνία καλεῖται ἡ γωνία $\hat{x}Ax_1$, τῆς ὁποίας ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ ταυτίζεται μὲ τὴν τελικὴν κατόπιν μιᾶς πλήρους περιστροφῆς αὐτῆς περὶ τὴν κορυφὴν τῆς A (σχ. 48β).



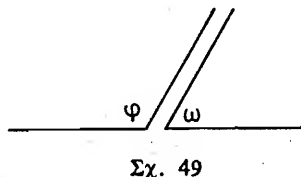
Σχ. 48

60. Πεπλατυσμένη γωνία ἢ εὐθεία γωνία καλεῖται μία κυρτὴ γωνία $\hat{x}Ax_1$, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ εἶναι ἀντίθετοι ἡμιευθεῖαι (σχ. 48γ).

Παρατήρησις. Δύο πεπλατυσμέναι γωνίαι εἶναι ἴσαι, διότι ἡ μία δύναται νὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ἄλλης διὰ μετατοπίσεως. Ἄρα ὅλαι αἱ πεπλατυσμέναι γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἐπομένως ἡ πεπλατυσμένη γωνία διατηρεῖ σταθερὸν μέγεθος.

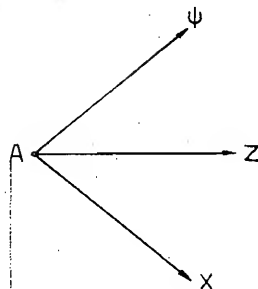
61. Παραπληρωματικαὶ γωνίαι καλοῦνται δύο γωνίαι ω καὶ φ , ὅταν ἔχουν ἄθροισμα μίαν πεπλατυσμένην γωνίαν (σχ. 49).

62. Διχοτόμος γωνίας $\widehat{x\hat{A}y}$ καλεῖται ἡ ἡμιευθεῖα Az με ἀρχὴν τὴν κορυφὴν A , ἐσωτερικὴ τῆς $\widehat{x\hat{A}y}$ καὶ ἡ ὁποία διαιρεῖ τὴν $\widehat{x\hat{A}y}$ εἰς δύο ἄλλας ἴσας γωνίας, ἥτοι $\widehat{x\hat{A}z} = \widehat{z\hat{A}y}$ (σχ. 50).



Σχ. 49

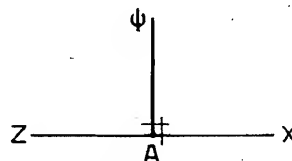
Ἀξίωμα. Μία γωνία ἔχει μίαν καὶ μόνον μίαν διχοτόμον.



Σχ. 50

63. Ὄρθη γωνία. Δύο ἴσαι καὶ παραπληρωματικαὶ γωνίαι $\widehat{x\hat{A}y}$ καὶ $\widehat{y\hat{A}z}$ καλοῦνται ὀρθαί. (σχ. 51). Τότε γράφομεν: $\widehat{x\hat{A}y} = \widehat{y\hat{A}z} = 1^{\circ}$.

Πόρισμα. Ἡ κοινὴ πλευρὰ Ay δύο ἐφεξῆς ὀρθῶν γωνιῶν $\widehat{x\hat{A}y}$ καὶ $\widehat{y\hat{A}z}$ εἶναι διχοτόμος τῆς πεπλατυσμένης γωνίας $\widehat{z\hat{A}x}$.



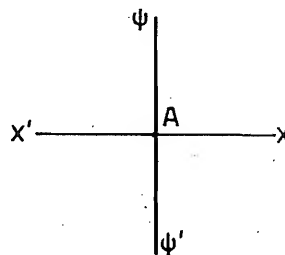
Σχ. 51

64. Θεώρημα. Ἐὰν ἐκ τῶν τεσσάρων κυρτῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι, δύο ἐφεξῆς εἶναι ἴσαι, τότε καὶ αἱ τέσσαρες γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ μάλιστα ἄρθαί, αἱ δὲ εὐθεῖαι λέγονται ὅτι τέμνονται καθέτως.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν αἱ εὐθεῖαι $x\hat{A}x'$ καὶ $y\hat{A}y'$ τεμνόμεναι εἰς τὸ A , διὰ τὰς ὁποίας υποθέτομεν ὅτι εἶναι $\widehat{x\hat{A}y} = \widehat{y\hat{A}x'}$. Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ Ax καὶ Ax' τῶν ὡς ἄνω γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι καὶ παραπληρωματικαί, ἄρα εἶναι ὀρθαί, ἥτοι $\widehat{x\hat{A}y} = \widehat{y\hat{A}x'} = 1^{\circ}$ (σχ. 52).

Ἡ γωνία $x'\hat{A}y'$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας $y\hat{A}x'$, ἄρα εἶναι καὶ αὕτη ὀρθή, δηλαδή $x'\hat{A}y' = 1^{\circ}$.

Ὅμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $y'\hat{A}x = 1^{\circ}$. Αἱ εὐθεῖαι $x\hat{A}x'$ καὶ $y\hat{A}y'$ λέγονται κάθετοι ἢ μία ἐπὶ τὴν ἄλλην.



Σχ. 52

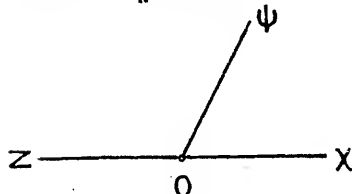
Ἡ καθετότης συμβολίζεται μετὸ σύμβολον \perp . Γράφομεν δηλαδή $xAx' \perp yAy'$.

65. Θεώρημα. Ἐξ ἑνὸς σημείου A εὐθείας zx μία καὶ μόνον μία κάθετος ἄγεται ἐπὶ τὴν zx .

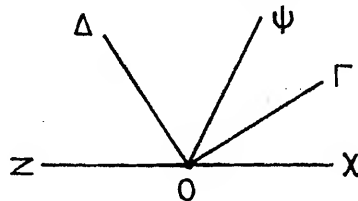
Ἀπόδειξις. Πράγματι, διότι ἡ διχοτόμος μιᾶς πεπλατυσμένης γωνίας εἶναι μία καὶ μόνον μία (σχ. 51), ἡ $Ay \perp zx$.

66. Ἰδιότητες παραπληρωματικῶν γωνιῶν.

i) Αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν, εἶναι ἀντίθετοι ἡμιευθεῖαι.



Σχ. 53



Σχ. 54

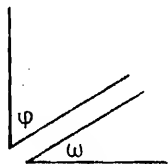
Ἀπόδειξις. Ἀς θεωρήσωμεν δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικὰς γωνίας \widehat{xOy} καὶ \widehat{yOz} (σχ. 53). Ἐπειδὴ ἐξ ὁρισμοῦ τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν, εἶναι $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 2^\circ$ καὶ ἐπειδὴ $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$, ἔπεται ὅτι $\widehat{xOz} = 2^\circ$ ἥτοι αἱ Ox καὶ Oz εἶναι ἀντίθετοι ἡμιευθεῖαι.

ii) Αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι κάθετοι.

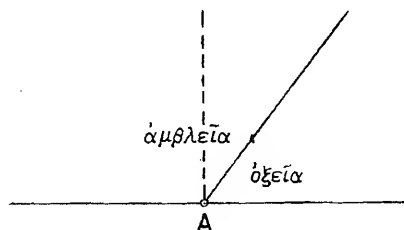
Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν OG καὶ OD αἱ διχοτόμοι τῶν ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν \widehat{xOy} καὶ \widehat{yOz} (σχ. 54). Ἐπειδὴ $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 2^\circ$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{xOy}}{2} + \frac{\widehat{yOz}}{2} = 1^\circ \Rightarrow \widehat{GOy} + \widehat{yOD} = 1^\circ \Rightarrow \widehat{GOD} = 1^\circ.$$

67. Συμπληρωματικαὶ γωνίαι καλοῦνται δύο γωνίαι ω καὶ ϕ , ὅταν ἔχουν ἄθροισμα μίαν ὀρθὴν γωνίαν, ἥτοι $\omega + \phi = 1^\circ$ (σχ. 55).



Σχ. 55



Σχ. 56

68. Πλάγια εὐθεῖαι. Δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι λέγονται πλάγια, ὅταν δὲν εἶναι κάθετοι.

69. Ὀξεῖα καὶ ἀμβλεῖα γωνία. Κάθε γωνία μικροτέρα τῆς ὀρθῆς καλεῖται ὀξεῖα γωνία (σχ. 56).

Κάθε κυρτή γωνία μεγαλύτερα τῆς ὀρθῆς καλεῖται ἀμβλεία γωνία (σχ. 56).

Δύο πλαγίως τεμνόμεναι εὐθεῖαι ὀρίζουν τέσσαρας γωνίας ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο εἶναι ὀξείαι καὶ αἱ δύο ἀμβλείαι.

70. Ἡ σύγκρισις τῶν γωνιῶν. Ἐπειδὴ ἡ ὀρθὴ γωνία εἶναι σταθερὰ κατὰ μέγεθος, διότι εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πεπλατυσμένης γωνίας, διὰ τοῦτο αὕτη δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς μέτρον συγκρίσεως διὰ τὰς ἄλλας γωνίας. Κάθε γωνία δύναται νὰ ἐκφρασθῇ εἰς ὀρθὰς καὶ μέρη ὀρθῆς. Πρὸς καλυτέραν κλιμάκωσιν ὁμῶς διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν γωνιῶν, ὡς μέτρον συγκρίσεως χρησιμοποιεῖται τὸ $1/90$ τῆς ὀρθῆς γωνίας, τὸ ὁποῖον καλεῖται **γωνία μιᾶς μοίρας** ἢ ἀπλῶς **μοῖρα** καὶ συμβολίζεται 1° . Οὕτω μία ὀρθὴ γωνία ἔχει 90° , μία πεπλατυσμένη γωνία ἔχει 180° καὶ μία πλήρης γωνία ἔχει 360° . Ἐκάστη μοῖρα ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων καλεῖται **πρῶτον λεπτὸν** καὶ συμβολίζεται μὲ $1'$, ἕκαστον δὲ πρῶτον λεπτὸν ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη ἕκαστον τῶν ὁποίων καλεῖται **δεύτερον λεπτὸν** καὶ συμβολίζεται $1''$. Τὰ δεύτερα λεπτὰ ἐν συνεχείᾳ ὑποδιαιροῦνται κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

14. Ἐὰν δύο ἐφεξῆς γωνιῶν αἱ διχοτόμοι τῶν εἶναι κάθετοι, δείξατε ὅτι αἱ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

15. Ποίας γωνίας τὸ ἄθροισμα τῆς συμπληρωματικῆς τῆς καὶ τῆς παραπληρωματικῆς τῆς ἰσοῦται μὲ τὸ ἑπταπλάσιον τῆς γωνίας;

16. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς γωνιῶν σχηματίζουν γωνίαν ἴσην πρὸς τὸ ἡμιἄθροισμα αὐτῶν. Ἐφαρμογή: Αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς γωνιῶν σχηματίζουν γωνίαν 120° . Ἐὰν ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴση πρὸς τὸ $1/4$ τῆς ἄλλης, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγεθος ἐκάστης.

17. Ἐὰν δύο γωνίαι ἔχουν διαφορὰν μίαν ὀρθὴν γωνίαν καὶ τοποθετηθοῦν ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, οὕτως, ὥστε ν' ἀποκτήσουν κοινὴν κορυφὴν καὶ κοινὴν πλευράν, δείξατε ὅτι ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὀρθῆς.

18. Ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς διχοτόμου δοθείσης γωνίας καὶ τυχούσης ἡμιευθείας μὲ ἀρχὴν τὴν κορυφὴν τῆς δοθείσης γωνίας καὶ κειμένης ἐκτὸς αὐτῆς, δείξατε ὅτι εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἡμιἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῆς ἡμιευθείας καὶ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας.

19. Ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς διχοτόμου δοθείσης γωνίας καὶ τυχούσης ἡμιευθείας μὲ ἀρχὴν τὴν κορυφὴν τῆς δοθείσης γωνίας καὶ κειμένης ἐντὸς αὐτῆς, δείξατε ὅτι εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῆς ἡμιευθείας καὶ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας.

20. Ἐὰν μία γωνία εἶναι τὰ $3/8$ τῆς ὀρθῆς, νὰ εὑρεθῇ ἡ συμπληρωματικὴ καὶ ἡ παραπληρωματικὴ αὐτῆς εἰς μέρη ὀρθῆς καὶ εἰς μοίρας.

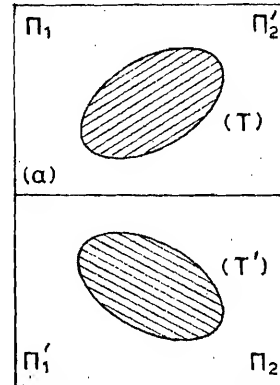
21. Τρεῖς διαδοχικαὶ γωνίαι ἔχουν ἄθροισμὰ ἴσον πρὸς 2 ὀρθὰς. Ἐὰν ἡ β' γωνία εἶναι τὰ $4/5$ τῆς α' καὶ ἡ γ' τὸ $1/3$ τῆς α' νὰ εὑρεθοῦν αὐταὶ εἰς μέρη ὀρθῆς καὶ εἰς μοίρας.

22. Ἐκ σημείου A ἄγονται τρεῖς ἡμιευθεῖαι Ax, Ay, Az οὕτως, ὥστε αἱ τρεῖς διαδοχικαὶ γωνίαι $\widehat{xAy}, \widehat{yAz}, \widehat{zAx}$ νὰ εἶναι ἴσαι. Δείξατε ὅτι ἐκάστη τῶν ἡμιευθειῶν τούτων προεκτεινομένη διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἄλλων ἡμιευθειῶν.

23. Ἐὰν τέσσαρες ἡμιευθεῖαι OA, OB, OG, OD , σχηματίζουν γωνίας $\widehat{AOB} = \widehat{AOD}$ καὶ $\widehat{BOG} = \widehat{GOD}$, δείξατε ὅτι αἱ ἡμιευθεῖαι OA καὶ OG ἀποτελοῦν εὐθεῖαν.

ΑΞΟΝΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

71. Ἐστω ἐπίπεδον (Π) καὶ μία εὐθεῖα (α) αὐτοῦ, ἡ ὁποία τὸ διαιρεῖ εἰς τὰ δύο ἡμιεπίπεδα (Π_1) καὶ (Π_2) (σχ. 57). Ἐὰν φαντασθῶμεν ὅτι τὸ (Π) περιστρέφεται περὶ τὴν εὐθεῖαν (α) εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἡμιεπίπεδον (Π_1) νὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν (Π'_1) ταυτιζόμενον μετὰ τοῦ (Π_2) καὶ τὸ (Π_2) νὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν (Π'_2) ταυτιζόμενον μετὰ τοῦ (Π_1) , τότε ἐν οἷονδήποτε σχῆμα (T) τοῦ ἐπιπέδου (Π) θὰ καταλάβῃ μίαν θέσιν (T') , ἡ ὁποία θὰ καλεῖται **συμμετρικὴ** τοῦ σχήματος (T) ὡς πρὸς **ἄξονα συμμετρίας** τὴν εὐθεῖαν (α) . Εἶναι προφανές ὅτι ἐὰν ὑπάρχουν σημεῖα τοῦ (T) ἐπὶ τοῦ ἄξονος (α) , ταῦτα παραμένουν εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἐπιπέδου (Π) καὶ καλοῦνται **ἀναλλοίωτα** σημεῖα κατὰ τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα (α) .



Σχ. 57

Συμβολικῶς, διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι τὸ σχῆμα (T') εἶναι συμμετρικὸν τοῦ (T) ὡς πρὸς ἄξονα εὐθεῖαν (α) , γράφομεν :

$$(T) \xrightarrow{\Sigma_{\alpha}} (T')$$

Πόρισμα I. Ἐὰν $(T) \xrightarrow{\Sigma_{\alpha}} (T')$, τότε καὶ

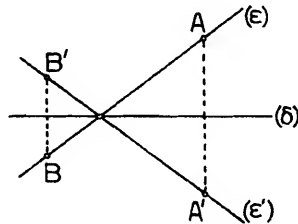
$(T') \xrightarrow{\Sigma_{\alpha}} (T)$ δηλαδή ἐὰν τὸ (T') εἶναι συμμετρικὸν τοῦ (T) ὡς πρὸς τὸν ἄξονα (α) , τότε καὶ τὸ (T) εἶναι συμμετρικὸν τοῦ (T') ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα.

Πράγματι, διότι καὶ μὲ μίαν δευτέραν περιστροφὴν τοῦ ἐπιπέδου (Π) περὶ τὴν εὐθεῖαν (α) , τοῦτο θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν του θέσιν καὶ συνεπῶς τὸ (T') θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν τοῦ (T) . Ὡς ἐκ τούτου, τὰ δύο σχήματα (T) καὶ (T') καλοῦνται **συμμετρικά** μεταξύ των ὡς πρὸς τὸν ἄξονα (α) .

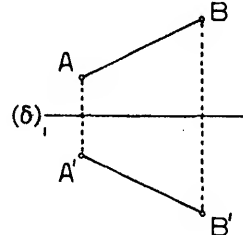
Πόρισμα II. Δύο συμμετρικά μεταξύ των σχήματα εἶναι ἴσα. Διότι τὸ ἐν ἐξ αὐτῶν δύναται διὰ μιᾶς μετατόπισεως νὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ ἄλλου. Ἡ μετατόπισις αὕτη (τῆς συμμετρίας) καλεῖται **ἀναστροφή**.

Πόρισμα III. Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ συμμετρικὸν εὐθείας (ϵ) ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας εὐθεῖαν (δ), κατ' ἀρχὰς γνωρίζομεν ὅτι εἶναι ἴσον σχῆμα καὶ συνεπῶς εἶναι εὐθεῖα (ϵ'). Ἀρκεῖ ἐπομένως νὰ εὐρωμεν τὰ συμμετρικὰ A' καὶ B' δύο τυχόντων σημείων A καὶ B τῆς (ϵ). Ταῦτα θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς συμμετρικῆς εὐθείας (ϵ') τῆς (ϵ) καὶ συνεπῶς εἶναι ἱκανὰ νὰ τὴν ὀρίσουν.

Συνήθως ὡς ἐν ἐκ τῶν δύο σημείων λαμβάνεται τὸ σημεῖον κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ (ϵ) τέμνει τὸν ἄξονα (δ), ἐφ' ὅσον τοῦτο ὑπάρχει, διότι παραμένει ἀναλλοίωτον κατὰ τὴν συμμετρίαν ἐφ' ὅσον ἀνήκει εἰς τὸν ἄξονα (δ) (σχ. 58).



Σχ. 58



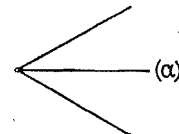
Σχ. 59

Πόρισμα IV. Τὸ συμμετρικὸν $A'B'$ εὐθυγράμμου τμήματος AB ὡς πρὸς ἄξονα (δ) ὀρίζεται ἀπὸ τὰ συμμετρικὰ A' καὶ B' τῶν ἄκρων A καὶ B τοῦ AB ὡς πρὸς τὸν ἄξονα (δ) (σχ. 59).

Σημείωσις. Ἡ ἄξονική συμμετρία καλεῖται καὶ **κατοπτρισμός**, διότι δύο συμμετρικὰ μεταξὺ των σχήματα ἐμφανίζουν τοιαύτην σχέσιν, οἷαν σχέσιν ἐμφανίζει τὸ ἐν ἐξ αὐτῶν μὲ τὸ κατοπτρικὸν τοῦ εἰδωλον.

72. Ἄξων συμμετρίας σχήματος. Ἐὰν ὅλα τὰ σημεῖα ἐνὸς σχήματος (Σ) εἶναι ἀνὰ δύο συμμετρικὰ ὡς πρὸς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (α), τότε λέγομεν ὅτι τὸ (Σ) ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν (α). Αὕτη δὲν ἀνήκει κατ' ἀνάγκην εἰς τὸ (Σ) καὶ χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ὡς παράδειγμα ἀναφερόμεν τὴν διχοτόμον μιᾶς γωνίας, ἡ ὁποία εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος (σχ. 60).



Σχ. 60

ΚΑΘΕΤΟΙ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΑΙ

73. Μεσοκάθετος. Ἐστω εὐθεῖα xx' καὶ σημεῖον A ἐκτὸς αὐτῆς. Θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ A' ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν xx' καὶ φέρομεν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AA' (σχ. 61), τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν xx' εἰς τὸ σημεῖον A_0 . Τότε, λόγῳ τῆς συμμετρίας, ἔχομεν ἀφ' ἐνὸς μὲν $AA_0 = A'A_0$, ἥτοι τὸ A_0 εἶναι μέσον τοῦ τμήματος AA' , ἀφ' ἑτέρου δὲ $\widehat{AA_0x} = \widehat{A'A_0x}$

και επειδη επι πλεον αι γωνιαι αυται ειναι παραπληρωματικαι, επεται οτι ειναι ορθαι, ητοι αι ευθειαι xx' και AA' ειναι καθετοι μεταξυ των. 'Η ευθεια xx' , ως καθετος εις το μεσον του ευθυγραμμου τμήματος AA' , καλεϊται **μεσο-καθετος** αυτου.

Πόρισμα. 'Ο αξων συμμετρίας ειναι μεσοκαθετος του τμήματος, που ορίζεται από κάθε ζεύγος συμμετρικων σημειων A, A' .

74. Θεώρημα. 'Εξ ενός σημείου A κειμένου εκτός ευθείας (δ) , μία και μόνον μία καθετος άγεται επ' αυτήν.

'Αποδείξεις. Θεωρούμεν το συμμετρικόν A' του A ως προς την ευθειαν (δ) και φέρομεν το τμήμα AA' , το όποιον τέμνει την (δ) εις το A_0 (σχ. 62).

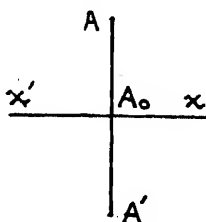
'Η συμμετρία μās εξασφαλίζει την AA' καθετον επι της (δ) , άρα υπάρχει εκ του A καθετος επι την (δ) .

'Ας υποθέσωμεν ότι εκ του A υπάρχει και άλλη καθετος επι την (δ) , ή AB . Τότε θα ειναι $\widehat{ABA_0} = 1^\circ$. 'Η $A'B$ ειναι ή συμμετρική της AB και επομένως θα ειναι και $\widehat{BA_0A'} = 1^\circ$. 'Αρα $\widehat{ABA'} = 2^\circ$. 'Επομένως ή γραμμή ABA' θα ειναι ευθεια. Τα σημεία A και A' όμως μίαν και μόνον μίαν ευθειαν ορίζουν, την AA_0A' . 'Επομένως ή ABA' δεν δύναται να ειναι καθετος παρά μόνον εάν ταυτίζεται με την AA_0A' . 'Αρα δεν δύναται να υπάρχει και δευτέρα καθετος εκ του A επι την (δ) .

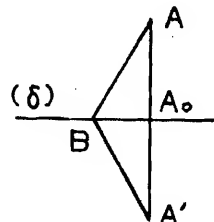
Σημείωσις. 'Η χρησιμοποιηθεϊσα εις το προηγούμενον θεώρημα αποδεικτική μέθοδος καλεϊται «μέθοδος της εις άτοπον άπαγωγής» ή «μέθοδος του αποκλεισμού των δυνατων περιπτώσεων». Αυτή οφείλεται εις τον Ευκλείδην και συνίσταται εις το εξής :

Εύρισκόμενοι εις αδυναμίαν να προβώμεν εις την άμεσον απόδειξιν μιās προτάσεως A , θεωρούμεν όλα τα πιθανά ένδεχόμενα B, Γ, \dots, N τα όποια δυνατόν να συμβαίνουιν. Λαμβάνοντες έν έκαστον εξ αυτών και με την υπόθεσιν ότι τοῦτο συμβαίνει, κατόπιν λογικής επεξεργασίας εάν φθάσωμεν εις συμπέρασμα άναληθές, ή άτοπον όπως λέγομεν, αντιλαμβανόμεθα ότι εις το έσφαλμένον συμπέρασμα μās ώδήγησεν ή έσφαλμένη υπόθεσις, ή όποία κατά συνέπειαν πρέπει να αποκλεισθῇ. Διά του τρόπου αυτου, εάν αποκλεισθούιν ως έσφαλμένα τα ένδεχόμενα B, Γ, \dots, N , πειθόμεθα ότι το μόνον το όποιον αληθεύει ειναι το ένδεχόμενον A .

Τα ένδεχόμενα B, Γ, \dots, N καλούνται **συμπληρωματικά** του A . 'Εάν ένα ένδεχόμενον A έχη έν μόνον συμπληρωματικόν B , τοῦτο καλεϊται και **άντίθετον** του A .



Σχ. 61



Σχ. 62

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἡ ὑπόθεσις ὅτι δυνατόν νὰ ὑπάρχη καὶ μία δευτέρα κάθετος ἐκ τοῦ Α πρὸς τὴν (δ), μᾶς ὡδήγησεν εἰς τὸ ἐσφαλμένον (ἄτοπον) συμπέρασμα ὅτι διὰ τῶν σημείων Α καὶ Α' διέρχονται δύο εὐθεῖαι. Αὐτὸς ἦτο καὶ ὁ λογος βάσει τοῦ ὁποίου ἀπεκλείσθη ἡ ὑπαρξίς καὶ μιᾶς δευτέρας κάθετου.

75. Ἰδιότης τῆς μεσοκαθέτου. Θεώρημα. Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου (δ) εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ καὶ μόνον αὐτά, ἔχουν τὴν ιδιότητα νὰ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος.

Ἀπόδειξις. Τὰ Α καὶ Β εἶναι συμμετρικά ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον (δ) (σχ. 63). Ἐὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς (δ), τότε ἡ συμμετρία μᾶς ἐξασφαλίζει $MA = MB$. Ἐπομένως ὅλα τὰ σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ τμήματος.

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα ἓν σημεῖον Ν, μὴ ἀνήκον εἰς τὴν (δ) καὶ ἔστω ὅτι τοῦτο εὐρίσκεται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν (δ). Τότε ἡ ΝΑ θὰ τέμνῃ τὴν (δ) εἰς σημεῖον Ρ, διὰ τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι

$$(1) \quad PA = PB$$

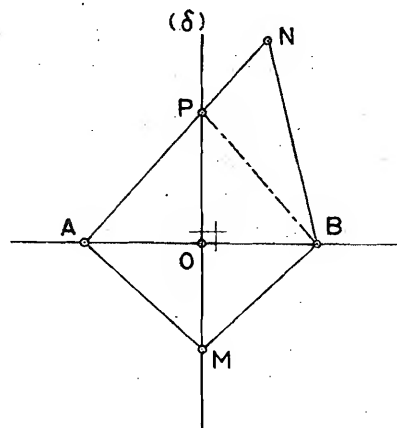
ὡς σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου.

Γνωρίζομεν ὅμως (§ 40) ὅτι $NB < NP + PB$, ἡ ὁποία λόγῳ τῆς σχέσεως (1) δύναται νὰ γραφῇ :

$$NB < NP + PA \Rightarrow NB < NA$$

Ἄρα κάθε σημεῖον Ν, μὴ ἀνήκον εἰς τὴν μεσοκάθετον, ἀπέχει ἀνίσους ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β καὶ μάλιστα μεγαλύτεραν ἀπὸ ἐκεῖνο μετὰ τοῦ ὁποίου κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς μεσοκαθέτου. Ἐπομένως μόνον τὰ σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου (δ) ἔχουν τὴν ιδιότητα νὰ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος ΑΒ.

Παρατήρησις. Ἡ προηγουμένη ιδιότης τῶν σημείων τῆς μεσοκαθέτου εὐθυγράμμου τμήματος καὶ μόνον αὐτῶν, νὰ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος, ἀπεδείχθη διὰ τῆς λογικῆς ἰσοδυναμίας τῶν προτάσεων $A \Rightarrow B$ καὶ ὅχι $A \Rightarrow \delta\chi\iota B$, ἐκ τῶν ὁποίων ἔπεται $A \Leftrightarrow B$.



Σχ. 63

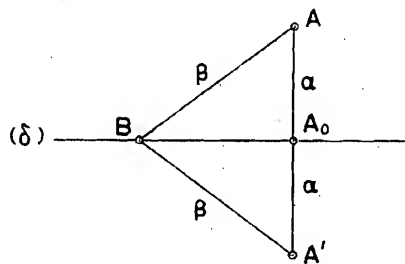
76. Γεωμετρικὸς τόπος καλεῖται κάθε σύνολον σημείων, τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα καὶ μόνον αὐτά ἔχουν μίαν ὀρισμένην ιδιότητα.

Τὰ σημεία ἑνὸς γεωμετρικοῦ τόπου (συντόμως γ. τόπου) εἶναι ἐν γένει ἄπειρα καὶ συνιστοῦν ἓν σχῆμα (Τ). Ἐὰν f εἶναι ἡ καθοριστικὴ ιδιότης ἑνὸς γ. τόπου (Τ), κάθε σημεῖον τοῦ σχήματος (Τ) ἔχει τὴν ιδιότητα f , ἀλλὰ καὶ κάθε σημεῖον ἔχον τὴν ιδιότητα f , ἀνήκει εἰς τὸν γ. τόπον (Τ).

Κατὰ ταῦτα, ἡ μεσοκάθετος (δ) ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος AB , εἶναι ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου μὲ τὴν καθοριστικὴν ιδιότητα νὰ «ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα A καὶ B τοῦ τμήματος AB ».

77. Θεώρημα. Ἐὰν σημεῖον A εὐρίσκεται ἐκτὸς εὐθείας (δ), τὸ κάθετον εὐθύγραμμον τμήμα ἐκ τοῦ A πρὸς τὴν (δ) εἶναι μικρότερον παντὸς πλαγίου εὐθυγράμμου τμήματος ἐκ τοῦ A πρὸς τὴν (δ).

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν A' τοῦ σημείου A ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν (δ) καὶ φέρομεν τὴν AA' , ἡ ὁποία τέμνει εἰς τὸ A_0 τὴν (δ). Ἡ συμμερτία μᾶς ἐξασφαλίζει τὴν AA' κάθετον ἐπὶ τὴν (δ) καὶ $AA_0 = A'A_0 = \alpha$ (σχ. 64).



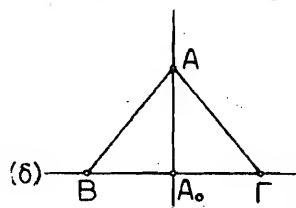
Σχ. 64

Ἐὰν θεωρήσωμεν καὶ ἓν πλάγιον εὐθύγραμμον τμήμα AB ἐκ τοῦ A πρὸς τὴν (δ), τὸ $A'B$ θὰ εἶναι τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν (δ), ἐπομένως $AB = A'B = \beta$.

Τότε θὰ εἶναι (§ 40) $AA' < AB + A'B$ ἢ $2\alpha < 2\beta \Rightarrow \alpha < \beta$ ἢ $AA_0 < AB$.

Ὁρισμός. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείαν καλεῖται τὸ μήκος τοῦ καθέτου εὐθυγράμμου τμήματος ποὺ ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου πρὸς τὴν εὐθεῖαν.

78. Θεώρημα. Ἐὰν τὰ ἵχνη δύο πλαγίων εὐθυγράμμων τμημάτων ἐκ σημείου A πρὸς εὐθεῖαν (δ) ἰσαπέχουν ἀπὸ τὸ ἵχνος A_0 τῆς ἐκ τοῦ A καθέτου ἐπὶ τὴν (δ), τὰ τμήματα εἶναι ἴσα καὶ ἀντιστρόφως.



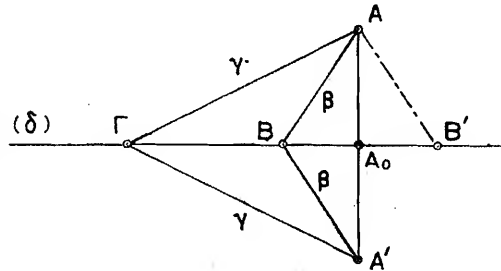
Σχ. 65

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν AB καὶ $A\Gamma$ τὰ δύο πλάγια τμήματα ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν (δ), διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει $A_0B = A_0\Gamma$ (σχ. 65). Τότε τὰ B καὶ Γ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἄξονα τὴν AA_0 καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $AB = A\Gamma$.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω δτι εἶναι $AB = A\Gamma$. Τότε τὸ σημεῖον A θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος $B\Gamma$, δηλαδὴ ἡ κάθετος AA_0 ἐπὶ τὴν (δ) εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $B\Gamma$ (§75). Ἀρα $A_0B = A_0\Gamma$.

79. Θεώρημα. Ἐὰν τὰ ἔχνη δύο πλαγίων εὐθυγράμμων τμημάτων ἐκ σημείου A πρὸς εὐθεΐαν (δ) ἀπέχουν ἀνίσους ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ ἔχνου A_0 τῆς ἐκ τοῦ A καθέτου ἐπὶ τὴν (δ) , τὰ τμήματα εἶναι κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν ἄνισα καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν AB καὶ $A\Gamma$ δύο πλάγια εὐθύγραμμα τμήματα ἐκ σημείου A πρὸς εὐθεΐαν (δ) , διὰ τὰ ὁποῖα ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι $A_0B < A_0\Gamma$ (1) (σχ. 66) ὅπου A_0 τὸ ἔχνος τῆς ἐκ τοῦ A καθέτου ἐπὶ τὴν (δ) . Δυνάμεθα πάντοτε νὰ θεωρήσωμεν τὰ τμήματα AB καὶ $A\Gamma$ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος κείμενα ὥς πρὸς τὴν κάθετον AA_0 , διότι ἂν τοῦτο δὲν συνέβαινε καὶ εἴχομεν τὰ $A\Gamma$ καὶ AB' ἑκατέρωθεν τῆς AA_0 , θὰ ἐλαμβάναμεν τὸ συμμετρικὸν AB τοῦ AB' ὥς πρὸς τὴν AA_0 , τὸ ὁποῖον θὰ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ὥς πρὸς τὴν AA_0 μετὰ τοῦ $A\Gamma$.



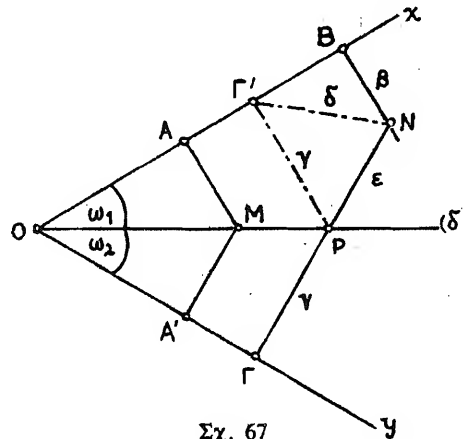
Σχ. 66

Θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν A' τοῦ A ὥς πρὸς τὴν (δ) καὶ φέρομεν τὰς $A'B$ καὶ $A'\Gamma$. Ἡ συμμετρία μᾶς ἐξασφαλίζει $AB = A'B = \beta$ καὶ $A\Gamma = A'\Gamma = \gamma$. Ἐκ τῆς σχέσεως (1) ἔπεται ὅτι ἡ κυρτὴ τεθλασμένη ABA' περικλείεται ὑπὸ τῆς $A\Gamma A'$, ἐνῶ ἔχουν τὰ αὐτὰ ἄκρα. Τότε (§ 44) θὰ εἶναι

$$AB + A'B < A\Gamma + A'\Gamma \quad \eta \quad 2\beta < 2\gamma \Rightarrow \beta < \gamma \quad \eta \quad AB < A\Gamma.$$

Ἀντιστρόφως. Ἐστω ὅτι εἶναι $AB < A\Gamma$. Τότε ἀποκλείεται νὰ εἶναι $A_0B = A_0\Gamma$, διότι τότε θὰ ἦτο καὶ $AB = A\Gamma$, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐπίσης ἀποκλείεται νὰ εἶναι καὶ $A_0B > A_0\Gamma$, διότι, ὡς ἐδείχθη, θὰ ἦτο καὶ $AB > A\Gamma$, καὶ αὐτὸ ἀντίκειται εἰς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν.

Ἐπομένως τὸ μόνον τὸ ὁποῖον δύναται νὰ συμβαίῃ εἶναι $A_0B < A_0\Gamma$.



Σχ. 67

80. Ἰδιότης τῆς διχοτόμου κυρτῆς γωνίας. Θεώρημα. Ὅλα τὰ σημεία τῆς διχοτόμου (δ) κυρ-

τῆς γωνίας \widehat{xOy} καὶ μόνον αὐτὰ, ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

Απόδειξις. Έστω M τυχόν σημείον τῆς διχοτόμου (δ) κυρτῆς γωνίας \widehat{XOY} (σχ. 67). Ἐξ αὐτοῦ φέρομεν τὰς MA καὶ MA' καθετόους ἐπὶ τὰς πλευρὰς Ox καὶ Oy ἀντιστοίχως. Ἡ συμμετρία ὡς πρὸς ἄξονα τὴν διχοτόμον (δ) ἀπεικονίζει τὴν ἡμιευθεῖαν Ox ἐπὶ τῆς Oy , ἐφ' ὅσον εἶναι $\omega_1 = \omega_2$. Περιστρέφομεν τὴν Ox περὶ τὴν διχοτόμον (δ) , ὥστε αὕτη νὰ λάβῃ τὴν θέσιν τῆς Oy . Τότε τὸ σημεῖον A θὰ συμπίσῃ μετὰ τοῦ A' , διότι ἂν δὲν συνέβαινε τοῦτο, θὰ εἶχομεν δύο καθετοὺς ἐκ τοῦ M ἐπὶ τὴν Oy . Ἀρα εἶναι $MA = MA'$. Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι κάθετ. σημεῖον τῆς διχοτόμου (δ) , ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

Έστω τώρα N σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας \widehat{XOY} μὴ ἀνήκον εἰς τὴν διχοτόμον (δ) . Θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο ἀπέχει ἀνίσους ἀποστάσεις ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

Ἐκ τοῦ N φέρομεν τὰς NB καὶ NG καθετοὺς ἐπὶ τὰς Ox καὶ Oy ἀντιστοίχως καὶ ἔστω ὅτι ἡ NG τέμνει τὴν διχοτόμον (δ) εἰς σημεῖον P . Ἐκ τοῦ P φέρομεν τὴν PG' κάθετον ἐπὶ τὴν Ox . Τότε, ὡς ἐδείχθη, θὰ εἶναι $PG = PG' = \gamma$. Ἐὰν καλέσωμεν $NB = \beta$ καὶ $NP = \epsilon$, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $\beta < \epsilon + \gamma$.

Φέρομεν τὴν $NG' = \delta$. Τότε, ἐπειδὴ ἡ β εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς Ox , ἡ δ θὰ εἶναι πλαγία, συνεπῶς

$$(1) \quad \beta < \delta$$

Ἐπὶ πλέον ὁμῶς εἶναι καὶ (§ 40)

$$(2) \quad \delta < \gamma + \epsilon$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι

$$\beta < \delta < \gamma + \epsilon \quad \text{ἄρα} \quad \beta < \gamma + \epsilon \quad \text{ἢ} \quad NB < NG$$

Ἐπομένως τὰ σημεῖα τῆς διχοτόμου (δ) ἀλλὰ καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουν τὴν ιδιότητα νὰ ἀπέχουν ἴσας ἀποστάσεις ἐκ τῶν πλευρῶν Ox καὶ Oy τῆς κυρτῆς γωνίας \widehat{XOY} .

Πόρισμα. Ὁ γ . τόπος τῶν σημείων τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν γωνίας \widehat{XOY} καὶ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς, εἶναι ἡ διχοτόμος (δ) τῆς γωνίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

24. Δίδονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$. Ἐὰν αἱ μεσοκάθετοι αὐτῶν τέμνονται εἰς σημεῖον O καὶ εἶναι $OB = O\Gamma$, δείξατε ὅτι θὰ εἶναι καὶ $OA = O\Delta$.

25. Δίδεται εὐθεῖα (δ) , δύο σημεῖα A καὶ B καὶ ἔστωσαν A' καὶ B' τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν ὡς πρὸς τὴν (δ) . Ἐὰν ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος AB τέμνῃ τὴν (δ) εἰς τὸ E , δείξατε ὅτι $EA = EB = EA' = EB'$.

26. Δίδεται ὀρθή γωνία \widehat{xOy} . Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox λαμβάνομεν δύο σημεῖα A καὶ B τοιαῦτα, ὥστε $OA < OB$ καὶ ἐπὶ τῆς Oy λαμβάνομεν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ τοιαῦτα, ὥστε $OG < OD$. Δείξατε ὅτι $AG < BD$.

Β'.

27. Ἐὰν δύο τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$ μὴ ἀνήκοντα εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ἔχουν κοινὴν μεσοκάθετον εὐθεῖαν (δ) , δείξατε ὅτι αἱ μεσοκάθετοι τῶν τμημάτων AG καὶ BD τέμνονται ἐπὶ τῆς (δ) .

28. Δίδεται γωνία \widehat{xOy} . Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς λαμβάνομεν σημεῖα A καὶ B οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $OA = OB$. Ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας, δείξατε ὅτι $MA = MB$.

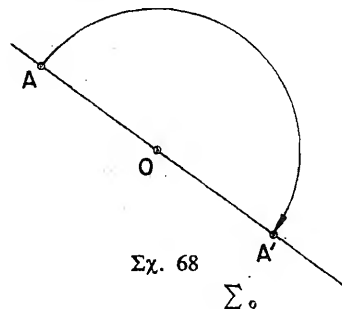
29. Δίδεται γωνία \widehat{xOy} καὶ ἔστω Oz ἡ διχοτόμος τῆς. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον A καὶ ἔστω B τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον Oz . Θεωροῦμεν τὰς καθέτους $AG \perp Ox$ καὶ $BD \perp Oy$. Δείξατε ὅτι i) $AG = BD$, ii) $AD = BG$, iii) αἱ AG καὶ BD (προεκτεινόμεναι ἐν ἀνάγκῃ) τέμνονται ἐπὶ τῆς διχοτόμου Oz , iv), ὁμοίως καὶ αἱ AD καὶ BG .

30. Δίδονται τρία σημεῖα A, B, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας. Φέρομεν τὰς εὐθείας $AB, BG, \Gamma A$ καὶ θεωροῦμεν τὰς καθέτους $AD \perp BG, BE \perp AG, \Gamma Z \perp AB$, ὅπου τὰ Δ, E καὶ Z εὐρίσκονται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν $BG, \Gamma A, AB$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $AD + BE + \Gamma Z < AB + BG + AG$.

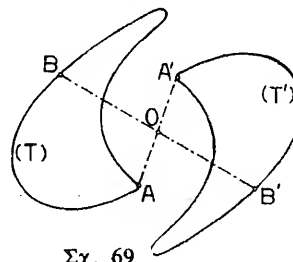
31. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἱσαπέχουν ἀπὸ δύο τε-
μομένων εὐθειῶν εἰς σημεῖον O , εἶναι δύο κάθετοι εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τοῦ O .

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

81. Ἐστω ἐπίπεδον (Π) καὶ σταθερὸν σημεῖον O αὐτοῦ. Δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, ὀλισθαῖνον ἐπὶ τοῦ ἐναυτοῦ του, νὰ στρέφεται περὶ τὸ O οὕτως, ὥστε τυχὸν σημεῖον A αὐτοῦ νὰ καταλάβῃ θέσιν A' , ὅπου ἡ γωνία $\widehat{AOA'}$ νὰ εἶναι πεπλατυσμένη. Εἶναι προφανές ὅτι τὰ σημεῖα A, O, A' κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ εἶναι $OA = OA'$ (σχ. 68). Τότε τὸ σημεῖον A' καλεῖται συμμετρικὸν τοῦ A ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ σημεῖον O , συμβο-



Σχ. 68



Σχ. 69

λικῶς δὲ γράφομεν $A \xrightarrow{\Sigma_O} A'$ καὶ ἀναγινώσκομεν «τὸ A , μέσῳ τῆς συμμετρίας κέντρου O , ἔχει τὸ συμμετρικὸν του εἰς τὸ A' » ἢ «τὸ A ἀπεικονίζεται μέσῳ τῆς συμμετρίας κέντρου O , εἰς τὸ A' ».

Ἐὰν (T) εἶναι ἓν τυχὸν σχῆμα τοῦ ἐπιπέδου (Π) (σχ. 69), κατὰ τὴν περι-

στροφήν, τοῦτο θὰ καταλάβῃ νέαν θέσιν (T'), ἡ ὁποία καλεῖται συμμετρικὴ αὐτοῦ κατὰ τὴν συμμετρίαν Σ_0 . Τότε, τυχόν σημεῖον A τοῦ (T) θὰ ἔχῃ τὸ συμμετρικόν του A' ἐπὶ τοῦ (T'), ἀλλὰ καὶ τυχόν σημεῖον B' τοῦ (T') εἶναι τὸ συμμετρικόν ἐνὸς σημείου B τοῦ (T) κατὰ τὴν συμμετρίαν κέντρου O . Συμβολικῶς γράφομεν :

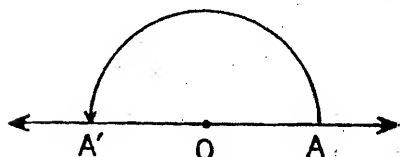
$$(T) \xrightarrow{\Sigma_0} (T')$$

Τὸ κέντρον τῆς συμμετρίας O εἶναι τὸ μόνον ἀναλλοίωτον σημεῖον τοῦ (Π) κατὰ τὴν κεντρικὴν συμμετρίαν Σ_0 , ἥτοι τὸ μόνον σημεῖον, τὸ ὁποῖον ταυτίζεται μετὰ τοῦ συμμετρικοῦ του.

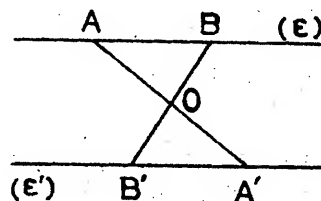
Πόρισμα I. Ἐὰν $(T) \xrightarrow{\Sigma_0} (T')$ τότε καὶ $(T') \xrightarrow{\Sigma_0} (T)$, δηλαδὴ ἐὰν τὸ (T') εἶναι συμμετρικόν τοῦ (T) κατὰ τὴν συμμετρίαν κέντρου O , τότε καὶ τὸ (T) εἶναι συμμετρικόν τοῦ (T') κατὰ τὴν αὐτὴν συμμετρίαν.

Πόρισμα II. Δύο συμμετρικὰ μεταξύ των σχήματα κατὰ τὴν συμμετρίαν κέντρου O εἶναι ἴσα, διότι ἡ κεντρικὴ συμμετρία εἶναι μετατόπισις.

Πόρισμα III. Κάθε εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου O , παραμένει ἀναλλοίωτος κατὰ τὴν κεντρικὴν συμμετρίαν Σ_0 , ἥτοι ταυτίζεται μετὰ τῆς συμμετρικῆς της, ἐνῶ κάθε ἡμιευθεῖα μὲ ἀρχὴν τὸ O ἔχει ὡς συμμετρικὴν τὴν ἀντίθετόν της (σχ. 70).



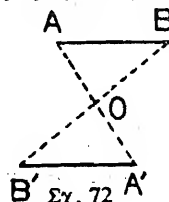
Σχ. 70



Σχ. 71

Πόρισμα IV. Τὸ συμμετρικόν εὐθείας (ϵ) ὡς πρὸς κέντρον O , ὡς ἴσον σχῆμα, εἶναι εὐθεῖα (ϵ'), ἡ ὁποία ὀρίζεται ἀπὸ τὰ συμμετρικὰ A' καὶ B' δύο σημείων A καὶ B τῆς (ϵ), ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ O (σχ. 71).

Πόρισμα V. Τὸ συμμετρικόν εὐθυγράμμου τμήματος AB ὡς πρὸς κέντρον σημείου O , ὡς ἴσον σχῆμα, εἶναι εὐθύγραμμος τμήμα καὶ ὀρίζεται ἀπὸ τὰ συμμετρικὰ A' καὶ B' τῶν ἁκρῶν A καὶ B αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ O (σχ. 72).



Σχ. 72

82. Θεώρημα. Δύο εὐθεῖαι (ϵ) καὶ (ϵ') συμμετρικαὶ κατὰ μίαν κεντρικὴν συμμετρίαν Σ_0 τῆς ὁποίας τὸ κέντρον O δὲν ἀνήκει εἰς αὐτάς, οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν.

Ἀπόδειξις. Κατ' ἀρχὰς παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι δὲν δύνανται

νά ταυτίζονται, διότι τὸ κέντρον συμμετρίας δὲν ἀνήκει εἰς τὴν (ϵ) (σχ. 73).

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ὑπάρχει ἓν σημεῖον

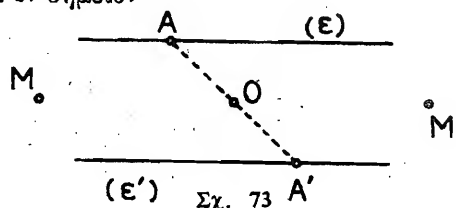
M κοινὸν τῶν δύο εὐθειῶν ἥτοι :

(1) $M \in (\epsilon)$ καὶ $M \in (\epsilon')$

Τότε ἂν M' εἴναι τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὸ O , ἐκ τῶν σχέσεων (1) ἔπεται ἀντιστοίχως:

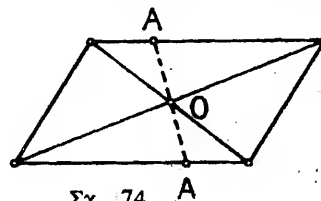
$M' \in (\epsilon')$ καὶ $M' \in (\epsilon)$

ἥτοι τὸ M' εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν δύο εὐθειῶν. Τότε ὅμως αἱ δύο εὐθεῖαι θὰ ἐταυτίζοντο ὡς ἔχουσαι δύο κοινὰ σημεῖα M καὶ M' , ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα αἱ δύο εὐθεῖαι δὲν δύνανται νὰ ἔχουν κοινὸν σημεῖον.



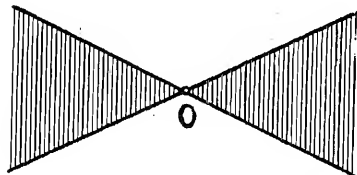
Σχ. 73

83. Κέντρον συμμετρίας σχήματος. Ἐὰν ὅλα τὰ σημεῖα ἑνὸς σχήματος (Σ) εἴναι ἀνὰ δύο συμμετρικά ὡς πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον O , τότε λέγομεν ὅτι τὸ (Σ) ἔχει κέντρον συμμετρίας τὸ σημεῖον O , τὸ ὁποῖον συνήθως καλεῖται ἀπλῶς κέντρον τοῦ σχήματος (σχ. 74).

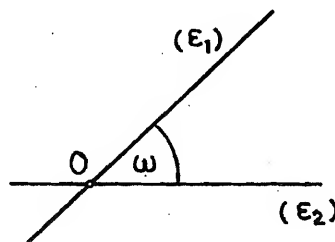


Σχ. 74

84. Κατὰ κορυφήν γωνίαι. Δύο γωνίαι καλοῦνται κατὰ κορυφήν τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ἔχουν κοινὴν κορυφήν σημεῖον O καὶ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὴν κορυφήν των O (σχ. 75).



Σχ. 75



Σχ. 76

Πόρισμα I. Εἰς δύο κατὰ κορυφήν γωνίας αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.

Πόρισμα II. Δύο κατὰ κορυφήν γωνίαι εἶναι ἴσαι, λόγῳ συμμετρίας.

85. Γωνία τεμνομένων εὐθειῶν. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) τέμνονται εἰς σημεῖον O (σχ. 76), καλοῦμεν γωνίαν αὐτῶν τὴν μικροτέραν γωνίαν ω ἐκ τῶν σχηματιζομένων με κορυφήν τὸ O . Ἡ γωνία ω καλεῖται καὶ γωνία κλίσεως τῆς μιᾶς εὐθείας ὡς πρὸς τὴν ἄλλην.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

32. Ἐάν δύο ἡμιευθεῖαι Ax καὶ $A'x'$ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς κέντρον σημείου O , δείξατε ὅτι κάθε εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ O καὶ τέμνουσα τὴν Ax εἰς σημεῖον B , τέμνει καὶ τὴν $A'x'$ εἰς σημεῖον B' καὶ ἐπὶ πλέον ὅτι εἶναι $AB = A'B'$.

33. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν, εἶναι ἀντίθετοι ἡμιευθεῖαι.

34. Ἐάν δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς κέντρον σημείου O , δείξατε ὅτι κάθε εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ O καὶ τέμνουσα τὴν (ε_1) , τέμνει καὶ τὴν (ε_2) καὶ ἐπὶ πλέον σχηματίζει ἴσας γωνίας μετ' αὐτῶν.

35. Ἐάν ἐν σχῆμα ἔχη δύο ἄξονας συμμετρίας καθέτους μεταξύ των, δείξατε ὅτι ἔχει καὶ κέντρον συμμετρίας τὴν τομὴν τῶν ἄξόνων.

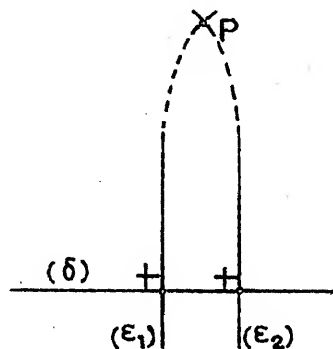
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

86. Ὅρισμός. Δύο συνεπίπεδοι εὐθεῖαι καλοῦνται παράλληλοι τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν.

87. Θεώρημα. Δύο συνεπίπεδοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) κάθετοι πρὸς τρίτην εὐθεῖαν (δ) , εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν (σχ. 77). Πράγματι, ἐάν ὑπῆρχεν ἐν κοινὸν σημεῖον P , τότε ἐκ τοῦ P θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι (ε_1) καὶ (ε_2) ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (δ) ὅπερ ἄτοπον. Ἀρα αἱ (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι παράλληλοι.

Τὸ σύμβολον τῆς παραλλείας εἶναι $//$, σημειώνομεν δηλαδή $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$



Σχ. 77

88. Ἀξιῶμα (αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου). Ἀπὸ σημεῖον κείμενον ἐκτὸς εὐθείας μία καὶ μόνον μία παράλληλος ἄγεται πρὸς αὐτήν.

Ἱστορικὸν σημείωμα. Εἰς τὸ Α' βιβλίον τῶν «Στοιχείων» τοῦ Εὐκλείδου (περὶ τὸ 285 π.Χ.) ἀναφέρεται τὸ ἐξῆς ε' αἴτημα. «Ἡτήσθω... ἐάν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα τις ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἀπειρον συμπίπτειν ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι».

Τὸ αἴτημα τοῦτο, (τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ εἰς τὴν § 105 ἀναφερόμενον V πόρισμα), ἀντικατεστάθη ὑπὸ τοῦ Gerconne κατὰ τὸ 1812 ἢ, κατ' ἄλλους, ὑπὸ τοῦ J. Playfair κατὰ τὸ 1795 ὑπὸ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως, ἡ ὁποία ἐκτοτε εἶναι γνωστὴ ὡς Εὐκλείδειον αἴτημα, ἡ δὲ γνωστὴ εἰς ἡμᾶς Γεωμετρία, ἡ παραδεχομένη καὶ στηριζομένη εἰς τὸ Εὐκλείδειον αἴτημα, λέγεται Εὐκλείδειος Γεωμετρία.

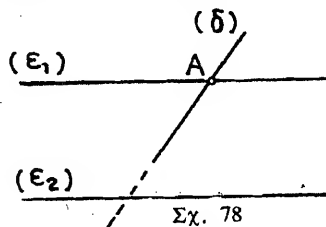
Ὅσοι ἐπεχείρησαν νὰ ἀποδείξουν τὸ Εὐκλείδειον αἴτημα δὲν κατώρθωσαν παρὰ

νὰ μετατοπίσουν τὴν πρότασιν νὰ παραδεχθοῦν δηλαδὴ ἄλλην πρότασιν ὡς αἴτημα καὶ ἐπὶ τῇ βάσει αὐτῆς νὰ ἀποδείξουν τὸ Εὐκλείδειον αἴτημα. Μάλιστα ὁ Γάλλος Ἀκαδημαϊκὸς Lagrange ἠναγκάσθη νὰ ἀποσύρῃ ἐργασίαν του περὶ παραλλήλων εὐθειῶν καθ' ἣν στιγμὴν τὴν ἀνεκοίνωσεν ἐν τῇ συνεδρίᾳ τῆς Ἀκαδημίας τῶν Παρισίων εἰπὼν· «πρέπει νὰ σκεφθῶ ἀκόμη ἐπὶ τοῦ ζητήματος τούτου».

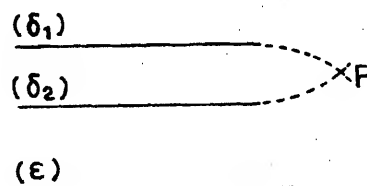
Ὅλοι αἱ ἄκαρποι αὗται προσπάθειαι πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ Εὐκλείδειου αἰτήματος ἠνάγκασαν τοὺς γεωμέτρους νὰ δεχθοῦν ἢ ὅτι τὸ ζήτημα εἶναι ἄλυτον, ἢ ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ εἶναι ἀπολύτως ἀληθὲς τὸ αἴτημα. Οὕτω ὁ Ρώσος Lobatchewsky (1793 - 1856), ὁ Γερμανὸς Riemann (1826 - 1866) καὶ ἄλλοι, κατέληξαν εἰς τὸ ὅτι ἡ μὴ παραδοχὴ τοῦ Εὐκλείδειου αἰτήματος δὲν ἄγει εἰς ἄτοπα συμπεράσματα. Τοιουτοτρόπως, ἐκτὸς τῆς γνωστῆς εἰς ἡμᾶς Εὐκλείδειου Γεωμετρίας, ὑπάρχουν θεωρητικῶς καὶ ἡ Γεωμετρία τοῦ Lobatchewsky κατὰ τὴν ὁποίαν ἐξ ἐνὸς σημείου ἄγονται ἄπειροι παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ ἡ Γεωμετρία τοῦ Riemann κατὰ τὴν ὁποίαν δὲν ὑπάρχουν παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Πόρισμα I. Κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει μίαν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν, τέμνει καὶ τὴν ἄλλην.

Ἐστωσαν $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$ καὶ εὐθεῖα (δ) , ἡ ὁποία τέμνει τὴν (ε_1) εἰς τὸ σημεῖον A (σχ. 78). Ἐὰν ἡ (δ) δὲν ἔτεμνε τὴν (ε_2) , θὰ ὑπῆρχον δύο παράλληλοι ἐκ τοῦ σημείου A πρὸς τὴν (ε_2) , ἡ (ε_1) καὶ ἡ (δ) , ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ἡ (δ) τέμνει καὶ τὴν (ε_2) .



Σχ. 78



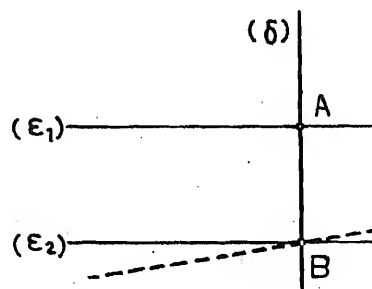
Σχ. 79

Πόρισμα II. Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τρίτην εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι.

Ἐστω ὅτι $(\delta_1) \parallel (\varepsilon)$ καὶ $(\delta_2) \parallel (\varepsilon)$ (σχ. 79). Αἱ (δ_1) καὶ (δ_2) δὲν δύνανται νὰ ἔχουν κοινὸν σημεῖον, διότι, ἐὰν ὑπῆρχε κοινὸν σημεῖον P, θὰ εἴχομεν ἐξ αὐτοῦ δύο παραλλήλους πρὸς τὴν (ε) , ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα $(\delta_1) \parallel (\delta_2)$.

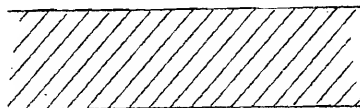
89. Θεώρημα. Ἐὰν εὐθεῖα (δ) εἴναι κάθετος ἐπὶ τὴν μίαν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2) , εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι $(\delta) \perp (\varepsilon_1)$ καὶ A τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῶν (σχ. 80). Ἡ (δ) , ἐφ' ὅσον τέμνει τὴν (ε_1) θὰ τέμνῃ καὶ τὴν παράλληλόν της (ε_2)



Σχ. 80

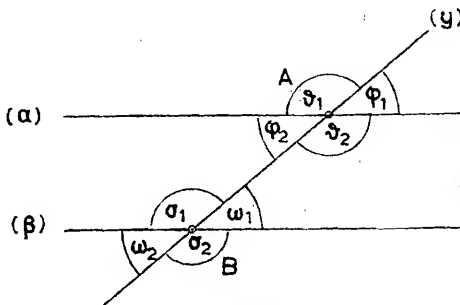
ἔστω εἰς σημεῖον B. Ἐάν ἡ (ε_2) δὲν ᾖτο κάθετος ἐπὶ τὴν (δ) καὶ θεωρήσωμεν τὴν ἐκ τοῦ B κάθετον ἐπὶ τὴν (δ) , αὕτη θὰ ᾖτο παράλληλος τῆς (ε_1) (§ 87), ὅπερ ἄτοπον διότι θὰ ὑπῆρχον ἐκ τοῦ σημείου B δύο παράλληλοι πρὸς τὴν (ε_1) . Ἀρα εἶναι καὶ $(\delta) \perp (\varepsilon_2)$.



Σχ. 81

90. Ζώνη ἢ ταινία δύο παραλλήλων εὐθειῶν καλεῖται τὸ ἐπίπεδον-τμήμα, ποῦ περιέχεται μεταξύ τῶν δύο παραλλήλων (σχ. 81).

91. Γωνίαι σχηματιζόμεναι ὑπὸ ζεύγους παραλλήλων καὶ τεμνούσης. Θεωροῦμεν δύο παραλλήλους εὐθείας (α) καὶ (β) καὶ μίαν εὐθεῖαν (γ) τέμνουσαν αὐτάς εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B ἀντιστοίχως (σχ. 82). Τότε σχηματίζονται τέσσαρα ζεύγη κυρτῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν καὶ ἄς τὰς συμβολίσωμεν μὲ $\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2$, καὶ $\omega_1, \omega_2, \sigma_1, \sigma_2$. Αἱ γωνίαι $\varphi_1, \theta_1, \omega_2$ καὶ σ_2 κεῖνται ἐκτὸς τῆς ζώνης τῶν παραλλήλων καὶ συντόμως θὰ καλοῦνται γωνίαι ἐκτός, ἐνῶ αἱ γωνίαι $\varphi_2, \theta_2, \omega_1$ καὶ σ_1 ἔχουν κοινὸν μέρος μὲ τὴν ζώνην τῶν παραλλήλων καὶ συντόμως θὰ καλοῦνται γωνίαι ἐντός. Ἐάν ἐπὶ πλέον δύο γωνίαι ἐξ αὐτῶν κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης AB, ὅπως αἱ γωνίαι φ_1 καὶ ω_1 , θὰ καλοῦνται συντόμως γωνίαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ τέλος ἐάν δύο γωνίαι κεῖνται ἐκατέρωθεν τῆς τεμνούσης AB, ὅπως αἱ γωνίαι φ_2 καὶ ω_1 , θὰ καλοῦνται συντόμως γωνίαι ἐναλλάξ. Σχετικῶς μὲ τὰς γωνίας αὐτάς ἰσχύει τὸ κάτωθι θεώρημα.



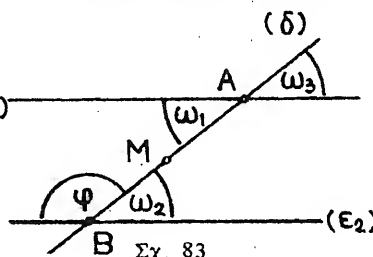
Σχ. 82

92. Θεώρημα. Ἐάν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τέμνονται ὑπὸ τρίτης, τότε αἱ σχηματιζόμεναι μὴ κοινῆς κορυφῆς γωνίαι :

- i) ἐντὸς ἐναλλάξ εἶναι ἰσαι
- ii) ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη (ε_1) εἶναι ἰσαι.
- iii) ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι παραπληρωματικά. Καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν (ε_1) καὶ (ε_2) δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ (δ) μία τέμνουσα αὐτάς εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B ἀντιστοίχως (σχ. 83).

Εἰς τὴν παράγραφον 82 εἶδομεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν εὐθείας (ε_1) ὡς πρὸς κέντρον σημεῖον κεῖμενον ἐκτὸς αὐτῆς, εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν (ε_1) .



Σχ. 83

Ἐάν ἐπομένως M εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος AB , ἡ κεντρικὴ συμμετρία μὲ κέντρον τὸ M μᾶς ἐξασφαλίζει προφανῶς τὸ B συμμετρικὸν τοῦ A . Τότε ἡ συμμετρικὴ εὐθεῖα τῆς (ε_1) θὰ εἶναι ἡ ἐκ τοῦ B παράλληλος τῆς (ε_1) , δηλαδὴ ἡ (ε_2) .

i) Λόγω τῆς συμμετρίας ὡς πρὸς τὸ M ἔχομεν :

$$(1) \quad \omega_1 = \omega_2,$$

ἥτοι αἱ ἐντὸς ἐκτὸς ἐναλλάξ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

ii) Ἐπειδὴ $\omega_1 = \omega_3$ ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ λόγῳ τῆς (1) ἔχομεν :

$$\omega_2 = \omega_3$$

ἥτοι αἱ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι ἴσαι.

iii) Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ω_2 καὶ φ εἶναι παραπληρωματικά, ἥτοι $\omega_2 + \varphi = 2\text{r}$ καὶ λόγῳ τῆς (1) ἔχομεν :

$$\omega_1 + \varphi = 2\text{r},$$

ἥτοι αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι παραπληρωματικά.

Ἀντιστρόφως Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, ἐπειδὴ ἔχει μίαν ὑπόθεσιν $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$ καὶ τρία συμπεράσματα τὰς προτάσεις i), ii) καὶ iii), ἔχει τρία ἀντίστροφά, τὰ ὁποῖα ὁμῶς δύνανται νὰ συνοψισθοῦν εἰς τὸ ἑξῆς :

Ἐάν ἀληθεύει μία τῶν προτάσεων i), ii), iii) ἀληθεύουν καὶ αἱ ἕτεραι δύο καὶ αἱ εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι παράλληλοι.

Ἐάν ἀληθεύῃ μία τῶν προτάσεων i), ii), iii) εὐκόλως φαίνεται ὅτι ἀληθεύουν καὶ αἱ ἕτεραι δύο (διατί ;). Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ δείξωμεν ὅτι ἐάν ἀληθεύῃ μία ἐξ αὐτῶν, ἔστω ἡ i), ἥτοι ἐάν αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῆς τεμνοῦσης AB ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίαι ω_1 καὶ ω_2 εἶναι ἴσαι, τότε αἱ εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι παράλληλοι (σχ. 84).

Τοῦτο πράγματι συμβαίνει, διότι ἐάν αἱ (ε_1) καὶ (ε_2) ἐτέμνοντο ἔστω εἰς τὸ σημεῖον P , θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν (ε) ἐκ τοῦ B παράλληλον τῆς (ε_1) , ἡ ὁποία θὰ σχηματίζῃ μετ' αὐτῆς τὰς ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας, δηλαδὴ

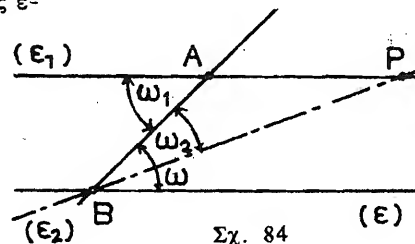
$$(1) \quad \omega_1 = \omega$$

Ἐξ ὑποθέσεως ὁμῶς ἔχομεν

$$(2) \quad \omega_1 = \omega_2$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι

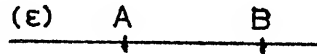
$$(3) \quad \omega = \omega_2$$



Αἱ γωνίαι ὁμῶς ω καὶ ω_2 ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν B , κοινὴν τὴν πλευρὰν BA καὶ κοινὸν μέρος. Ἐπομένως ταυτίζονται ἐφ' ὅσον εἶναι ἴσαι

και άρα ή εϋθεΐα (ε_2) ταυτίζεται με την εκ του B παράλληλον τής (ε_1) , ήτοι $(\varepsilon_2) \equiv (\varepsilon) // (\varepsilon_1)$.

93. Όμορροπος και αντίρροπος παραλληλία. Συνυφασμένη με την έννοιαν τής εϋθείας (γενικώτερον τής γραμμής) είναι και ή φορά διαγραφής της. Έάν επί δεδομένης εϋθείας έχη καθορισθῇ και ή φορά διαγραφής της, δηλαδή ή φορά κατά την οποίαν κινητὸν σημείον άνευ παλινδρομήσεως διαγράφει την εϋθεΐαν, τότε αϋτη λέγεται **προσανατολισμένη εϋθεΐα**. Εΐναι γνωστόν οτι επί μιᾶς εϋθείας (ε) (σχ. 85), δύο μόνον φοραὶ διαγραφής υπάρχουν, ή εκ του A πρὸς τὸ B ἢ ή εκ του B πρὸς τὸ A. Αϋται καλοῦνται αντίθετοι και εάν την μίαν ἐξ αὐτῶν την καλέσωμεν θετικὴν, ή ἄλλη θα λέγεται ἀρνητική. Την εϋθεΐαν (ε) επί τής οποίας ὠρίσθη ή θετική και ή ἀρνητική φορά διαγραφής της, θα την συμβολίζωμεν $\vec{(\varepsilon)}$.

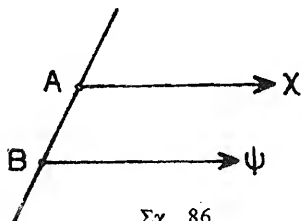


Σχ. 85

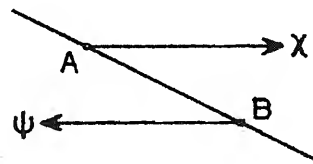
Η έννοια τής όμορρόπου παραλληλίας ἀναφέρεται εἰς παραλλήλους εϋθείας τής αὐτῆς φορᾶς διαγραφής, ἀντιστοίχως ή έννοια τής ἀντιρρόπου παραλληλίας ἀναφέρεται εἰς παραλλήλους εϋθείας ἀντιθέτου φορᾶς διαγραφής.

Αἱ έννοιαι ἐπεκτείνονται και εἰς παραλλήλους ήμιευθείας ὡς και εἰς παράλληλα εϋθύγραμμά τμήματα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Φανερόν εἶναι οτι ή έννοια τοῦ «όμορρόπου» ἢ «ἀντιρρόπου» διὰ τὰς εϋθείας, ήμιευθείας και εϋθύγραμμα τμήματα, συνεπάγεται ὡπωσδήποτε και την έννοιαν τής παραλληλίας.

Εἰς τὸ σχῆμα 86 αἱ παράλληλοι ήμιευθεΐαι \vec{Ax} και \vec{By} εἶναι όμορροποι και τὸ χαρακτηριστικόν των εἶναι οτι ή εϋθεΐα AB τὰς ἀφήνει εἰς τὸ ἐν ήμιστίδον εκ τῶν δύο τὰ ὁποῖα ὀρίζει, ἐνῶ εἰς τὸ σχῆμα 87 αἱ ήμιευθεΐαι \vec{Ax} και



Σχ. 86



Σχ. 87

\vec{By} εἶναι ἀντίρροποι και τὸ χαρακτηριστικόν των εἶναι οτι ή εϋθεΐα AB ἔχει τὰς ήμιευθείας ἐκατέρωθεν αὐτῆς.

Η όμορροπος παραλληλία δύο εϋθειῶν $\vec{(\varepsilon_1)}$ και $\vec{(\varepsilon_2)}$ συμβολίζεται $(\varepsilon_1) \uparrow \uparrow (\varepsilon_2)$, ἀντιστοίχως ή ἀντίρροπος παραλληλία με τὸ σύμβολον $\uparrow \downarrow$. Όμοίως και διὰ τὰς όμορρόπους ἀντιστοίχως τὰς ἀντιρρόπους ήμιευθείας ὡς και τὰ εϋθύγραμμα τμήματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

36. Έκ τῶν ὀκτὼ γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζουν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης, ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὰ $4/5$ τῆς ὀρθῆς. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ λοιπαὶ ἑπτὰ γωνίαι εἰς μέρη ὀρθῆς καὶ εἰς μοίρας.

37. Δίδονται δύο παράλληλοι καὶ ὁμορροποὶ ἡμιευθεῖαι \vec{Ax} καὶ \vec{By} . Φέρομεν τὸ τμήμα AB καὶ λαμβάνομεν σημεῖον O ἐντὸς τῆς ζώνης τῶν παραλλήλων ἡμιευθειῶν, φέρομεν δὲ καὶ τὰ τμήματα OA, OB , Δείξατε ὅτι :

$$\widehat{AOB} = \widehat{OAx} + \widehat{OBy}$$

38. Δίδεται εὐθεῖα (δ) καὶ δύο σημεία A καὶ B αὐτῆς. Ἄγομεν τὰς ἡμιευθείας Ax καὶ By παραλλήλους μεταξύ των καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς (δ) , λαμβάνομεν δὲ σημεῖον O ἐκτὸς τῆς ζώνης τῶν παραλλήλων ἡμιευθειῶν καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς (δ) ὅπου εὐρίσκονται αἱ ἡμιευθεῖαι. Δείξατε ὅτι ἡ γωνία \widehat{AOB} ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν \widehat{OAx} καὶ \widehat{OBy} .

39. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζουν τὰς ἐκτὸς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἢ τὰς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς, τότε αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

40. Δίδεται ἡ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ $AB\Gamma\Delta$. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν κυρτῶν γωνιῶν $\widehat{AB\Gamma}$ καὶ $\widehat{B\Gamma\Delta}$ τέμνονται.

41. Ἐὰν (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) εἶναι δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ (δ) μία τέμνουσά αὐτάς, δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο ἐντὸς ἐναλλάξ γωνιῶν εἶναι παράλληλοι, ἐνῶ αἱ διχοτόμοι δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν εἶναι κάθετοι.

42. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σχῆμα ποὺ ἀποτελοῦν δύο ἀντίρροποι ἡμιευθεῖαι, ἔχει κέντρον συμμετρίας.

Β'.

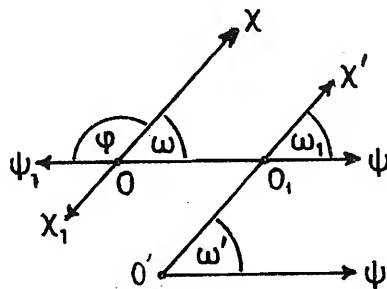
43. Δύο συνεπίπεδοι εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) ἔχουν τὴν ἀκόλουθον ιδιότητα : Κάθε εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου τέμνουσα τὴν μίαν τέμνει καὶ τὴν ἄλλην. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(\epsilon_1) \parallel (\epsilon_2)$.

44. Ἐὰν δύο ἡμιεπίπεδα (Π_1) καὶ (Π_2) τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν, δείξατε ὅτι αἱ ἀρχικαὶ τῶν εὐθειῶν εἶναι παράλληλοι ἢ ταυτίζονται.

Γωνίαι με τὰς πλευράς των παραλλήλους ἢ καθέτους.

94. Θεώρημα. Δύο γωνίαι με τὰς πλευράς των παραλλήλους εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικάι.

Ἀπόδειξις. i) Ἐστωσαν xOy καὶ $x'O'y'$ δύο γωνίαι (σχ. 88), με $Ox \uparrow O'x'$ καὶ $Oy \uparrow O'y'$. Ἡ εὐθεῖα Oy , ἐφ' ὅσον τέμνει τὴν Ox , θὰ τέμνη καὶ τὴν παράλληλὸν τῆς $O'x'$ εἰς σημεῖον O_1 . Τότε θὰ εἶναι : $\omega = \omega_1$ (1) λόγφ τῶν παραλλήλων $Ox \uparrow O'x'$ τεμνομένων ὑπὸ τῆς



Σχ. 88

Oy και $\omega_1 = \omega'$ (2) λόγω τῶν παραλλήλων $Oy \uparrow \uparrow O'y'$ τεμνομένων ὑπὸ τῆς $O'x'$. Ἐκ τῶν σχέσεων (1) και (2) ἐπεταί $\omega = \omega'$ (3) $\Rightarrow \widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

ii) Ἐπειδὴ εἶναι προφανῶς $\omega + \varphi = 2^\circ$, ἐπὶ τῇ βάσει τῆς σχέσεως (3), ἡ τελευταία γράφεται $\omega' + \varphi = 2^\circ \Rightarrow \widehat{x'O'y'} + \widehat{xOy_1} = 2^\circ$.

Σημειώσεις. Πρὸς διευκρίνισιν δυνάμεθα νὰ διαχωρίσωμεν τὰς δύο περιπτώσεις τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ὡς ἀκολουθῶς :

Δύο γωνίαι με τὰς πλευράς των παραλλήλους εἶναι ἴσαι, ἐὰν αἱ πλευραὶ των εἶναι ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι, ἐνῶ εἶναι παραπληρωματικαί, ἐὰν ἐν ζευγὸς πλευρῶν εἶναι ὁμόρροποι, τὸ δὲ ἕτερον ζευγὸς πλευρῶν εἶναι ἀντίρροποι.

95. Θεώρημα. Δύο γωνίαι με τὰς πλευράς των καθέτους εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.

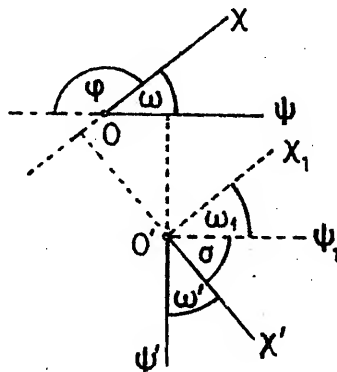
Ἀπόδειξις. i) Ἐστώσαν \widehat{xOy} και $\widehat{x'O'y'}$ δύο γωνίαι (σχ. 89), με τὰς πλευράς των καθέτους, ἥτοι $Ox \perp O'x'$ (1) και $Oy \perp O'y'$ (2). Ἐκ τῆς κορυφῆς O' φέρομεν $O'x_1 \perp O'x'$ (3) και $O'y_1 \perp O'y'$ (4). Ἐκ τῶν σχέσεων (1) και (3) ἐπεταί $Ox \parallel O'x_1$ και ἐκ τῶν (2) και (4) ἐπεταί $Oy \parallel O'y_1$, ἥτοι (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα) αἱ γωνίαι \widehat{xOy} και $\widehat{x_1O'y_1}$ εἶναι ἴσαι, με τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἔχουν τὰς πλευράς των ὁμορρόπους (ἀντιστοίχως ἀντιρρόπους), ἢ $\omega_1 = \omega$ (5). Εἶναι φανερόν ὅμως ὅτι $\omega_1 = \omega'$ (6), διότι ἀμφότεραι εἶναι συμπληρωματικαὶ τῆς αὐτῆς γωνίας σ ($\widehat{x_1O'x'} = \widehat{y_1O'y'} = 1^\circ$). Ἐκ τῶν σχέσεων (5) και (6) λαμβάνομεν $\omega = \omega' \Rightarrow \widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

ii) Ἐπειδὴ εἶναι προφανῶς $\omega + \varphi = 2^\circ \Rightarrow \omega' + \varphi = 2^\circ$.

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα δύνανται νὰ ἐξαχθοῦν τὰ ἀκόλουθα συμπεράσματα διὰ δύο γωνίας με τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν ἢ καθέτους μίαν πρὸς μίαν :

- i) Αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἐὰν ἀμφότεραι εἶναι ὀξεῖαι.
- ii) Αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἐὰν ἀμφότεραι εἶναι ἀμβλεῖαι.
- iii) Αἱ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαὶ ἐὰν μία ἐξ αὐτῶν εἶναι ὀξεῖα και ἡ ἄλλη ἀμβλεῖα.

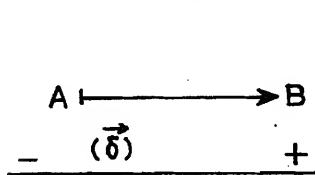
96. Ἰσότης και πράξεις εἰς τὸ σύνολον τῶν προσανατολισμένων εὐθυγράμμων τμημάτων. Μία προσανατολισμένη εὐθεῖα ($\vec{\delta}$) ἐφοδιάζει τὸ ἐπίπεδον με μίαν θετικὴν φορὰν (και τὴν ἀντίθετον αὐτῆς ἀρνητικὴν). Τὸ σύνολο



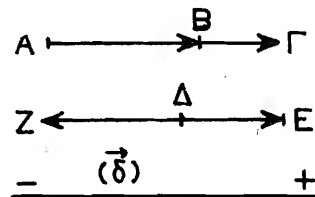
Σχ. 89

λον όλων τῶν προσανατολισμένων εὐθυγράμμων τμημάτων τοῦ ἐπιπέδου, τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν διεύθυνσιν $(\vec{\delta})$, ἀποτελεῖ ἐν ὑποσύνολον Δ τοῦ συνόλου τῶν προσανατολισμένων εὐθυγράμμων τμημάτων τοῦ ἐπιπέδου. Κάθε εὐθύγραμμον τμήμα τοῦ Δ με ἀκρά σημεῖα A καὶ B καὶ φορὰν διαγραφῆς ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B, συμβολίζεται με \vec{AB} . Τὸ A καλεῖται **ἀρχή** αὐτοῦ καὶ τὸ B **τέλος** ἢ **πέρας**. Εἰς τὴν σχηματικὴν ἀπεικόνισιν (σχ. 90), τοποθετοῦμεν αἰχμὴν βέλους εἰς τὸ τέλος B τοῦ AB, ἐνδεικτικὴν τῆς φορᾶς διαγραφῆς του.

Δύο προσανατολισμένα τμήματα τῆς αὐτῆς διεύθυνσεως καλοῦνται **δια-**



Σχ. 90



Σχ. 91

δοχικά, ὅταν τὸ τέλος τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀρχὴ διὰ τὸ ἄλλο ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐὰν αὐτὰ εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα.

Εἰς τὸ σχῆμα 91 τὰ \vec{AB} καὶ $\vec{B\Gamma}$ εἶναι διαδοχικά, ὡς ἐπίσης καὶ τὰ $\vec{\Delta E}$ καὶ \vec{EZ} .

Ἰσα καλοῦνται δύο προσανατολισμένα τμήματα, τότε καὶ μόνον τότε ὅταν ἔχουν :

- α) ἴσα μήκη
- β) τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν [παράλληλα πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (δ)].
- γ) τὴν αὐτὴν φορὰν (ὁμόρροπα).

Ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος εἶναι ἀνακλαστικὴ, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική, ἥτοι ἂν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ εἶναι προσανατολισμένα τμήματα, τότε :

- i) $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$
- ii) $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\beta} = \vec{\alpha}$
- iii) $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \wedge \vec{\beta} = \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\gamma}$

97. Άθροισμα προσανατολισμένων τμημάτων τῆς αὐτῆς διεύθυνσεως. Άθροισμα δύο διαδοχικῶν προσανατολισμένων τμημάτων \vec{AB} καὶ $\vec{B\Gamma}$ (σχ. 91) καλεῖται τὸ προσανατολισμένον τμήμα $\vec{A\Gamma}$ με ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου καὶ τέλος τὸ τέλος τοῦ δευτέρου τμήματος. Συμβολικῶς γράφομεν $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}$ (ὁμοίως εἰς τὸ σχῆμα εἶναι $\vec{\Delta E} + \vec{EZ} = \vec{\Delta Z}$). Εἶναι φανερόν ὅτι τὸ $\vec{A\Gamma}$ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν $(\vec{\delta})$ (διὰ τὴν ;) καὶ ἐπομένως ἀνήκει καὶ αὐτὸ εἰς τὸ σύνολον Δ . Ἄρα ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως (διαδικασία εὐρέσεως τοῦ ἀθροίσματος) εἶναι ἐσωτερικὴ πρᾶξις τοῦ συνόλου Δ , ἥτοι τὸ σύνολον Δ εἶναι κλειστὸν ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν.

Ἐάν τὰ πρὸς ἄθροισιν προσανατολισμένα τμήματα δὲν εἶναι διαδοχικά, ταῦτα δύνανται νὰ καταστοῦν διαδοχικά διὰ μετατοπίσεως.

Ἀναλόγως ὀρίζεται τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο προσανατολισμένων τμημάτων, ἐάν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθέσωμεν τὸ τρίτον κ.ο.κ.

Ἡ πράξις τῆς προσθέσεως εἰς τὸ σύνολον Δ , εἶναι ἀντιμεταθετική προσεταιριστική καὶ μονότροπος, ἔχει δὲ οὐδέτερον στοιχεῖον τὸ μηδενικὸν προσανατολισμένον τμήμα, συμβολιζόμενον μὲ $\vec{0}$, ἥτοι ἐάν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ἀνήκουν εἰς τὸ Δ ἰσχύουν αἱ ιδιότητες :

$$i) \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$$

$$ii) (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$$

$$iii) \vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$$

Αἱ ἀποδείξεις εἶναι περίπου ἀνάλογοι πρὸς ἐκείνας διὰ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα.

98. Ἀντίθετα καλοῦνται δύο προσανατολισμένα τμήματα τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ἔχουν ἄθροισμα τὸ μηδενικὸν προσανατολισμένον τμήμα. Δύο ἀντίθετα προσανατολισμένα τμήματα εἶναι ὅπωςδὴποτε ἀντίρροπα. Διὰ κάθε τμήμα \vec{AB} , ἀντίθετον εἶναι τὸ \vec{BA} , διότι $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$. Ἀρα $\vec{AB} = -\vec{BA} + \vec{0} \Rightarrow \vec{AB} = -\vec{BA}$.

Ἡ διαφορά $\vec{AB} - \vec{\Gamma\Delta}$ δύο προσανατολισμένων τμημάτων, ἀνάγεται εἰς ἄθροισιν, διότι $\vec{AB} - \vec{\Gamma\Delta} = \vec{AB} - (-\vec{\Delta\Gamma}) = \vec{AB} + \vec{\Delta\Gamma}$

Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις προσανατολισμένου τμήματος ἐπὶ ἀκέραιον, ἀντιστοίχως ρητόν, ἀνάγονται εἰς τὰς ἀντιστοίχους πράξεις τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων μὲ τὴν παρατήρησιν ὅτι ἐδῶ δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν τὰς πράξεις ταύτας καὶ δι' ἀρνητικούς πολλαπλασιαστὰς (ἀντιστοίχως διαιρέτας). Ὅταν εἶναι θετικὸς ὁ πολλαπλασιαστὴς (ἢ διαιρέτης), τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ὁμόρροπον τμήμα τοῦ ἀρχικοῦ, ἐνῶ ὅταν εἶναι ἀρνητικὸς ὁ πολλαπλασιαστὴς (ἢ διαιρέτης), τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀντίρροπον τμήμα τοῦ ἀρχικοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

45. Δίδονται δύο ζεύγη παραλλήλων εὐθειῶν $(\epsilon_1) // (\epsilon_2)$ καὶ $(\zeta_1) // (\zeta_2)$ αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Εἰς τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

i) Αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

ii) Αἱ διπλαναὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

46. Δίδεται γωνία \widehat{xOy} . Φέρομεν $Ox_1 \perp Ox$ καὶ πρὸς τὸ μέρος ὅπου κεῖται ἡ Oy καὶ $Oy_1 \perp Oy$ καὶ ὅχι πρὸς τὸ μέρος ὅπου κεῖται ἡ Ox . Δείξατε ὅτι αἱ γωνίαι \widehat{xOy} , $\widehat{x_1Oy_1}$ εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν εἶναι κάθετοι.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

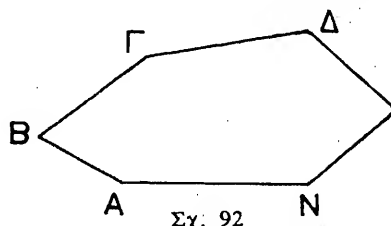
ΠΟΛΥΓΩΝΑ

99. Ὅρισμός. Πολύγωνον καλεῖται τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ μία κλειστὴ τεθλασμένη γραμμὴ $AB\Gamma \dots NA$.

Αἱ κορυφαὶ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς καλοῦνται **κορυφαὶ** τοῦ πολυγώνου καὶ αἱ πλευραὶ τῆς πλευραὶ αὐτοῦ.

Ἐν πολύγωνον δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ὀλιγωτέρας ἀπὸ τρεῖς κορυφάς, διότι ὀλιγώτερα ἀπὸ τρία σημεῖα δὲν ὀρίζουν τεθλασμένην γραμμὴν.

Προσανατολισμένον καλεῖται τὸ πολύγωνον ὅταν ἡ τεθλασμένη γραμμὴ, ποὺ τὸ ἀποτελεῖ, εἶναι προσανατολισμένη, δηλαδὴ ὅταν ἔχῃ ὀρισθῇ ἡ φορὰ διαγραφῆς τῆς.



100. Θεώρημα. Ἐν πολύγωνον ἔχει τὸν ἴδιον ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ πλευρῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω πολύγωνον $AB\Gamma \dots N$ μὲν n τὸ πλῆθος πλευρᾶς (σχ. 92). Παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν κορυφῶν καὶ τῶν πλευρῶν του, κατὰ τὴν ἔννοιαν $A \leftrightarrow AB$, $B \leftrightarrow B\Gamma$, ..., $N \leftrightarrow NA$. Ἀρα οἱ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου εἶναι ἰσοπληθεῖς πρὸς τὰς πλευρὰς του.

Καθ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἢ κορυφῶν ἑνὸς πολυγώνου, εἶναι 3, 4, 5, ..., n , τὸ πολύγωνον καλεῖται τρίγωνον ἢ τρίπλευρον, τετράπλευρον, πεντάγωνον ἢ πεντάπλευρον, ..., n /γωνον ἢ n /πλευρον ἀντιστοίχως.

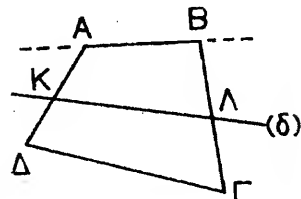
Περίμετρος ἑνὸς πολυγώνου καλεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Διαδοχικαὶ κορυφαὶ καλοῦνται δύο κορυφαί, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἄκρα μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς.

Διαδοχικαὶ πλευραὶ καλοῦνται δύο πλευραί, αἱ ὁποῖαι συμβάλλουν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν κορυφήν.

Διαγώνιος ἑνὸς πολυγώνου καλεῖται κάθε εὐθύγραμμον τμήμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἄκρα δύο μὴ διαδοχικὰς κορυφάς.

Κυρτὸν πολύγωνον καλεῖται κάθε πολύγωνον, όταν ἡ κλειστὴ τεθλασμένη γραμμὴ, ἡ ὁποία τὸ ἀποτελεῖ εἶναι κυρτὴ. Τότε ἐν κυρτὸν πολύγωνον εἰς δύο τὸ πολὺ σημεῖα δύναται νὰ τέμνεται ὑπὸ μιᾶς εὐθείας (δ) ἡ ὁποία δὲν περιέχει πλευρὰν αὐτοῦ (σχ. 93) καὶ κάθε πλευρὰ του προεκτεινομένη ἀφήνει τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ ἐν ἐκ τῶν δύο ἡμιεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ὀρίζει.



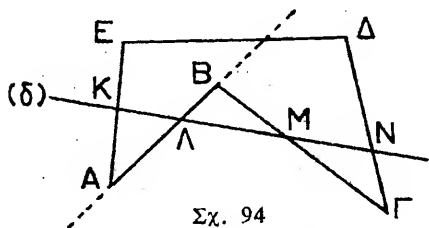
Σχ. 93

Μὴ κυρτὸν καλεῖται κάθε πολύγωνον όταν ἡ κλειστὴ τεθλασμένη γραμμὴ, ἡ ὁποία τὸ ἀποτελεῖ εἶναι μὴ κυρτὴ.

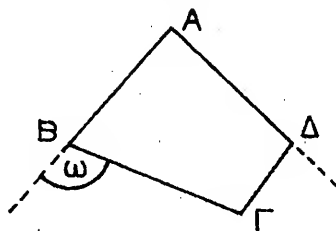
Τότε ὑπάρχει μία τοῦλάχιστον εὐθεῖα (δ), ἡ ὁποία δὲν περιέχει πλευρὰν αὐτοῦ καὶ ἡ ὁποία τὸ τέμνει εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα K, Λ, M, N (σχ. 94) καὶ ἐπὶ πλέον ὑπάρχει μία τοῦλάχιστον πλευρὰ αὐτοῦ AB, ἡ ὁποία προεκτεινομένη χωρίζει τὸ πολύγωνον εἰς δύο μέρη ἐκατέρωθεν αὐτῆς.

Γωνία ἐνὸς κυρτοῦ πολυγώνου καλεῖται ἡ κυρτὴ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ του.

Κάθε γωνία κυρτοῦ πολυγώνου περιέχει ἐντὸς αὐτῆς ὁλόκληρον τὸ πολύγωνον (σχ. 95).



Σχ. 94

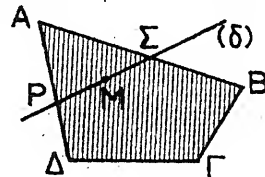


Σχ. 95

Ἐξωτερικὴ γωνία μιᾶς γωνίας \widehat{B} κυρτοῦ πολυγώνου λέγεται ἡ ἐφεξῆς παραπληρωματικὴ αὐτῆς γωνία ω (σχ. 95).

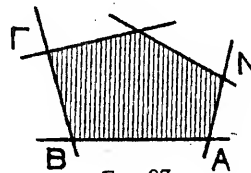
Ἐσωτερικὸν σημεῖον ἐνὸς κυρτοῦ πολυγώνου καλεῖται κάθε σημεῖον M, όταν κάθε εὐθεῖα (δ) διερχομένη δι' αὐτοῦ τέμνει τὸ πολύγωνον εἰς δύο σημεῖα P καὶ Σ (σχ. 96).

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἐσωτερικῶν σημείων καλεῖται ἐσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου.



Σχ. 96

★ **Παρατήρησις.** Ἐπειδὴ παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου ABΓ...N, ἐκάστη γωνία περιέχει ἐντὸς αὐτῆς ὁλόκληρον τὸ πολύγωνον, τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ κοινὸν μέρος τῶν ἐσωτερικῶν τῶν γωνιῶν του (σχ. 97), δηλαδὴ ὡς ἡ τομὴ



Σχ. 97

$$\text{ἐς. } \widehat{A} \cap \text{ἐς. } \widehat{B} \cap \dots \cap \text{ἐς. } \widehat{N}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

B'.

47. Δείξατε ότι τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ ταυτίζεται μετὰ τὴν τομὴν τῶν ἐσωτερικῶν δύο γωνιῶν αὐτοῦ, ἥτοι :

$$\text{ἐσ. } AB\Gamma = \text{ἐσ. } \widehat{B} \cap \text{ἐσ. } \widehat{\Gamma}.$$

48. Δείξατε ότι τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ ταυτίζεται μετὰ τὴν τομὴν τῶν ἐσωτερικῶν δύο ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ, ἥτοι :

$$\text{ἐσ. } AB\Gamma\Delta = \text{ἐσ. } \widehat{A} \cap \text{ἐσ. } \widehat{\Gamma} = \text{ἐσ. } \widehat{B} \cap \text{ἐσ. } \widehat{\Delta}.$$

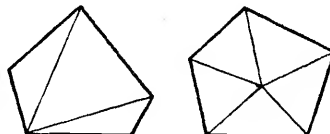
49. Δείξατε ότι τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου $A_1A_2A_3\dots A_{2n}$ μετὰ $2n$ πλευρὰς ταυτίζεται μετὰ τὴν τομὴν τῶν ἐσωτερικῶν ἀρτίας διαδοχικῆς τάξεως γωνιῶν του, ἥτοι

$$\text{ἐσ. } A_1A_2A_3\dots A_{2n} = \text{ἐσ. } A_2 \cap \text{ἐσ. } A_4 \cap \dots \cap \text{ἐσ. } A_{2n}.$$

ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

101. Τὸ τρίγωνον εἶναι τὸ ἀπλούστερον ἀλλὰ καὶ τὸ σημαντικώτερον τῶν πολυγώνων, διότι κάθε πολύγωνον δύναται κατὰ διαφόρους τρόπους νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρίγωνα (σχ. 98).

Κύρια στοιχεῖα τοῦ τριγώνου καλοῦνται αἱ τρεῖς πλευραὶ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι του. Οὕτως ἓν τρίγωνον ἔχει ἑξὺς κύρια στοιχεῖα. Ἐκάστη πλευρὰ τοῦ τριγώνου δύναται νὰ λέγεται καὶ βάσις αὐτοῦ.



102. Ὑψη-διάμεσοι-διχοτόμοι. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$.

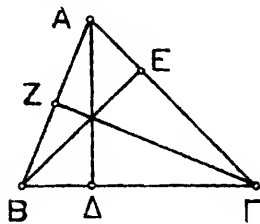
Σχ. 98

i) Τὸ κάθετον εὐθύγραμμον τμήμα AA' ποὺ ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν A ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ ἀπέναντι πλευρὰ $B\Gamma$, καλεῖται **ὕψος** τοῦ τριγώνου ποὺ ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν A ἐπὶ τὴν πλευρὰν $B\Gamma$. Ἀναλόγως ὀρίζονται καὶ τὰ ὕψη ἀπὸ τὰς κορυφὰς B καὶ Γ . Οὕτω κάθε τρίγωνον ἔχει τρία ὕψη ἀγόμενα ἐκ τῶν τριῶν κορυφῶν του, ἥτοι AA' , BE , ΓZ (σχ. 99).

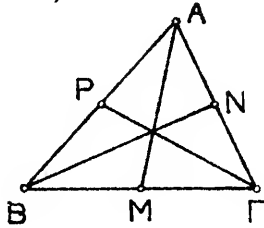
ii) Ἄν M εἴναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$, τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AM καλεῖται **διάμεσος** τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὴν κορυφὴν A ἢ ἐπὶ τὴν πλευρὰν $B\Gamma$. Ἀναλόγως ὀρίζονται καὶ αἱ διάμεσοι ἀπὸ τὰς κορυφὰς B καὶ Γ . Οὕτω κάθε τρίγωνον ἔχει τρεῖς διαμέσους ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς του, ἥτοι AM , BN , ΓP (σχ. 100).

iii) Ἐστω Ax ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας \widehat{A} , ἡ ὁποία τέμνει εἰς τὸ σημεῖον E τὴν πλευρὰν $B\Gamma$. Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AE καλεῖται **διχοτόμος** τῆς γωνίας \widehat{A} τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$. Ἀναλόγως ὀρίζονται καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν

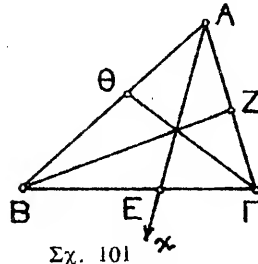
γωνιῶν \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$. Οὕτω, κάθε τρίγωνον ἔχει τρεῖς διχοτόμους, τὰς AE , BZ , $\Gamma\Theta$ (σχ. 101).



Σχ. 99



Σχ. 100



Σχ. 101

iv) Ἐστω Ay ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας \widehat{A} . Ἐὰν αὕτη τέμνῃ τὴν προέκτασιν τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς $B\Gamma$ εἰς τὸ E (σχ. 102), τὸ τμήμα AE καλεῖται ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας \widehat{A} τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$. Οὕτω κάθε τρίγωνον ἔχει τρεῖς ἐξωτερικὰς διχοτόμους, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς του.

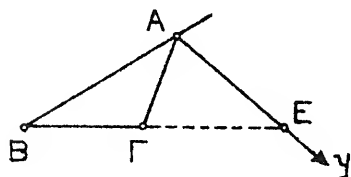
Τὰ ὕψη καὶ αἱ διάμεσοι ἑνὸς τριγώνου καθὼς καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν αὐτοῦ καλοῦνται δευτερεύοντα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου. Ὑπάρχουν καὶ ἄλλα δευτερεύοντα στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου τὰ ὁποῖα θὰ γνωρίσωμεν εἰς τὰ ἐπόμενα.

103. Συνηθέστεροι συμβολισμοί. Ἐν τρίγωνον μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα A , B καὶ Γ συμβολίζεται μὲ τριγ. $AB\Gamma$ ἢ $\triangle AB\Gamma$ ἢ ἀπλῶς $AB\Gamma$ ὅταν προηγουμένως ἔχῃ ἀναφερθῇ ἡ λέξις τρίγωνον.

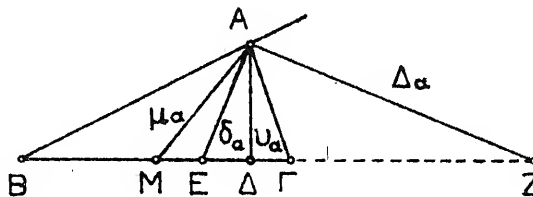
Αἱ πλευραὶ $B\Gamma$, ΓA καὶ AB ποὺ κεῖνται ἀπέναντι τῶν κορυφῶν A , B καὶ Γ ἀντιστοίχως, συμβολίζονται μὲ α , β καὶ γ ἀντιστοίχως, ἐνῶ ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου συμβολίζεται μὲ 2τ , ἥτοι

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\tau.$$

Τὰ ὕψη ἀπὸ τὰς κορυφὰς A , B καὶ Γ συμβολίζονται μὲ u_a , u_b καὶ u_γ ἀντιστοίχως, ὁμοίως αἱ ἀντίστοιχοι διάμεσοι μὲ μ_a , μ_b καὶ μ_γ καὶ αἱ ἀντίστοιχοι διχοτόμοι μὲ δ_a , δ_b καὶ δ_γ , ἐνῶ αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι μὲ Δ_a , Δ_b καὶ Δ_γ (σχ. 103).



Σχ. 102



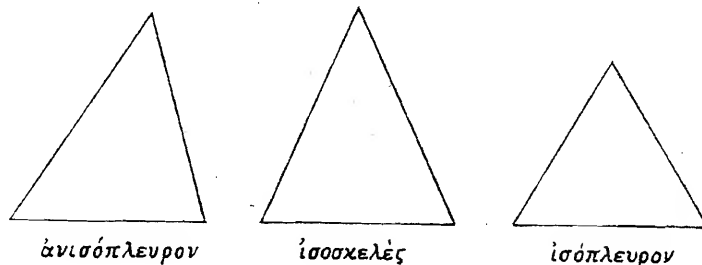
Σχ. 103

104. Εἶδη τριγώνων. Τὰ τρίγωνα δυνάμεθα νὰ τὰ κατατάξωμεν εἰς ἕξ κατηγορίας ἐξετάζοντες τὰ κύρια στοιχεῖα αὐτῶν, ἥτοι τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας των. Καὶ ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς ἔχομεν τὰς ἑξῆς κατηγορίας.

i) Ἀνισόπλευρον ἢ σκαληνὸν καλεῖται ἐν τρίγωνον, ὅταν αἱ πλευραὶ τοῦ εἶναι ἄνισοι ἀνὰ δύο.

ii) Ἰσοσκελὲς καλεῖται ἐν τρίγωνον ὅταν δύο πλευραὶ τοῦ εἶναι ἴσαι. Ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ συνήθως καλεῖται βᾶσις.

iii) Ἰσόπλευρον καλεῖται ἐν τρίγωνον, ὅταν καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ εἶναι ἴσαι.



ἀνισόπλευρον

ἰσοσκελές

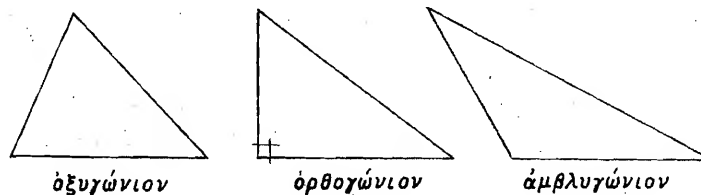
ἰσόπλευρον

Σχ. 104

Ὡς πρὸς τὰς γωνίας ἔχομεν :

iv) Ὄξυγώνιον καλεῖται ἐν τρίγωνον, τοῦ ὁποῦ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι.

v) Ὄρθογώνιον καλεῖται ἐν τρίγωνον, ὅταν ἡ μία τῶν γωνιῶν τοῦ εἶναι



ὀξυγώνιον

ὀρθογώνιον

ἀμβλυγώνιον

Σχ. 105

ὀρθή. Ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρὰ καλεῖται ὑποτείνουσα, αἱ ἄλλαι δὲ πλευραὶ καλοῦνται κάθετοι πλευραὶ τοῦ τριγώνου.

vi) Ἀμβλυγώνιον καλεῖται ἐν τρίγωνον, ὅταν ἡ μία ἐκ τῶν γωνιῶν τοῦ εἶναι ἀμβλεῖα.

ἈΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

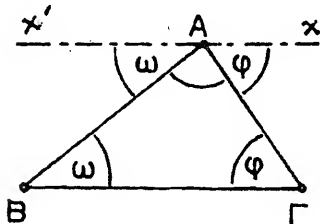
105. Θεώρημα. Εἰς κάθε τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ εἶναι 2α .

Ἀπόδειξις. Ἐστώ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τὴν ἐκ τοῦ Α παράλ-

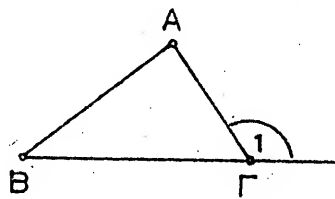
ληλον $\chi'Ax$ τῆς $B\Gamma$ (σχ. 106). Τότε θὰ εἶναι $\chi'AB = \hat{B} = \omega$ καὶ $\chi A\Gamma = \hat{\Gamma} = \varphi$, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων $\chi\chi'$ καὶ $B\Gamma$ τεμνομένων ὑπὸ τῶν AB καὶ $A\Gamma$ ἀντιστοιχῶς. Ἐπειδὴ $\chi Ax'$ εἶναι εὐθεΐα, ἔχομεν

$$\chi'AB + \hat{A} + \chi A\Gamma = 2\text{L} \quad \eta \quad \omega + \hat{A} + \varphi = 2\text{L}$$

$$\eta \quad \hat{B} + \hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\text{L}.$$



Σχ. 106



Σχ. 107

Πόρισμα I. Κάθε ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.

Πράγματι, ἂν $\hat{\Gamma}_1$ εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία εἰς τὴν κορυφὴν Γ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ (σχ. 107), ἔχομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma} = 2\text{L}$ ἀφ' ἑτέρου δὲ $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\text{L}$. Ἐξ αὐτῶν ἐπεταὶ ὅτι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A} + \hat{B}$.

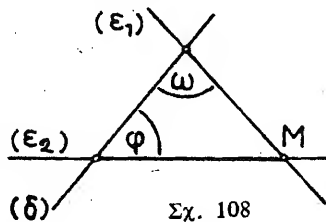
Πόρισμα II. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μία πρὸς μίαν, θὰ ἔχουν καὶ τὴν τρίτην αὐτῶν γωνίαν ἴσην. Τὰ τρίγωνα τότε θὰ λέγονται ἰσογώνια.

Πόρισμα III. Τὸ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον, μίαν μόνον ἀμβλείαν γωνίαν δύναται νὰ ἔχη, τὸ δὲ ὀρθογώνιον μίαν μόνον ὀρθὴν καὶ τὰς ἄλλας δύο ὀξείας.

Πόρισμα IV. Αἱ δύο ὀξείαι γωνίαι ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι συμπληρωματικαί.

Πόρισμα V. Ἄν δύο εὐθεΐαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης εὐθείας (δ) σχηματίζουν δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας μὲ ἄθροισμα μικρότερον τῶν 2L , αἱ εὐθεΐαι αὗται τέμνονται εἰς σημεῖον M πρὸς τὸ μέρος τῶν γωνιῶν τούτων (σχ. 108).

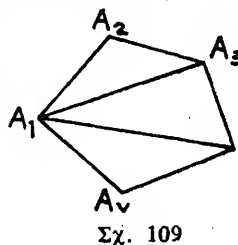
106. Θεώρημα. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κυρτοῦ πολυγώνου μὲ n πλευρὰς ἰσοῦται μὲ $2n - 4$ ὀρθὰς γωνίας.



Σχ. 108

Ἀπόδειξις. Ἐστω $A_1A_2\dots A_n$ κυρτὸν n /γωνον. Ἐκ μιᾶς κορυφῆς, ἔστω τῆς A_1 φέρομεν ὅλας τὰς διαγωνίους $A_1A_3, A_1A_4, \dots, A_1A_{n-1}$, διὰ τῶν ὁποίων

τὸ πολὺγωνον χωρίζεται εἰς $n - 2$ τρίγωνα (σχ. 109). Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων τούτων εἶναι προφανῶς ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου. Ἐπειδὴ τὸ κάθε τρίγωνον ἔχει ἄθροισμα γωνιῶν 2L , ἔπεται ὅτι τὰ $n - 2$ τρίγωνα ἔχουν ἄθροισμα γωνιῶν $2\text{L} \cdot (n - 2)$, ἥτοι $2n - 4$ ὀρθὰς γωνίας.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

50. Εἰς ἓν τρίγωνον $AB\Gamma$ ἡ γωνία \hat{A} εἶναι 70° , ἡ δὲ γωνία \hat{B} εἶναι τὰ $4/5$ τῆς \hat{A} . Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία $\hat{\Gamma}$ αὐτοῦ.

51. Εἰς πᾶν τρίγωνον $AB\Gamma$ δεῖξατε ὅτι : α) αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν \hat{B} καὶ $\hat{\Gamma}$, τεμνόμεναι εἰς σημεῖον O , σχηματίζουν γωνίαν ἴσην με $1\text{L} + \frac{\hat{A}}{2}$, β) αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν \hat{B} καὶ $\hat{\Gamma}$ τεμνόμεναι εἰς τὸ Z σχηματίζουν γωνίαν ἴσην με $1\text{L} - \frac{\hat{A}}{2}$ καὶ γ) μίᾳ ἐσωτερικῇ καὶ μίᾳ ἐξωτερικῇ διχοτόμῳ τῶν γωνιῶν \hat{B} καὶ $\hat{\Gamma}$ ἀντιστοίχως τεμνόμεναι εἰς τὸ K σχηματίζουν γωνίαν ἴσην με $\hat{A}/2$.

52. Δεῖξατε ὅτι ἡ γωνία τοῦ ὕψους καὶ τῆς διχοτόμου τριγώνου, ποὺ ἄγονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφήν, ἰσοῦται πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

53. Ἐάν εἰς κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν \hat{A} καὶ \hat{B} αὐτοῦ τέμνονται εἰς σημεῖον E , δεῖξατε ὅτι $\hat{E} = \frac{\hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2}$.

54. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἐνὸς κυρτοῦ : α) πενταγώνου, β) ἑξαγώνου, γ) δωδεκαγώνου.

55. Ἐάν δύο γωνίαι κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι παραπληρωματικαί, δεῖξατε ὅτι καὶ αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι αὐτοῦ θὰ εἶναι παραπληρωματικαί.

56. Πόσας πλευρὰς ἔχει ἓν κυρτὸν πολὺγωνον, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι α) 10 ὀρθαὶ γωνίαι, β) 16 ὀρθαὶ γωνίαι.

57. Δεῖξατε ὅτι, ἐάν μίᾳ γωνία τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

58. Ἐάν μίᾳ γωνία τριγώνου εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἁθροίσματος τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του, τὸ τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον.

59. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας \hat{A} σχηματίζει μετὰ τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ δύο γωνίας, τῶν ὁποίων ἡ διαφορά ἰσοῦται μετὰ τὴν διαφοράν τῶν γωνιῶν \hat{B} καὶ $\hat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου.

60. Δεῖξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου, τεμνόμεναι ἀνὰ δύο, σχηματίζουν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

61. Νὰ δεიχθῇ τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς διχοτόμους τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου.

B'.

62. Δείξατε ότι αι εξωτερικαί διχοτόμοι τῶν γωνιῶν \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$ ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 14^\circ$), τέμνονται ὑπὸ γωνίαν 45° .

63. Ἡ ὀξεία γωνία ποῦ σχηματίζουν αι διχοτόμοι δύο ἀπέναντι γωνιῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου, ἰσοῦται μετὰ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του.

64. Τὸ ἄθροισμα τῶν εξωτερικῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μετὰ 4 ὀρθάς.

65. Ἐάν ἡ γωνία \widehat{A} τριγώνου $AB\Gamma$ εἴναι 60° , αι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$ αὐτοῦ εἶναι ἰσον κεκλιμένοι πρὸς τὰς $A\Gamma$ καὶ AB ἀντιστοίχως.

66. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = 90^\circ$. Δείξατε ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας \widehat{A} σχηματίζει μετὰ τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ γωνίαν 45° .

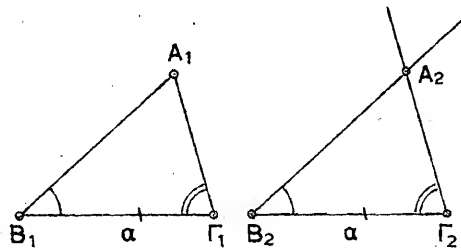
67. Ἐκάστη γωνία κυρτοῦ n -γώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἄθροισματος τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ. ($n \geq 4$).

68. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἴναι k ὀρθαί γωνίαι. Διερεῦνησις.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

107. Α' περίπτωσης. Θεώρημα. Ἐάν μία πλευρὰ τριγώνου ἰσοῦται πρὸς μίαν πλευρὰν ἄλλου τριγώνου καὶ αι προσκείμεναι γωνίαι τῆς πλευρᾶς αὐτῆς τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς προσκειμένας γωνίας τῆς ἴσης πλευρᾶς τοῦ ἄλλου τριγώνου, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν τὰ τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ μετὰ $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2 = a$ καὶ $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$ (σχ. 110). Μετατοπίζομεν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, ἔστω τὸ $A_1B_1\Gamma_1$ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ πλευρὰ αὐτοῦ $B_1\Gamma_1$ νὰ ταυτισθῇ μετὰ τὴν ἴσην τῆς $B_2\Gamma_2$ ταυτιζομένων τῶν κορυφῶν εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν ἴσαι γωνίαι καὶ ἐπὶ πλεοναί κορυφαὶ A_1 καὶ A_2 νὰ εὑρίσκωνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς $B_2\Gamma_2$.



Σχ. 110

Τότε, ἐπειδὴ $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ καὶ $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$, ἡ ἡμιευθεῖα B_1A_1 θὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ἡμιευθεῖας B_2A_2 ὡς καὶ ἡ ἡμιευθεῖα Γ_1A_1 μετὰ τῆς Γ_2A_2 . Τότε θὰ ταυτισθοῦν καὶ αι τομαὶ αὐτῶν A_1 καὶ A_2 . Ἀρα τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, διότι δύνανται νὰ ταυτισθοῦν διὰ μετατοπίσεως.

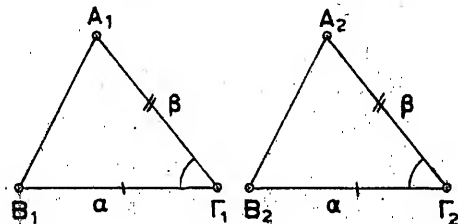
Παρατήρησις. Εἰς τὰ ἐπόμενα, ἐάν δύο τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ ἀποδειχθοῦν ἴσα ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ προηγουμένου κριτηρίου, χάριν συντομίας θὰ συμβολίζωμεν $A_1\overset{\Delta}{B}_1\overset{\Delta}{\Gamma}_1 = A_2\overset{\Delta}{B}_2\overset{\Delta}{\Gamma}_2$ ($\Gamma - \Pi - \Gamma$), ὅπου τὸ $\Gamma - \Pi - \Gamma$

θα σημαίνει Γωνία - Πλευρά - Γωνία, συμβολικόν τοῦ προηγουμένου κριτηρίου.

108. Β' περίπτωσης. Θεώρημα. Ἐάν δύο πλευραὶ ἐνὸς τριγώνου εἶναι ἴσαι μία πρὸς μίαν πρὸς δύο πλευρὰς ἄλλου τριγώνου καὶ ἡ γωνία τοῦ ἐνὸς τριγώνου ἢ περιεχομένη εἰς τὰς ἐν λόγῳ πλευρὰς εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τοῦ ἄλλου τριγώνου τὴν περιεχομένην εἰς τὰς ἴσας πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ πρώτου τριγώνου, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν τὰ τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ μὲ $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2 = \alpha$, $\Gamma_1A_1 = \Gamma_2A_2 = \beta$ καὶ $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{\Gamma_2}$ (σχ. 111). Μετατοπίζομεν τὸ τρίγωνον $A_1B_1\Gamma_1$ ἐπὶ τοῦ $A_2B_2\Gamma_2$

οὕτως, ὥστε ἡ γωνία $\widehat{\Gamma_1}$ νὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν ἴσην τῆς $\widehat{\Gamma_2}$ καὶ ἡ πλευρὰ $B_1\Gamma_1$ νὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν ἴσην τῆς $B_2\Gamma_2$. Τότε προφανῶς καὶ ἡ Γ_1A_1 θὰ ἔλθῃ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς Γ_2A_2 καὶ ἐπομένως τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἐφ' ὅσον δύνανται διὰ μετατοπίσεως νὰ ταυτισθοῦν.

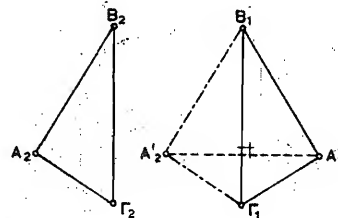


Σχ. 111

Παρατήρησις. Εἰς τὰ ἐπόμενα, ἡ ἰσότης δύο τριγώνων ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ προηγουμένου κριτηρίου θὰ συμβολίζεται, χάριν συντομίας, μὲ $A_1\overset{\Delta}{B}_1\Gamma_1 = A_2\overset{\Delta}{B}_2\Gamma_2$ (Π - Γ - Π), ὅπου τὸ Π - Γ - Π θὰ σημαίνει Πλευρά - Γωνία - Πλευρά, συμβολικόν τοῦ προηγουμένου κριτηρίου.

109. Γ' Περίπτωσης. Θεώρημα. Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς τῶν ἀντιστοιχῶς ἴσας εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν τὰ τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ μὲ $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2$, $\Gamma_1A_1 = \Gamma_2A_2$ (σχ. 112). Μετατοπίζομεν τὸ ἐν ἐξ αὐτῶν, ἔστω τὸ $A_2B_2\Gamma_2$, ὥστε ἡ πλευρὰ $B_2\Gamma_2$ νὰ συμπίσῃ μὲ τὴν ἴσην τῆς $B_1\Gamma_1$, ἡ κορυφή A_2 νὰ καταλάβῃ θέσιν A'_2 οὕτως, ὥστε τὰ σημεῖα A_1 καὶ A'_2 νὰ εἶναι ἐκατέρωθεν τῆς $B_1\Gamma_1$, ἀλλὰ καὶ εἰς τὰς κορυφὰς B_1 καὶ Γ_1 νὰ συντρέχουν ἴσαι



Σχ. 112

πλευραὶ $B_1A_1 = B_1A'_2$ καὶ $\Gamma_1A_1 = \Gamma_1A'_2$. Τότε τὰ σημεῖα B_1 καὶ Γ_1 , ὡς ἀπέχοντα ἑκάστον ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τὸ A_1 καὶ A'_2 κεῖνται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος $A_1A'_2$. Ἀρα ἡ $B_1\Gamma_1$ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $A_1A'_2$. Τότε τὰ τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2\overset{\Delta}{B}_1\Gamma_1$, εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν $B_1\Gamma_1$, ἄρα εἶναι ἴσα. Ἐπομένως θὰ εἶναι καὶ $A_1\overset{\Delta}{B}_1\Gamma_1 = A_2\overset{\Delta}{B}_2\Gamma_2$, διότι τὸ

$A_2\overset{\Delta}{B}_2\Gamma_2$ είναι ἴσον πρὸς τὸ $A'_2\overset{\Delta}{B}_1\Gamma_1$, ἐφ' ὅσον τὸ τελευταῖον προέκυψε διὰ μετατοπίσεως τοῦ $A_2B_2\Gamma_2$.

Παρατηρήσεις 1). Εἰς τὰ ἐπόμενα, ἡ ἰσότης δύο τριγώνων ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ προηγουμένου κριτηρίου θὰ συμβολίζεται, χάριν συντομίας, μὲ $A_1\overset{\Delta}{B}_1\Gamma_1 = A_2\overset{\Delta}{B}_2\Gamma_2$ (Π - Π - Π), ὅπου τὸ Π - Π - Π θὰ σημαίνει Πλευρά - Πλευρά - Πλευρά, συμβολικὸν τοῦ προηγουμένου κριτηρίου.

ii). Ἐκ τῶν τριῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων (κριτηρίων) ἔπεται ὅτι διὰ τὴν σύγκρισιν δύο τριγώνων, ἀπαιτοῦνται τρία ζεύγη ἀντιστοίχων στοιχείων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν τοῦλάχιστον ζεῦγος νὰ εἶναι ζεῦγος πλευρῶν τῶν δύο τριγώνων.

iii). Εἰς δύο ἴσα τρίγωνα ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν κεῖνται ἴσαι γωνίαι καὶ ἀντιστρόφως.

iv). Κατὰ τὴν συμβολικὴν ἀναγραφὴν δύο ἴσων τριγώνων θὰ ἐπιδιώκωμεν αἱ κορυφαί, εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν ἴσαι γωνίαι νὰ ἀναγράφωνται κατὰ τὴν αὐτὴν σειρὰν, δηλαδὴ $A_1\overset{\Delta}{B}_1\Gamma_1 = A_2\overset{\Delta}{B}_2\Gamma_2$ καὶ ὅχι $A_1\overset{\Delta}{B}_1\Gamma_1 = B_2\overset{\Delta}{A}_2\Gamma_2$. Αὐτὸ μᾶς διευκολύνει ἀπὸ τὴν ἀναγραφὴν τῆς ἰσότητος καὶ μόνον νὰ διακρίνωμεν τὰ ἴσα στοιχεῖα χωρὶς νὰ εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὸ σχῆμα.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

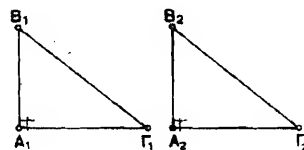
110. Θεώρημα. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα ὅταν ἔχουν, (ἐκτὸς τῆς ὀρθῆς γωνίας), δύο ἐκ τῶν κυρίων στοιχείων τῶν ἀντιστοίχως ἴσα ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν τοῦλάχιστον νὰ εἶναι πλευρά.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ μὲ $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 1^\circ$ (σχ. 113). Διακρίνομεν τὰς ἐξῆς περιπτώσεις :

i). Ἐχουν τὰς ὑποτείνουσας τῶν ἴσας καὶ μίαν τῶν ὀξείων γωνιῶν τῶν ἴσην, ἥτοι $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2$ καὶ $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$.

Τότε θὰ ἔχουν καὶ $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$ ὡς συμπληρώματα ἴσων γωνιῶν, ἄρα $B_1\overset{\Delta}{\Gamma}_1A_1 = B_2\overset{\Delta}{\Gamma}_2A_2$ (Γ - Π - Γ) (§ 107).

ii). Ἐχουν μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ τὴν προσκειμένην αὐτῆς ὀξείαν γωνίαν ἴσην ἀντιστοίχως, ἥτοι $A_1B_1 = A_2B_2$ καὶ $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$. Ἐπειδὴ ἐπὶ πλεόν ἔχουν $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 1^\circ$, ἔπεται ὅτι $A_1\overset{\Delta}{B}_1\Gamma_1 = A_2\overset{\Delta}{B}_2\Gamma_2$ (Γ - Π - Γ).

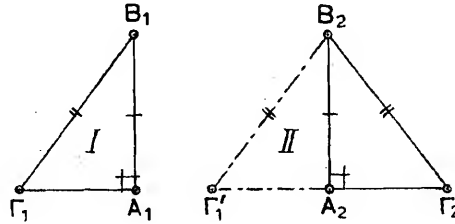


Σχ. 113

iii). Ἐχουν μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ τὴν ἀντικειμένην αὐτῆς γωνίαν ἴσην ἀντιστοίχως, ἥτοι $A_1B_1 = A_2B_2$ καὶ $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$.

Τότε θα έχουν και $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ ως συμπληρώματα ίσων γωνιών και επομένως $\triangle A_1 B_1 \Gamma_1 = \triangle A_2 B_2 \Gamma_2$ (Γ - Π - Γ).

iv). Τα τρίγωνα έχουν τās υπότεινους των ίσας και μίαν τών καθέτων πλευρών ίσην ἀντιστοίχως, ἤτοι $B_1 \Gamma_1 = B_2 \Gamma_2$ καὶ $A_1 B_1 = A_2 B_2$ (σχ. 114).



Σχ. 114

Μετατοπίζομεν τὸ $\triangle A_1 B_1 \Gamma_1$ ἀπὸ τὴν θέσιν I εἰς τὴν θέσιν II οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ $A_1 B_1$ νὰ συμπίσῃ μὲ τὴν ἴσην τῆς $A_2 B_2$ καὶ ἔτσι ὥστε αἱ κορυφαὶ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν νὰ ταυτισθοῦν, ἡ δὲ κορυφή Γ_1 νὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν Γ'_1 εἰς τρόπον, ὥστε τὰ σημεῖα Γ'_1 καὶ Γ_2 νὰ εὐρίσκωνται ἐκὰς τέρωθεν τῆς $A_2 B_2$. Ἡ $\Gamma'_1 A_2 \Gamma_2$ εἶναι εὐθεῖα δεδομένου ὅτι ἡ γωνία $\widehat{\Gamma'_1 A_2 \Gamma_2}$, ὡς ἄθροισμα δύο ὀρθῶν εἶναι πεπλατυσμένη. Ἐπειδὴ $B_2 \Gamma'_1 = B_2 \Gamma_2$, ἔπεται ὅτι τὸ σημεῖον B_2 ἀνήκει εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος $\Gamma'_1 \Gamma_2$, ἄρα ἡ $B_2 A_2$ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $\Gamma'_1 \Gamma_2$. Τότε θὰ εἶναι $A_2 \Gamma'_1 = A_2 \Gamma_2$, επομένως εἶναι $\triangle A_2 B_2 \Gamma_2 = \triangle A_2 B_2 \Gamma'_1$ (Π - Π - Π). Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\triangle A_2 B_2 \Gamma_2 = \triangle A_1 B_1 \Gamma_1$, διότι τὸ $\triangle A_2 B_2 \Gamma'_1$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\triangle A_1 B_1 \Gamma_1$, ὡς προελθὸν ἐξ αὐτοῦ διὰ μετατοπίσεως.

v). Τα τρίγωνα έχουν τās δύο καθέτους πλευράς των ίσας ἀντιστοίχως, ἤτοι $A_1 B_1 = A_2 B_2$ καὶ $A_1 \Gamma_1 = A_2 \Gamma_2$. Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον εἶναι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 1^{\circ}$, ἔπεται ὅτι $\triangle A_1 B_1 \Gamma_1 = \triangle A_2 B_2 \Gamma_2$ (Π - Γ - Π).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

69. Ἐάν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, τότε καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν ἴσων γωνιῶν των εἶναι ἴσαι.

70. Δύο εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) τέμνονται εἰς σημεῖον O. Ἐπὶ τῆς (ϵ_1) λαμβάνομεν σημεῖα A καὶ B οὕτως, ὥστε $OA = OB$ καὶ ἐπὶ τῆς (ϵ_2) σημεῖα Γ καὶ Δ οὕτως, ὥστε $OG = OD$. Δείξατε ὅτι θὰ εἶναι $AG = BD$ καὶ $AD = BG$.

71. Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τμήμα ΔΕ = ΑΔ. Νὰ δεῖχθῇ ὅτι $AB = EG$.

72. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν γωνίας \widehat{XOY} λαμβάνομεν τμήματα $OA = OB$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς διχοτόμου ΟΖ τῆς γωνίας ἱσαπέχει ἀπὸ τὰ Α καὶ Β.

73. Ἐάν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα τότε καὶ αἱ διάμεσοι αὐτῶν πρὸς ἀντιστοιχοῦν εἰς ἴσας πλευράς εἶναι ἴσαι.

74. Ἐάν δύο κυρτὰ τετράπλευρα ἔχουν τās πλευράς των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν καὶ

ὁμοίως κειμένως καὶ μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξύ ἴσων πλευρῶν, τὰ τετράπλευρα εἶναι ἴσα.

75. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς AB καὶ $A\Gamma$ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς A καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τμήματα $AB' = AB$ καὶ $A\Gamma' = A\Gamma$. Δείξατε ὅτι ἡ διάμεσος AD τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ προεκτεινομένη διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς $B'\Gamma'$.

76. Δίδεται γωνία \widehat{xOy} καὶ σημεῖον Δ τῆς διχοτόμου αὐτῆς. Θεωροῦμεν τὴν ἐκ τοῦ Δ κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον, ἡ ὅποια τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ A καὶ B . Δείξατε ὅτι $OA = OB$ καὶ $\Delta A = \Delta B$.

77. Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, τότε καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἴσας πλευρὰς εἶναι ἴσα.

78. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ ἄγομεν τὴν διάμεσον AM . Δείξατε ὅτι αἱ κορυφαὶ B καὶ Γ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν AM .

79. Ἀπὸ τὸ μέσον O εὐθυγράμμου τμήματος AB ἄγομεν τυχούσαν εὐθεῖαν (δ) πλάγιαν ὡς πρὸς τὴν AB . Ἐὰν αἱ κάθετοι ἐκ τῶν A καὶ B ἐπὶ τὴν AB τέμνουν τὴν (δ) εἰς τὰ E καὶ Z ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι $OE = OZ$.

80. Ἀπὸ τὸ μέσον O εὐθυγράμμου τμήματος AB φέρομεν τυχούσαν εὐθεῖαν (δ) καὶ ἐκ τῶν A καὶ B καθέτους AG καὶ BD ἐπ' αὐτήν. Δείξατε ὅτι $AD = BG$.

B'.

81. Δίδεται γωνία \widehat{xOy} . Ἐπὶ τῆς Ox λαμβάνομεν σημεῖα A καὶ B καὶ ἐπὶ τῆς Oy σημεῖα Γ καὶ Δ οὕτως, ὥστε $OA = O\Gamma$ καὶ $OB = O\Delta$. Δείξατε ὅτι α) $AB = \Gamma\Delta$, β) "Ἄν E εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν $A\Delta$ καὶ $B\Gamma$ τότε τρίγ. $EAB =$ τρίγ. $E\Gamma\Delta$, γ) ἡ EO εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας \widehat{xOy} .

82. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἐκ τῆς κορυφῆς A φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς AB καὶ $A\Gamma$ ὅχι πρὸς τὸ μέρος τοῦ τριγώνου καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν ἀντιστοίχως $AB' = AB$ καὶ $A\Gamma' = A\Gamma$. Δείξατε ὅτι α) $B\Gamma' = \Gamma B'$ καὶ β) $B\Gamma' \perp \Gamma B'$.

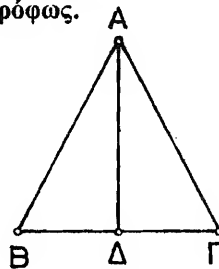
83. Τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν τὰ ὕψη BD καὶ ΓE . Προεκτείνωμεν αὐτὰ πρὸς τὸ μέρος τῶν κορυφῶν καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν τμήματα $BB' = A\Gamma$ καὶ $\Gamma\Gamma' = AB$ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι α) $AB' = A\Gamma'$ καὶ β) $AB' \perp A\Gamma'$.

ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

111. Θεώρημα. Ἐὰν τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἰσοσκελές μὲ $AB = A\Gamma$, τότε αἱ παρὰ τὴν βάσιν $B\Gamma$ γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς κορυφῆς A φέρομεν τὴν κάθετον AD ἐπὶ τὴν $B\Gamma$ (σχ. 115). Ἐπειδὴ εἶναι $AB = A\Gamma$, ἡ AD εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $B\Gamma$, ἐπομένως ὑπάρχει συμμετρία ὡς πρὸς τὴν AD . Τότε θὰ εἶναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ὡς συμμετρικαὶ μεταξύ των.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω ὅτι εἶναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἰσοσκελές. Συγκρί-



Σχ 115

νομεν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $\triangle A\Delta B$ καὶ $\triangle A\Delta \Gamma$. Ταῦτα ἔχουν τὴν $A\Delta$ κοινὴν καὶ τὰς ὀξείας γωνίας τῶν \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἴσας, ἄρα εἶναι ἴσα. Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι $AB = A\Gamma$, ἄρα τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

Πόρισμα I. Κάθε ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι ἰσογώνιον καὶ ἐκάστη γωνία του ἰσοῦται πρὸς 60° , διότι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν του ἰσοῦται πρὸς 2° ἤτοι 180° .

Πόρισμα II. Ἐὰν ἰσοσκελές τρίγωνον ἔχη μίαν τῶν γωνιῶν του 60° , εἶναι ἰσόπλευρον.

Πόρισμα III. Ἐὰν δύο ἰσοσκελεῖ τρίγωνα ἔχουν τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς τῶν ἴσων πλευρῶν τῶν ἴσην ἢ μίαν τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν ἴσην, τὰ τρίγωνα εἶναι ἰσογώνια.

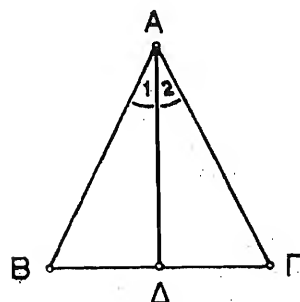
Πόρισμα IV. Ἐκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ὀξεία.

112. Θεώρημα. Εἰς πᾶν ἰσοσκελές τρίγωνον τὸ ὕψος ποὺ ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῶν ἴσων πλευρῶν, εἶναι καὶ διάμεσος καὶ διχοτόμος.

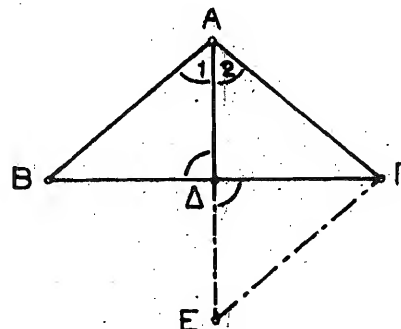
Ἀπόδειξις. Ἐστω ἰσοσκελές τρίγωνον $AB\Gamma$ μὲ $AB = A\Gamma$ (σχ. 116). Τότε τὸ ὕψος $A\Delta$ θὰ εἶναι καὶ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $B\Gamma$, διότι τὸ σημεῖον A ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα B καὶ Γ . Ἐφ' ὅσον εἶναι μεσοκάθετος εἶναι καὶ διάμεσος, διότι $\Delta B = \Delta \Gamma$. Ἐπὶ πλέον εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας \widehat{A} , διότι ὡς μεσοκάθετος τοῦ $B\Gamma$ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος, συνεπῶς $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.

113. Θεώρημα. Ἐὰν εἰς ἓνα τρίγωνον συμβαίνει : i) ἓνα ὕψος νὰ εἶναι καὶ διάμεσος ἢ ii) ἓνα ὕψος νὰ εἶναι καὶ διχοτόμος ἢ iii) μία διάμεσος νὰ εἶναι καὶ διχοτόμος, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ (σχ. 117), ἐνθα :



Σχ. 116



Σχ. 117

i) Τὸ ὕψος $A\Delta$ εἶναι καὶ διάμεσος. Τότε τὸ $A\Delta$ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $B\Gamma$, συνεπῶς ἄξων συμμετρίας, ἄρα $AB = A\Gamma$. Ἐπομένως τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

ii) Τὸ ὕψος AD εἶναι καὶ διχοτόμος. Τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ADB καὶ ADG , ὡς ἔχοντα τὴν AD κοινὴν καὶ $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ εἶναι ἴσα, ἄρα θὰ εἶναι καὶ $AB = AG$. Ἐπομένως τὸ τρίγωνον ABG εἶναι ἰσοσκελές.

iii) Ἡ διάμεσος AD εἶναι καὶ διχοτόμος. Εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $DE = DA$ καὶ συγκρίνομεν τὰ τρίγωνα ADB καὶ DEG . Ταῦτα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν $DB = DG$ ἐξ ὑποθέσεως, $DA = DE$ καὶ τὰς γωνίας των εἰς τὸ D ἴσας ὡς κατὰ κορυφὴν ($\Pi - \Gamma - \Pi$). Ἀρα θὰ εἶναι

$$(1) \quad AB = EG \text{ καὶ } \widehat{A}_1 = \widehat{E}$$

Ἐπειδὴ ὁμοίως εἶναι καὶ $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ ἐξ ὑποθέσεως, ἔπεται ὅτι $\widehat{A}_2 = \widehat{E}$, ἄρα τὸ τρίγωνον AGE εἶναι ἰσοσκελές μὲ

$$(2) \quad AG = EG$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι

$$AB = AG.$$

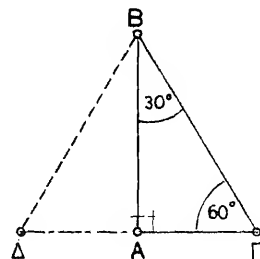
Ἀρα τὸ τρίγωνον ABG εἶναι ἰσοσκελές.

114. Θεώρημα. Ἄν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἡ μία ὀξεία γωνία του εἶναι 30° , τότε ἡ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτείνουσας καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ABG μὲ $\widehat{B} = 30^\circ$. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι $AG = \frac{BG}{2}$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\widehat{B} = 30^\circ$ ἔπεται ὅτι $\widehat{\Gamma} = 60^\circ$. Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν AG πρὸς τὸ μέρος τοῦ A καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $AD = AG$ (σχ. 118). Φέρομεν τὴν BD καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον BAG εἶναι ἰσοσκελές μὲ $BD = BG$, διότι ἡ BA εἶναι ὕψος καὶ διάμεσος αὐτοῦ. Ἐπὶ πλέον μία γωνία του, ἡ $\widehat{\Gamma}$ εἶναι 60° . Ἀρα τοῦτο εἶναι ἰσοπλευρον. Τότε θὰ εἶναι : $AG = BG$ ἀλλὰ $AG = 2AG$. Ἐξ αὐτῶν ἔπεται :

$$2AG = BG \Rightarrow AG = \frac{BG}{2} \text{ δ.ξ.δ.}$$



Σχ. 118

Ἀντιστρόφως. Ἄν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ABG ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτείνουσας, τότε ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία εἶναι 30° .

Ἀπόδειξις. Ἐχομεν ὅτι $AG = \frac{BG}{2}$. Προεκτείνομεν ὡς καὶ προηγουμένως, τὴν AG πρὸς τὸ μέρος τοῦ A καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $AD =$

ΑΓ. Τότε το τρίγωνον ΒΔΓ είναι ισοσκελές με $ΒΔ = ΒΓ$ (1), διότι ή ΒΑ είναι ύψος και διάμεσος αὐτοῦ. Ἀρα θὰ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{ΒΓΔ}$. Ἐξ ὑποθέσεως ὁμως εἶναι $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2} \Rightarrow 2.ΑΓ = ΒΓ$ ἢ $ΔΓ = ΒΓ$ (2). Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι $ΒΔ = ΒΓ = ΔΓ$, ἥτοι τὸ τρίγωνον ΒΓΔ εἶναι ἰσόπλευρον. Ἐπομένως $\widehat{ΑΒΓ} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ΑΒΓ} = 30^\circ$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

84. Ἴσοσκελοῦς τριγώνου ἡ βάσις εἶναι τὸ τρίτον ἐκάστης τῶν ἴσων πλευρῶν του. Ἄν ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι 35 m. νὰ εὐρεθοῦν αἱ πλευραὶ του.

85. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$). Εἰς τὰς προεκτάσεις τῆς βάσεως ΒΓ καὶ ἐκατέρωθεν τῶν Β καὶ Γ λαμβάνομεν τμήματα $ΒΒ' = ΓΓ'$. Δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒ'Γ' εἶναι ἰσοσκελές.

86. Τὰ ὕψη ποὺ ἄγονται ἐπὶ τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσα.

87. Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ δύο ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοσκελές.

88. Αἱ διάμεσοι ποὺ ἄγονται ἐπὶ τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.

89. Αἱ διχοτόμοι ποὺ ἄγονται ἐπὶ τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.

90. Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι κορυφαὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

91. Ἴσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$) προεκτείνομεν τὰς ἴσας πλευρὰς πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τμήματα $ΑΕ = ΑΖ$. Δείξατε ὅτι τὰ τρίγωνα ΕΒΔ καὶ ΖΓΔ εἶναι ἴσα καὶ ὅτι τὰ Ε καὶ Ζ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς ΒΓ.

92. Κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχει $ΑΒ = ΒΓ$ καὶ $\widehat{Α} = \widehat{Γ}$. Δείξατε ὅτι α) $ΑΔ = ΔΓ$ καὶ β) αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται καθέτως.

93. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ καὶ ἐκ τοῦ Β κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον, ἡ ὁποία τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Δείξατε ὅτι $ΕΒ = ΕΖ$.

94. Τὸ μέσον τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς του.

95. Δίδεται γωνία $\chi\widehat{Ο}\gamma$. Ἐπὶ τῆς Οχ λαμβάνομεν σημεῖον Α καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρομεν $ΑΒ \perp Ο\gamma$. Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{ΟΑΒ}$ τέμνει τὴν Ογ εἰς τὸ Γ, ἐκ τοῦ ὁποίου φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν Ογ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Οχ εἰς τὸ Δ. Δείξατε ὅτι $ΔΑ = ΔΓ$.

96. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{Β}$ καὶ $\widehat{Γ}$ τριγώνου ΑΒΓ, φέρομεν παράλληλον τῆς ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι $ΔΕ = ΒΔ + ΓΕ$.

97. Δίδεται κυρτὴ γωνία $\chi\widehat{Ο}\gamma$. Ἐκ τῆς κορυφῆς Ο φέρομεν $ΟΑ \perp Ο\gamma$ καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Οχ λαμβάνομεν $ΟΒ = ΟΑ$, φέρομεν δὲ καὶ τὴν $ΒΔ \perp Ο\gamma$. Δείξατε ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{ΔΒΟ}$ ἢ τῆς γωνίας $\widehat{ΔΒ\chi}$.

98. Έστω τρίγωνον $AB\Gamma$ με $AB > A\Gamma$. 'Επί της πλευράς AB λαμβάνομεν τμήμα $AD = A\Gamma$. Δείξατε ότι

$$\widehat{A\Gamma B} = \frac{\widehat{\Gamma} - \widehat{B}}{2}$$

99. Δίδεται ὀρθογώνιον και ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$). Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς BA λαμβάνομεν τμήμα $AD = AB$ καὶ με πλευράν τὴν BD κατασκευάζομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον BDE , φέρομεν δὲ καὶ τὴν GE . Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου GBE (δύο περιπτώσεις).

100. Δίδεται γωνία $x\widehat{Oy}$. 'Απὸ σημείον A τῆς Ox φέρομεν παράλληλον τῆς Oy καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν $AB = AO$. Δείξατε ὅτι ἡ OB εἶναι διχοτόμος (ἐσωτερικὴ ἢ ἐξωτερικὴ) τῆς γωνίας $x\widehat{Oy}$.

101. Δίδεται ὀρθὴ γωνία $B\widehat{A\Gamma}$. Κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{ABD} = 30^\circ$ ἐνθα ἡ BD τέμνει τὴν $A\Gamma$ ἢ τὴν προέκτασιν τῆς εἰς τὸ D . 'Επίσης κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{A\Gamma E} = 30^\circ$, ἐνθα ἡ GE τέμνει τὴν AB ἢ τὴν προέκτασιν τῆς εἰς τὸ E . 'Εὰν αἱ BD καὶ GE τέμνονται εἰς τὸ Z , δείξατε ὅτι τὰ τρίγωνα BEZ καὶ $ZD\Gamma$ εἶναι ἰσοσκελῆ ἢ ὀρθογώνια.

102. Δίδεται εὐθύγραμμον τμήμα AB καὶ σημείον Γ ἐπ' αὐτοῦ. 'Εκ τῶν A καὶ B ἄγομεν δύο παραλλήλους ἡμιευθείας Ax καὶ By πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ AB καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα $AD = A\Gamma$ καὶ $BE = B\Gamma$ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι $\widehat{A\Gamma E} = 1^\circ$.

103. 'Εὰν ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος γωνίας τριγώνου εἶναι παράλληλος τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

104. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$. Με βάσεις τὰς πλευρὰς τοῦ κατασκευάζομεν ἐκτὸς αὐτοῦ ἰσόπλευρα τρίγωνα ABD , $A\Gamma E$, $B\Gamma Z$. Δείξατε ὅτι : α) αἱ γραμμαὶ ΔAE , $E\Gamma Z$, ZBD εἶναι εὐθεῖαι β) τὸ τρίγωνον ΔEZ εἶναι ἰσόπλευρον.

B'.

105. Με βάσεις τὰς ἴσας πλευρὰς AB , $A\Gamma$ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζομεν ἐκτὸς αὐτοῦ ἰσόπλευρα τρίγωνα ABD καὶ $A\Gamma E$. Δείξατε ὅτι ἡ ΔE εἶναι παράλληλος τῆς $B\Gamma$. Πότε ἡ γραμμὴ ΔAE εἶναι εὐθεῖα ;

106. Δύο εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) τέμνονται εἰς σημείον O . 'Επὶ τῆς (ϵ_1) λαμβάνομεν σημεῖα B, Γ καὶ ἐπὶ τῆς (ϵ_2) σημεῖον A , οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $OA = OB = OG$. Δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ὀρθογώνιον.

107. Τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι $\widehat{B} = 2\widehat{\Gamma}$. Φέρομεν τὸ ὕψος AD καὶ εἰς τὴν προέκτασιν τῆς AB λαμβάνομεν τμήμα $BE = BD$. 'Εὰν ἡ ED τέμνη τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ Z , δείξατε ὅτι τὰ τρίγωνα $ZD\Gamma$ καὶ ZDA εἶναι ἰσοσκελῆ.

108. 'Επ' εὐθείας δίδονται διαδοχικῶς τὰ σημεῖα A, B, Γ . Σχηματίζομεν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ABD καὶ $B\Gamma E$. Δείξατε ὅτι $AE = \Gamma D$.

109. 'Εὰν ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) διαιρῇται διὰ τῆς BD εἰς δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ADB καὶ $B\Delta\Gamma$ με $AD = \Delta B$ καὶ $BD = B\Gamma$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

ΑΝΙΣΟΤΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΔΙΑ ΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

115. Θεώρημα. i). Εἰς κάθε τρίγωνον $AB\Gamma$ ἰσχύουν αἱ ἑξ σχέσεις ἀνισότητος :

$$\begin{array}{ll} (1) & \alpha < \beta + \gamma \quad \text{καὶ} \quad (4) \quad \alpha > |\beta - \gamma| \\ (2) & \beta < \alpha + \gamma \quad (5) \quad \beta > |\alpha - \gamma| \\ (3) & \gamma < \alpha + \beta \quad (6) \quad \gamma > |\alpha - \beta| \end{array}$$

ii). Αἱ ἀνωτέρω ἑξ σχέσεις συγχωνεύονται εἰς τὴν διπλὴν ἀνισότητα :

$$(7) \quad |\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$$

ὅπου α, β, γ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου καὶ $|\beta - \gamma| = \beta - \gamma$ ἐὰν $\beta \geq \gamma$ ἐνῶ $|\beta - \gamma| = \gamma - \beta$ ἐὰν $\beta < \gamma$.

Ἀπόδειξις. i). Αἱ τρεῖς πρῶται εἶναι προφανεῖς βάσει τοῦ ἀξιώματος § 40 κατὰ τὸ ὁποῖον ἐν εὐθύγραμμον τμήμα εἶναι μικρότερον πάσης ἄλλης γραμμῆς μετὰ τὰ αὐτὰ ἄκρα.

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως $\alpha > \beta - \gamma$ καὶ $\alpha > \gamma - \beta$.

Ἐξ αὐτῶν ἔπεται ὅτι $\alpha > |\beta - \gamma|$, ἥτοι ἰσχύει ἡ σχέση (4). Ὀμοίως ἐκ τῶν σχέσεων (1), (3) καὶ (1),

(2) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως :

$\beta > |\alpha - \gamma|$ καὶ $\gamma > |\alpha - \beta|$, ἥτοι ἰσχύουν αἱ σχέσεις (5) καὶ (6).

ii). Ἐὰν ἰσχύουν αἱ σχέσεις (1) ἕως (6) τότε προφανῶς ἰσχύει καὶ ἡ (7) διότι τὰ δύο σκέλη τῆς ἀποτελοῦν αἱ (4) καὶ (1) ἀντιστοίχως.

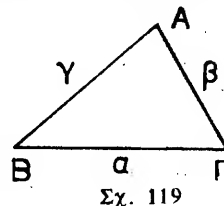
Ἀντιστροφή. Ἐὰν ἰσχύῃ ἡ (7) θὰ δείξωμεν ὅτι ἰσχύουν αἱ (1) ἕως (6). Ἀμέσως ἐκ τῆς (7) ἔπεται ὅτι ἰσχύουν αἱ (4) καὶ (1), διότι εἶναι τὰ δύο σκέλη τῆς.

Χωρὶς νὰ βλάπτεται ἡ γενικότης δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν μίαν τυχαίαν σχέσιν διατάξεως μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ ἔστω $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Τότε ἡ (7) γράφεται $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ καὶ διασπᾶται εἰς τὰς :

$$(8) \quad \beta - \gamma < \alpha \quad \text{καὶ}$$

$$(9) \quad \alpha < \beta + \gamma$$

Ἐκ τῆς (8) ἔπεται $\beta < \alpha + \gamma$, ἄρα ἰσχύει ἡ (2). Ἐπειδὴ ἡ γ ὑπετέθη ἡ μικρότερα πλευρὰ τοῦ τριγώνου, ἔπεται ὅτι εἶναι μικρότερα καὶ τοῦ ἁθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ἥτοι $\gamma < \alpha + \beta$, ἄρα ἰσχύει ἡ (3). Ἐκ τῆς (9) ἔπεται $\beta > \alpha - \gamma$ καὶ $\gamma > \alpha - \beta$, ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη $\alpha \geq \gamma$ καὶ $\alpha \geq \beta$, αἱ δύο τελευταῖαι σχέσεις δύνανται ἀκόμη νὰ γραφοῦν $\beta > |\alpha - \gamma|$ καὶ $\gamma > |\alpha - \beta|$. Ἄρα ἰσχύουν καὶ αἱ (5) καὶ (6). Ἐπομένως αἱ ἀνισότητες (1) ἕως (6) εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς τὴν (7).



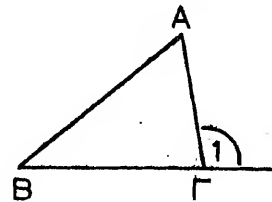
Σχ. 119

116. Θεώρημα. Ἐκάστη ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου εἶναι μεγαλύτερα ἐκάστης τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ (σχ. 120) καὶ $\widehat{\Gamma}_1$ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία τῆς $\widehat{\Gamma}$. Γνωρίζομεν ὅτι (§ 105 π. 1) :

$$\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{A} + \widehat{B}$$

Ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{\Gamma}_1 > \widehat{A}$ καὶ $\widehat{\Gamma}_1 > \widehat{B}$.



Σχ. 120

117. Θεώρημα. Ἄν αἱ δύο πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἄνισοι, τότε καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἄνισοι, ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλύτερας πλευρᾶς κεῖται μεγαλύτερα γωνία καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $\beta > \gamma$. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι καὶ $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$ (σχ. 121).

Ἐπὶ τῆς $A\Gamma = \beta$ λαμβάνομεν τμῆμα $AD = AB = \gamma$. Τότε τὸ τρίγωνον $AB\Delta$ εἶναι ἰσοσκελές, ἐπομένως

$$(1) \quad \omega_1 = \omega_2$$

Τὸ σημεῖον Δ εἶναι προφανῶς ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ Γ , συνεπῶς ἡ $B\Delta$ εἶναι ἐσωτερικὴ διὰ τὴν γωνίαν \widehat{B} . Ἄρα :

$$(2) \quad \widehat{B} > \omega_1$$

Ἐπὶ πλέον δὲ εἶναι :

$$(3) \quad \omega_2 > \widehat{\Gamma}$$

διότι (§ 116) ἡ ω_2 εἶναι ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου $\Delta B\Gamma$. Τότε ἐκ τῶν (2), (1) καὶ (3) λαμβάνομεν $\widehat{B} > \omega_1 = \omega_2 > \widehat{\Gamma}$. Ἄρα :

$$\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$$

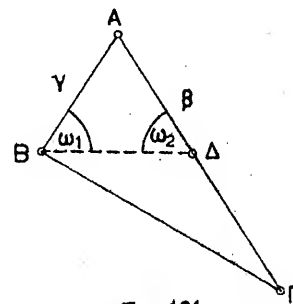
Ἀντιστρόφως. Ἐστω ὅτι εἶναι $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι καὶ $\beta > \gamma$ (σχ. 122).

Ἐκ τοῦ B φέρομεν ἡμιευθεῖαν ἐσωτερικὴν τῆς γωνίας \widehat{B} , ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς $B\Gamma$ γωνίαν $\varphi = \widehat{\Gamma}$. Τότε τὸ σημεῖον Δ , εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἡμιευθεῖα τέμνει τὴν $A\Gamma$, εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ Γ καὶ τὸ τρίγωνον $\Delta B\Gamma$ εἶναι ἰσοσκελές. Ἄρα :

$$(4) \quad \Delta B = \Delta \Gamma$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου $AB\Delta$ ἔχομεν :

$$\gamma < \Delta\Delta + \Delta B$$

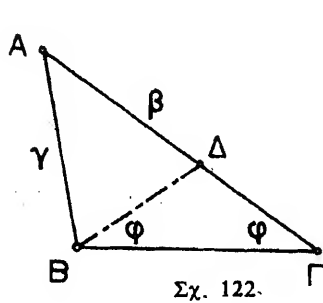


Σχ. 121

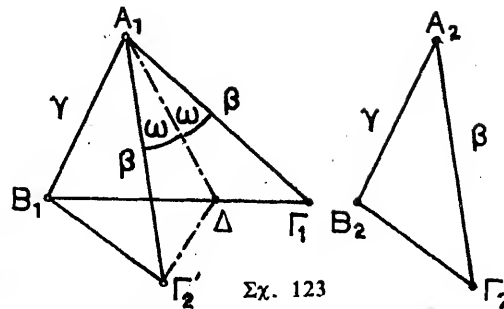
ἡ ὁποία, λόγῳ τῆς (4), γράφεται :

$$\gamma < \alpha\Delta + \Delta\Gamma \quad \eta \quad \gamma < \alpha\Gamma.$$

$$\text{Ἄρα :} \quad \gamma < \beta$$



Σχ. 122.



Σχ. 123

118. Θεώρημα. Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἀντιστοιχῶς ἴσας καὶ τὰς περιεχομένας ὑπ' αὐτῶν γωνίας ἀνίσους, τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἄνισα, ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλυτέρας γωνίας κεῖται μεγαλυτέρα πλευρὰ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν δύο τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ μὲ $A_1B_1 = A_2B_2 = \gamma$ καὶ $A_1\Gamma_1 = A_2\Gamma_2 = \beta$ (σχ. 123). Ὑποθέτομεν ἐπὶ πλεόν ὅτι εἶναι $\widehat{A}_1 > \widehat{A}_2$. Θὰ δείξωμεν ὅτι $B_1\Gamma_1 > B_2\Gamma_2$.

Μετατοπίζομεν τὸ τρίγωνον $A_2B_2\Gamma_2$ εἰς τὴν θέσιν $A_1B_1\Gamma'_2$ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ A_2B_2 αὐτοῦ νὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ἴσης τῆς A_1B_1 ἢ δὲ γωνία \widehat{A}_2 αὐτοῦ νὰ ἀποκτήσῃ κοινὸν μέρος μετὰ τῆς \widehat{A}_1 . Τότε, ἐπειδὴ $\widehat{A}_1 > \widehat{A}_2$ ἢ $A_2\Gamma'_2$ εἶναι ἐσωτερικὴ τῆς γωνίας \widehat{A}_1 καὶ ἀρκεῖ πλεόν νὰ δείξωμεν ὅτι $B_1\Gamma_1 > B_1\Gamma'_2$.

Θεωροῦμεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $\Gamma_1\widehat{A}_1\Gamma'_2$ καὶ ἔστω ὅτι αὕτη τέμνει τὴν πλευρὰν $B_1\Gamma_1$ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Τότε εἶναι $\text{τριγ. } A_1\Gamma_1\Delta = \text{τριγ. } A_1\Gamma'_2\Delta$ ὥς ἔχοντα $A_1\Gamma_1 = A_1\Gamma'_2$, τὴν $A_1\Delta$ κοινὴν καὶ $\Gamma_1\widehat{A}_1\Delta = \Gamma'_2\widehat{A}_1\Delta = \omega$. Ἄρα θὰ εἶναι :

$$(1) \quad \Delta\Gamma_1 = \Delta\Gamma'_2$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου $B_1\Delta\Gamma'_2$ ἔχομεν : $B_1\Gamma'_2 < B_1\Delta + \Delta\Gamma'_2$ καὶ λόγῳ τῆς σχέσεως (1), ἡ τελευταία γράφεται

$$B_1\Gamma'_2 < B_1\Delta + \Delta\Gamma_1 \quad \eta \quad B_1\Gamma'_2 < B_1\Gamma_1. \quad \text{Ἄρα } B_2\Gamma_2 < B_1\Gamma_1 \quad \eta \quad B_1\Gamma_1 > B_2\Gamma_2.$$

Ἀντιστρόφως. Ἐστω ὅτι τὰ τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ ἔχουν $A_1B_1 = A_2B_2 = \gamma$, $A_1\Gamma_1 = A_2\Gamma_2 = \beta$ καὶ $B_1\Gamma_1 > B_2\Gamma_2$. Θὰ δείξωμεν ὅτι : $\widehat{A}_1 > \widehat{A}_2$.

Πράγματι, ἡ περίπτωσις $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ ἀποκλείεται, διότι τότε τὰ τρίγωνα θὰ ᾤσαν ἴσα, ὥς ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν

γωνίαν ἴσην. Τοῦτο ὁμῶς ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐπίσης ἀποκλείεται ἡ περίπτωση $\widehat{A}_1 < \widehat{A}_2$, διότι τότε, ὡς ἐδείχθη, θὰ ἦτο καὶ $B_1\Gamma_1 < B_2\Gamma_2$, ἀλλὰ καὶ αὐτὸ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἀρα τὸ μόνον τὸ ὁποῖον δύναται νὰ συμβαίνει εἶναι $\widehat{A}_1 > \widehat{A}_2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

110. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB, BG, ΓA τριγώνου ABΓ λαμβάνομεν τρία τυχόντα σημεῖα Δ, Ε, Ζ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΔΕΖ εἶναι μικρότερα τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ABΓ.

111. Ἐκάστη διάμεσος τριγώνου εἶναι μικρότερα τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν πλευρῶν ποὺ τὴν περιέχουν καὶ μεγαλύτερα τῆς ἡμιδιαφορᾶς αὐτῶν.

112. Ἐὰν Μ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τριγώνου ABΓ, δείξατε ὅτι $\tau < MA + MB + MG < 2\tau$, ὅπου 2τ ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου.

113. Ἐὰν εἰς τριγώνον ABΓ εἶναι $\beta > \gamma$ καὶ Ε τυχὸν σημεῖον τῆς διαμέσου AM, δείξατε ὅτι $EG > EB$.

114. Δίδεται τμήμα AB καὶ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος του. Ἄν τὰ τμήματα ΓΒ καὶ ΔΑ τέμνονται, δείξατε ὅτι $AG + BD < AD + BG$.

115. Ἐστω τρίγωνον ABΓ καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας \widehat{A} . Δείξατε ὅτι $AB > BD$ καὶ $AG > GD$.

116. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν κυρτοῦ τετραπλεύρου ABΓΔ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ οὕτως, ὥστε ἡ τέθλασμένη ΑΕΖΔ νὰ εἶναι κυρτή. Δείξατε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΖΔ εἶναι μικρότερα τῆς περιμέτρου τοῦ τετραπλεύρου ABΓΔ.

117. Ἐὰν τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ εἶναι ἐσωτερικὰ τριγώνου ABΓ, δείξατε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΔΕΖ εἶναι μικρότερα τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ABΓ.

Β'.

118. Ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν AB καὶ AG τριγώνου ABΓ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τμήματα ΒΔ = ΓΕ. Δείξατε ὅτι $DE > BG$.

119. Τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριμέτρου καὶ μικρότερον τῆς περιμέτρου αὐτοῦ.

120. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ABΓ ($\widehat{A} = 1^\circ$) φέρομεν τὴν διχοτόμον ΒΔ τῆς γωνίας \widehat{B} . Δείξατε ὅτι $AD < GD$.

121. Ἐὰν εἰς κυρτὸν τετραπλευρον ABΓΔ εἶναι $AD = BG$ καὶ $\widehat{ADG} > \widehat{BGD}$, νὰ συγκριθοῦν αἱ διαγώνιοι AG καὶ ΒΔ.

122. Ἐὰν ἡ πλευρὰ BG ἰσοσκελοῦς τριγώνου ABΓ ($AB = AG$) εἶναι μικρότερα, ἴση ἢ μεγαλύτερα μιᾶς τῶν ἴσων πλευρῶν του, τότε ἡ γωνία \widehat{A} θὰ εἶναι ἀντιστοίχως μικρότερα, ἴση ἢ μεγαλύτερα τῶν 60° .

123. Ἐστω τρίγωνον ABΓ καὶ AM ἡ διάμεσος αὐτοῦ. Δείξατε ὅτι : α) ἐὰν $AM < \frac{BG}{2}$, τότε $\widehat{A} > 1^\circ$, β) ἐὰν $AM = \frac{BG}{2}$, τότε $\widehat{A} = 1^\circ$ καὶ γ) ἐὰν $AM > \frac{BG}{2}$, τότε $\widehat{A} < 1^\circ$.

124. 'Εάν τὸ ὕψος AD τριγώνου $AB\Gamma$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμισυ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$, δείξατε ὅτι ἡ γωνία \hat{A} εἶναι ὀξεῖα ἢ ὀρθή. Πότε εἶναι ὀρθή;

125. Δίδεται κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, τοῦ ὁποῦ ἡ πλευρὰ AB εἶναι ἡ μεγαλυτέρα καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ ἡ μικροτέρα. Δείξατε ὅτι $\hat{B}\Gamma\Delta > \hat{B}\Delta\Delta$ καὶ $\hat{A}\Delta\Gamma > \hat{A}\hat{B}\Gamma$.

126. 'Εάν ἡ διάμεσος τριγώνου περιέχεται μεταξύ ἀντίστων πλευρῶν, σχηματίζει με αὐτὰς ἀντίσους γωνίας καὶ μικροτέραν γωνίαν με τὴν μεγαλυτέραν πλευράν. 'Επίσης ἡ διάμεσος αὕτη σχηματίζει ἀμβλεῖαν γωνίαν με τὸ τμήμα τῆς τρίτης πλευρᾶς, τὸ ὁποῖον κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς μεγαλυτέρας ἐκ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

127. 'Εάν $AB\Gamma$ εἶναι τυχὸν τρίγωνον, δείξατε ὅτι $u_\alpha \leq \delta_\alpha \leq \mu_\alpha$ ὅπου τὸ $=$ ἰσχύει μόνον διὰ τὸ ἰσοσκελές.

128. 'Εάν τριγώνου $AB\Gamma$ με $AB > A\Gamma$, AD εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας \hat{A} , τότε θὰ εἶναι $\Delta B > \Delta\Gamma$.

129. Εἰς πᾶν τρίγωνον $AB\Gamma$ δείξατε ὅτι εἶναι $2\mu_\alpha > \beta + \gamma - \alpha$.

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

119. **Τυχὸν τετράπλευρον.** Τετράπλευρον εἶναι τὸ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τέσσαρας πλευράς. Τότε θὰ ἔχη τέσσαρας κορυφάς, τέσσαρας γωνίας καὶ δύο διαγωνίους.

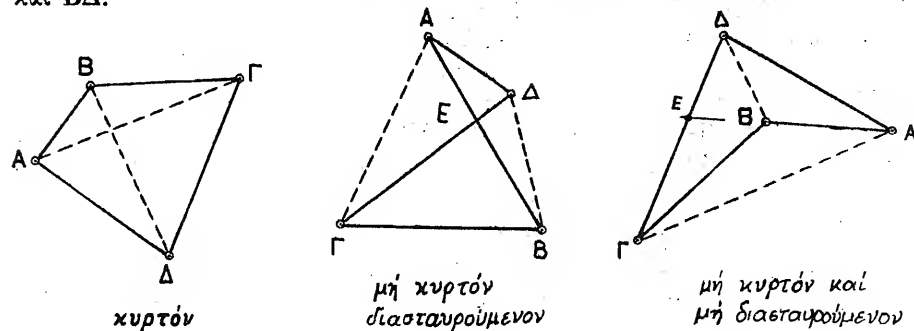
Εἰς ἓν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ θὰ λέγωμεν ὅτι εὐρίσκονται ἀπέναντι ἀλλήλων :

i) Αἱ κορυφαὶ A καὶ Γ , B καὶ Δ .

ii) Αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν γωνίαι \hat{A} καὶ $\hat{\Gamma}$, \hat{B} καὶ $\hat{\Delta}$.

iii) Αἱ πλευραὶ AB καὶ $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$ καὶ $A\Delta$.

Αἱ ἀπέναντι κορυφαὶ A καὶ Γ , B καὶ Δ ὀρίζουν τὰς δύο διαγωνίους $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$.



Σχ. 124

Τετράπλευρα ὑπάρχουν κυρτά καὶ μὴ κυρτά. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι 4 ὀρθαὶ (§ 106).

"Όταν ἓν τετράπλευρον εἶναι μὴ κυρτόν, μία τοῦλάχιστον ἀπὸ τὰς εὐθείας ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραὶ τοῦ τέμνει τὴν ἀπέναντι αὐτῆς πλευράν (διατί;). 'Εάν ἐνὸς μὴ κυρτοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 124) ἡ εὐθεῖα AB τέμνη

τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς σημεῖον Ε καὶ συμβάλῃ τὸ Ε νὰ εἶναι σημεῖον τοῦ τμήματος ΑΒ, τότε λέγομεν ὅτι αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ διασταυροῦνται καὶ τὸ τετράπλευρον καλεῖται **διασταυρούμενον**. Ἐὰν τὸ σημεῖον Ε τῆς εὐθείας ΑΒ δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 124), τότε αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν διασταυροῦνται καὶ τὸ τετράπλευρον καλεῖται **μὴ διασταυρούμενον**.

Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰ κυρτὰ τετράπλευρα αἱ διαγώνιοι εἶναι ἐσωτερικὰ τμήματα τοῦ τετραπλεύρου καὶ τέμνονται, ἐνῶ εἰς τὰ μὴ κυρτὰ δὲν τέμνονται. Εἰς τὰ μὴ κυρτὰ καὶ διασταυρούμενα αἱ διαγώνιοι εἶναι ἐξωτερικὰ τμήματα, ἐνῶ εἰς τὰ μὴ κυρτὰ καὶ μὴ διασταυρούμενα ἡ μία διαγώνιος εἶναι ἐσωτερικὸν καὶ ἡ ἄλλη ἐξωτερικὸν τμήμα τοῦ τετραπλεύρου. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ μὴ κυρτοῦ καὶ μὴ διασταυρουμένου τετραπλεύρου (σχ. 124), ἡ ἐσωτερικὴ διαγώνιος τὸ διαιρεῖ εἰς δύο τρίγωνα καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι 4° . Δὲν συμβαίνει τὸ ἴδιο καὶ διὰ τὸ διασταυρούμενον τετράπλευρον.

Εἰς τὰ ἐπόμενα λέγοντες «τετράπλευρον» θὰ ἐννοοῦμεν κυρτὸν τετράπλευρον ἐκτὸς ἐὰν γίνῃ ἰδιαίτερα μνεῖα περὶ μὴ κυρτοῦ τετραπλεύρου.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΝ

120. Ὁρισμός. Παραλληλόγραμμοι καλεῖται τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ παραλλήλους.

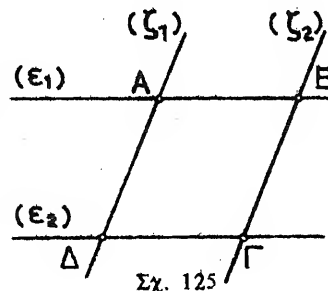
Δύο ζεύγη παραλλήλων εὐθειῶν (ϵ_1) (ϵ_2) καὶ (ζ_1), (ζ_2) τεμνόμενα ὀρίζουν ἐν παραλληλόγραμμοι (σχ. 125). Ἐν παραλληλόγραμμοι εἶναι πάντοτε κυρτοί.

121. Θεώρημα. Ἐν κυρτὸν τετράπλευρον διὰ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ τὰς προσκειμένας εἰς δύο διαδοχικὰς πλευρὰς γωνίας παραπληρωματικὰς.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $\hat{A} + \hat{B} = 2^\circ$, $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 2^\circ$ (σχ. 125). Τότε, ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἀνωτέρω σχέσεων ἔπεται ὅτι $AD \parallel BG$, ὡς σχηματίζουσαι μετὰ τῆς τεμνούσης ΑΒ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικὰς, ὁμοίως δὲ ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἀνω σχέσεων ἔπεται ὅτι $AB \parallel \Gamma D$. Ἀρα κατὰ τὸν ὁρισμόν, τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμοι.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμοι ΑΒΓΔ. Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ προσκειμένας εἰς δύο διαδοχικὰς πλευρὰς γωνία εἶναι παραπληρωματικαί.

Πράγματι, εἶναι $\hat{A} + \hat{B} = 2^\circ$ ὡς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ. Ὁμοίως εἶναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 2^\circ$.



122. Θεώρημα. Ἐν κυρτὸν τετράπλευρον, διὰ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμο, πρέπει καὶ ἄρκει νὰ ἔχη τὰς ἀπέναντι αὐτοῦ γωνίας ἴσας.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 125) διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$(1) \quad \hat{A} = \hat{\Gamma} \text{ καὶ } \hat{B} = \hat{\Delta}$$

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 4^{\circ}$, ἐφ' ὅσον τοῦτο εἶναι κυρτὸν τετράπλευρον. Τότε ἡ τελευταία, λόγῳ τῶν σχέσεων (1), γράφεται :

$$2\hat{A} + 2\hat{B} = 4^{\circ} \Rightarrow$$

$$(2) \quad \hat{A} + \hat{B} = 2^{\circ}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι :

$$(3) \quad \hat{A} + \hat{\Delta} = 2^{\circ}$$

Τότε, ἐκ τῶν (2), (3) καὶ δυνάμει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἐπεταὶ ὅτι τὸ $AB\Gamma\Delta$ εἶναι παραλληλόγραμμο.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Κατὰ τὸ προηγουμένον θεώρημα, θὰ εἶναι $\hat{A} + \hat{B} = 2^{\circ}$ καὶ $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2^{\circ}$. Ἐξ αὐτῶν ἐπεταὶ ὅτι $\hat{A} + \hat{B} = \hat{A} + \hat{\Delta} \Rightarrow \hat{B} = \hat{\Delta}$.

Ὁμοίως θὰ εἶναι καὶ $\hat{A} + \hat{B} = 2^{\circ}$ καὶ $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 2^{\circ}$ ἐκ τῶν ὁποίων ἐπεταὶ ὅτι $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Ἀρα τὸ παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ἔχει τὰς ἀπέναντι γωνίας του ἴσας.

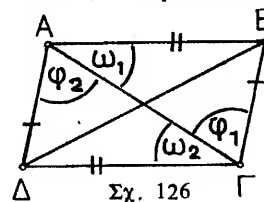
123. Θεώρημα. Ἐν κυρτὸν τετράπλευρον διὰ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμο, πρέπει καὶ ἄρκει νὰ ἔχη τὰς ἀπέναντι πλευράς του ἴσας.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $AB = \Gamma\Delta$ καὶ $A\Delta = B\Gamma$ (σχ. 126). Ἡ διαγώνιος $A\Gamma$ χωρίζει τὸ τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A\Delta\Gamma$, τὰ ὁποῖα ἔχουν $AB = \Gamma\Delta$, $B\Gamma = A\Delta$ καὶ τὴν $A\Gamma$ κοινὴν. Ἀρα εἶναι ἴσα (Π - Π - Π), ἐπομένως :

$$\hat{AB\Gamma} = \hat{A\Delta\Gamma}$$

Φέροντες καὶ τὴν διαγώνιον $B\Delta$, ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι $\hat{AB\Delta} = \hat{B\Gamma\Delta}$. Ἀρα $\hat{BA\Delta} = \hat{B\Gamma\Delta}$. Τότε αὐτό, δυνάμει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, εἶναι παραλληλόγραμμο, ὥς ἔχον τὰς ἀπέναντι γωνίας του ἴσας.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Θὰ δείξωμεν ὅτι $AB = \Gamma\Delta$ καὶ $B\Gamma = A\Delta$. Τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $\Gamma\Delta A$ ἔχουν τὴν πλευρὰν $A\Gamma$ κοινὴν καὶ τὰς γωνίας $\omega_1 = \omega_2$ καὶ $\varphi_1 = \varphi_2$, ὥς ἐντὸς ἐναλλάξ τῶν παραλ-



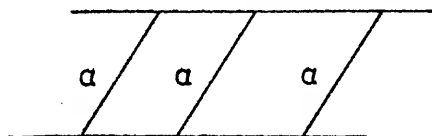
λήλων $AB // \Gamma\Delta$ και $B\Gamma // A\Delta$ ἀντιστοίχως τεμνομένων ὑπὸ τῆς $ΑΓ$. Ἄρα τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα ($\Gamma - \Pi - \Gamma$). Ἐπομένως $AB = \Gamma\Delta$ και $B\Gamma = A\Delta$.

Πόρισμα I. Ἐκάστη διαγώνιος παραλληλογράμμου χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα.

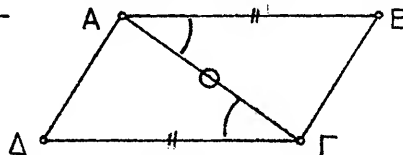
Πόρισμα II. Παράλληλα τμήματα ἔχοντα τὰ ἄκρα αὐτῶν ἐπὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι ἴσα (σχ. 127).

124. Θεώρημα. Ἐάν ἐν κυρτὸν τετράπλευρον ἔχη δύο ἀπέναντι πλευράς του ἴσας και παραλλήλους, εἶναι παραλληλόγραμμοι.

Ἀπόδειξις. Ἐστω κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 128) τοῦ ὁποῖου θεωροῦμεν τὰς πλευράς AB και $\Gamma\Delta$ ἴσας και παραλλήλους. Φέρομεν τὴν διαγώνιον $ΑΓ$, ἡ ὁποία χωρίζει τοῦτο εἰς δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta A$, τὰ ὁποῖα



Σχ. 127

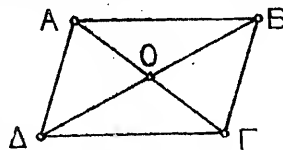


Σχ. 128

ἔχουν δύο πλευράς ἀντιστοίχως ἴσας $ΑΓ = ΑΓ$, $AB = \Gamma\Delta$ και τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσην λόγῳ τῶν $AB // \Gamma\Delta$ τεμνομένων ὑπὸ τῆς $ΑΓ$. Ἄρα εἶναι ἴσα ($\Pi - \Gamma - \Pi$), ἐπομένως θὰ εἶναι και $A\Delta = B\Gamma$. Ἦδη τὸ τετράπλευρον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του ἀνὰ δύο ἴσας. Ἄρα (§ 123) εἶναι παραλληλόγραμμοι.

125. Θεώρημα. Ἐν κυρτὸν τετράπλευρον, διὰ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμοι, πρέπει και ἀρκεῖ αἱ διαγώνιοί του νὰ διχοτομοῦνται.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 129), τοῦ ὁποῖου αἱ διαγώνιοι τεμνομένην εἰς τὸ σημεῖον O διχοτομοῦνται, ἥτοι εἶναι $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$. Τότε τὰ τρίγωνα AOB και $ΓΟΔ$, ὡς ἔχοντα δύο πλευράς ἴσας και τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσην, ὡς κατὰ κορυφὴν, εἶναι ἴσα ($\Pi - \Gamma - \Pi$). Ἐπομένως $AB = \Gamma\Delta$. Ἐπὶ πλέον εἶναι $AB // \Gamma\Delta$, διότι αὗται τεμνομένην ὑπὸ τῆς $ΑΓ$ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας. Ἄρα, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα τὸ $AB\Gamma\Delta$ εἶναι παραλληλόγραμμοι.



Σχ. 129

Ἀντιστρόφως. Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμοι $AB\Gamma\Delta$ τοῦ ὁποῖου αἱ διαγώνιοι $ΑΓ$ και $B\Delta$ τέμνονται εἰς τὸ O . Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ μέσον ἐκάστης.

Πράγματι, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα AOB και $ΓΟΔ$ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὰς πλευράς των AB και $\Gamma\Delta$ ἴσας και τὰς προσκειμένας αὐτῶν γωνίας ἀνὰ δύο ἴσας λόγῳ τῶν παραλλήλων $AB // \Gamma\Delta$ τεμνομένων ὑπὸ τῶν $ΑΓ$ και $B\Delta$

ἀντιστοιχώς. Ἐπομένως θὰ εἶναι $OA = OG$ καὶ $OB = OD$, ἥτοι αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται.

126. Κέντρον συμμετρίας παραλληλογράμμου.

Θεώρημα. Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

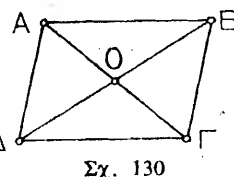
Ἀπόδειξις. Ἐστω παραλληλόγραμμον $ABΓΔ$ (σχ. 130) καὶ O τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του. Ἐπειδὴ τὸ O εἶναι μέσον ἐκάστης τῶν διαγωνίων (§ 125), δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὰς ἀκολουθοῦσας ἀπεικονίσεις κεντρικῆς συμμετρίας ὡς πρὸς κέντρον τὸ O :

$$\left. \begin{array}{l} A \longleftrightarrow \Gamma \\ B \longleftrightarrow \Delta \\ \Gamma \longleftrightarrow A \\ \Delta \longleftrightarrow B \end{array} \right\} \Rightarrow AB\Gamma\Delta \longleftrightarrow \Gamma\Delta AB$$

Ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$ ἀπεικονίζεται εἰς ἑαυτὸ μέσῳ κεντρικῆς συμμετρίας ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του O , ἥτοι τὸ O εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ παραλληλογράμμου.

127. Θεώρημα. (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). Ἐὰν ἓν τετράπλευρον ἔχει κέντρον συμμετρίας, εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 130) μὲ κέντρον συμμετρίας σημεῖον O . Ἡ πλευρὰ AB , μέσῳ τῆς συμμετρίας κέντρου O , ἀπεικονίζεται ὅπωςδήποτε ἐπὶ τῆς $\Gamma\Delta$, διότι μετὰ τῶν $A\Delta$ καὶ $B\Gamma$ ἔχει κοινὰ σημεῖα (§ 82). Τότε, λόγῳ τῆς κεντρικῆς συμμετρίας, θὰ εἶναι $AB = \Gamma\Delta$ καὶ $AB // \Gamma\Delta \Rightarrow AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμον (§ 124).



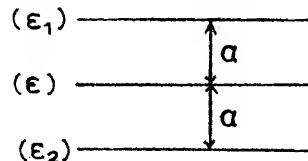
Σημείωσις. Τὸ κέντρον συμμετρίας O καλεῖται ἀπλῶς κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου ἢ καὶ κέντρον βάρους αὐτοῦ. Ὁ ὅρος αὐτὸς ἔχει ληφθῆ ἀπὸ τὴν φυσικὴν διότι τὸ κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον βάρους ὕλικῆς πλακὸς ἐξ ὁμογενοῦς ὕλικου, σχήματος παραλληλογράμμου.

128. Ἀπόστασις δύο παραλλήλων εὐθειῶν καλεῖται τὸ μήκος εὐθυγράμμου τμήματος καθέτου πρὸς αὐτὰς καὶ ἔχοντος τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν παραλλήλων.

129. Μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων εὐθειῶν (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) καλεῖται

μία εὐθεία (ε) παράλληλος πρὸς αὐτὰς καὶ ἀπέχουσα ἴσας ἀποστάσεις ἀπ' αὐτάς (σχ. 131).

Ἡ μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων εὐθειῶν εὐρίσκεται ἐντὸς τῆς ζώνης τὴν ὁποίαν ὀρίζουν αὐταί.



Σχ. 131

130. Βάσις παραλληλογράμμου δύναται νὰ λέγεται οιαδήποτε πλευρά του.

131. Ὑψος παραλληλογράμμου καλεῖται ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πλευρῶν του. Ἀρα κάθε παραλληλόγραμμον ἔχει δύο ὕψη u_1 καὶ u_2 (σχ. 132).

132. Σύνοψις τῶν ιδιοτήτων τῶν παραλληλογράμμων.

Κάθε παραλληλόγραμμον ἔχει τὰς κάτωθι ιδιότητες :

i) Αἱ ἀπέναντι αὐτοῦ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι.

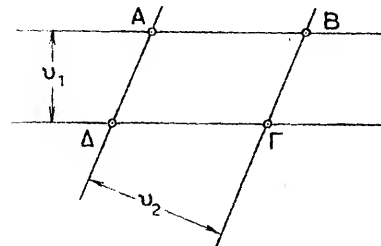
ii) Αἱ γωνίαι αἱ προσκείμεναι εἰς ἐκάστην πλευρὰν εἶναι παραπληρωματικάί.

iii) Αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

iv) Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

v) Αἱ διαγώνιοι διχοτομοῦνται.

vi) Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.



Σχ. 132

Αἱ προηγούμεναι ιδιότητες δύνανται νὰ χρησιμεύσουν καὶ ὡς γνωρίσματα τῶν παραλληλογράμμων. Ἄν δηλαδὴ ἀνακαλύψωμεν ὅτι εἰς ἓν τετράπλευρον ἰσχύει μία ἐξ αὐτῶν, τότε τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Α'.

130. Αἱ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν παραλληλογράμμου εἶναι παράλληλοι, ἐνῶ αἱ διχοτόμοι τῶν προσκειμένων γωνιῶν του εἶναι κάθετοι.

131. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ σημείου Δ τῆς ΒΓ ἄγομεν παραλλήλους πρὸς τὰς δύο ἄλλας πλευράς του, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ἐκ τοῦ Α παράλληλον τῆς ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Δείξατε ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα.

132. Εἰς πᾶν παραλληλόγραμμον δείξατε ὅτι ἡ μεγαλύτερα διαγώνιος εἶναι ἡ ἐχούσα ὡς ἄκρα τὰς κορυφὰς τῶν μικροτέρων γωνιῶν.

133. Εἰς παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ συνδέομεν δι' εὐθυγράμμων τμημάτων τὰ μέσα

Ε και Ζ δύο ἀπέναντι πλευρῶν του, ἕκαστον με τὰς δύο ἀπέναντι κορυφάς. Δείξατε ὅτι τὰ τέσσαρα τμήματα σχηματίζουν παραλληλόγραμμον.

134. Τὰ μέσα τῶν τεσσάρων τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ κέντρον ἑνὸς παραλληλογράμμου χωρίζει τὰς δύο διαγωνίους του, εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου μετὰ τὸ αὐτὸ κέντρον.

135. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν τὰς διαμέσους AD καὶ BE καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα $\Delta H = DA$, $EZ = EB$ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι τὰ σημεία H , Γ , Z κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ὅτι τὸ Γ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος HZ .

136. Ἀπὸ τὸ κέντρον O παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ φέρομεν εὐθεῖαν (δ) , ἡ ὁποία τέμνει τὰς δύο ἀπέναντι πλευράς AB , $\Gamma\Delta$ τοῦ παραλληλογράμμου εἰς τὰ E καὶ Z . Δείξατε ὅτι τὸ $AE\Gamma Z$ εἶναι παραλληλόγραμμον.

B'.

137. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ ἔστω AD ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας \widehat{A} αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ Δ ἄγομεν παράλληλον τῆς AB , ἡ ὁποία τέμνει τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ E καὶ ἐκ τοῦ E παράλληλον τῆς $B\Gamma$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ Z . Δείξατε ὅτι εἶναι $AE = BZ$.

138. Ἐστω ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) καὶ M τυχὸν σημεῖον τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$. Ἐκ τοῦ M φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἰσας πλευράς τοῦ τριγώνου, ἕκαστη τῶν ὁποίων τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς τὰ Δ καὶ E . Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα $M\Delta + ME$ παραμένει σταθερόν.

139. Παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνομεν τὰς πλευράς του κατὰ κυκλικὴν σειρὰν καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν τμήματα $BA' = BA$, $\Gamma B' = \Gamma B$, $\Delta\Gamma' = \Delta\Gamma$, $A\Delta' = A\Delta$. Δείξατε ὅτι :

- α) τὸ τετράπλευρον $A'B'\Gamma'\Delta'$ εἶναι παραλληλόγραμμον,
- β) τὰ κέντρα τῶν δύο παραλληλογράμμων συμπίπτουν.

140. Ἀπὸ σημείου Δ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ ἄγομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἄλλας πλευράς του, αἱ ὁποῖαι τὰς τέμνουν εἰς τὰ σημεία E καὶ Z . Ἐὰν $\beta > \gamma$, δείξατε ὅτι ἡ τεθλασμένη γραμμὴ $E\Delta Z$ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γ καὶ μικροτέρα τῆς β .

141. Ἐὰν κυρτοῦ ἑξαγώνου $AB\Gamma\Delta EZ$ αἱ ἀπέναντι γωνία εἶναι ἴσαι, ἤτοι $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$, δείξατε ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι, ἤτοι $AB \parallel \Delta E$, $B\Gamma \parallel EZ$, $\Gamma\Delta \parallel ZA$.

ΕΙΔΙΚΑ ΤΙΝΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

133. Ὁρθογώνιον καλεῖται τὸ τετράπλευρον τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς γωνίας του ὀρθάς.

134. Θεώρημα. Ἐὰν τετραπλεύρου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι, τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἀπόδειξις. Πράγματι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κάθε τετραπλεύρου εἶναι τέσσαρες ὀρθαὶ γωνίαι καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὅλαι ἴσαι μεταξύ των, ἔπεται ὅτι ἕκαστη εἶναι ὀρθή. Ἀρα τὸ τετράπλευρον εἶναι ὀρθογώνιον (σχ. 133).



Σχ. 133

135. Θεώρημα. Τὸ ὀρθογώνιον εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀπόδειξις. Πράγματι, ἐφ' ὅσον αἱ προσκείμεναι εἰς ἐκάστην πλευρὰν γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαὶ (§ 121) τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον. Καλεῖται δὲ καὶ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον.

136. Θεώρημα. Ἐάν ἐν παραλληλόγραμμον ἔχη μίαν γωνίαν ὀρθήν, εἶναι ὀρθογώνιον.

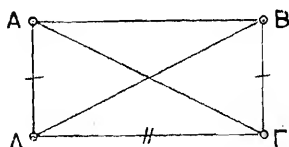
Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$, τὸ ὁποῖον ἔχει $\widehat{A} = 1^\circ$ (σχ. 133). Τότε θὰ ἔχη καὶ $\widehat{B} = \widehat{\Delta} = 1^\circ$, ὡς παραπληρωματικαὶ τῆς \widehat{A} (§ 121), ὡς ἐπίσης καὶ $\widehat{\Gamma} = 1^\circ$, ὡς ἴση πρὸς τὴν \widehat{A} (§ 122). Ἀρα τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

137. Θεώρημα. Τὸ ὀρθογώνιον ἔχει ἴσας διαγωνίους.

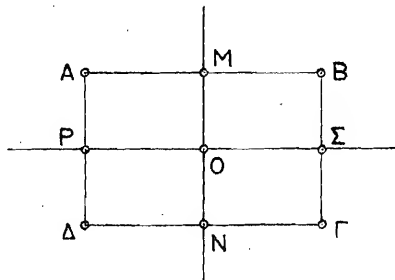
Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ ὀρθογώνιον $AB\Gamma\Delta$ καὶ AG , BD αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ (σχ. 134). Τὰ τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ καὶ $B\Gamma\Delta$ εἶναι ὀρθογώνια, ἔχουν $A\Delta = B\Gamma$, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς ὀρθογωνίου καὶ τὴν $\Delta\Gamma$ κοινὴν, ἄρα εἶναι ἴσα. Τότε θὰ εἶναι καὶ $AG = BD$.

138. Θεώρημα. Ἐάν ἐν παραλληλόγραμμον ἔχη τὰς διαγωνίους τοῦ ἴσας, εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὸ παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 134). μὲ $AG = BD$. Τὰ τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ καὶ $B\Delta\Gamma$ ἔχουν τότε καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς τῶν ἴσας, ἄρα εἶναι ἴσα. Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν $\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{B\Gamma\Delta}$. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι αὗται εἶναι καὶ παραπληρωματικαί, ὡς προσκείμεναι τῆς πλευρᾶς $\Gamma\Delta$ τοῦ πα-



Σχ. 134



Σχ. 135

ραλληλογράμμου, συνεπῶς εἶναι ὀρθαί. Ἀρα τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον.

139. Ἄξονες συμμετρίας τοῦ ὀρθογωνίου. Εἰς ὀρθογώνιον $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 135), ἐάν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν τὴν ὀριζομένην ἀπὸ τὰ μέσα M καὶ N τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ AB καὶ $\Gamma\Delta$, αὕτη θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς $A\Delta$ καὶ

ΒΓ και κάθετος πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ, διότι τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΑΜΝΔ εἶναι ὀρθογώνιον, ὡς ἔχον $ΑΜ // ΔΝ$ καὶ τὴν γωνίαν $\widehat{Α}$ ὀρθήν. Ἐπομένως ἡ εὐθεῖα ΜΝ εἶναι κοινὴ μεσοκάθετος τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, ἄρα εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος. Ἐπίσης ἡ ΡΣ, ἡ ὀριζομένη ἀπὸ τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου, εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος. Ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας καθέτους.

140. Θεώρημα. Ἡ διάμεσος ὀρθογωνίου τριγώνου ποὺ ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτείνουσας, καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 136) καὶ ΑΟ ἡ διάμεσος αὐτοῦ ἐκ τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀρθῆς γωνίας. Εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς λαμβάνομεν σημεῖον Δ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $ΟΑ = ΟΔ$. Ἄρα :

$$(1) \quad 2 \cdot ΟΑ = ΑΔ$$

Τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοι τοῦ διχοτομοῦνται καὶ μάλιστα

εἶναι ὀρθογώνιον, διότι ἔχει $\widehat{Α} = 1^{\circ}$. Ἐπομένως αἱ διαγώνιοι τοῦ θὰ εἶναι ἴσαι, ἤτοι :

$$(2) \quad ΑΔ = ΒΓ$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $2 \cdot ΟΑ = ΒΓ$ ἢ $ΟΑ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω ὅτι ἡ διάμεσος ΑΟ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ.

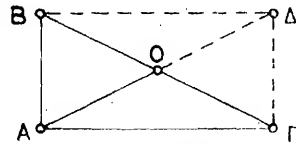
Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΑΟ λαμβάνομεν σημεῖον Δ οὕτως, ὥστε $ΟΑ = ΟΔ$. Τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοι τοῦ διχοτομοῦνται. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ εἶναι $ΟΑ = \frac{ΒΓ}{2} \Rightarrow 2 \cdot ΟΑ = ΒΓ$ ἢ $ΑΔ = ΒΓ$. Ἄρα, ἐφ' ὅσον ἔχει καὶ διαγωνίους ἴσας, εἶναι ὀρθογώνιον, ἐπομένως $\widehat{Α} = 1^{\circ}$, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον.

141. Ρόμβος καλεῖται τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας.

Ὁ ρόμβος εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του ἴσας.

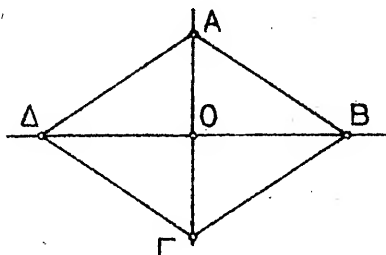
Πόρισμα. Τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευράς ἴσας, εἶναι ρόμβος.

142. Θεώρημα. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου εἶναι κάθετοι.

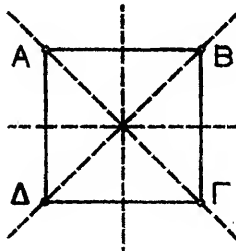


Σχ. 136

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὁ ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 137). Τὸ σημεῖον A ἰσαπέχει ἐκ τῶν B καὶ Δ , ἐφ' ὅσον εἶναι $AB = A\Delta$, ὡς πλευραὶ ρόμβου. Τότε τὸ σημεῖον A ἀνήκει εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος $B\Delta$. Ὁμοίως τὸ σημεῖον Γ ἀνήκει εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ $B\Delta$. Ἐπομένως ἡ $A\Gamma$ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $B\Delta$. Ἄρα $A\Gamma \perp B\Delta$.



Σχ. 137



Σχ. 138

143. Θεώρημα (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). Ἐὰν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου εἶναι κάθετοι, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ρόμβος.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 137), τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$ τέμνονται εἰς τὸ O καὶ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Τὸ τρίγωνον $AB\Delta$ ἔχει τὸ τμήμα AO ὕψος καὶ διάμεσον. Ἄρα τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, ἥτοι $AB = A\Delta$. Τότε τὸ παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ρόμβος (§ 141 πόρισμα).

Πόρισμα I. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου εἶναι ἄξονες συμμετρίας τοῦ σχήματος.

Πόρισμα II. Ἐὰν κυρτοῦ τετραπλεύρου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτοῦ, τὸ τετράπλευρον εἶναι ρόμβος.

144. Θεώρημα. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου διχοτομοῦν τὰς γωνίας του.

Ἀπόδειξις. Τοῦτο ἔπεται ἐκ τοῦ ὅτι αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου εἶναι ἄξονες συμμετρίας τοῦ σχήματος.

145. Θεώρημα (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). Ἐὰν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομοῦν τὰς γωνίας του, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ρόμβος.

Ἀπόδειξις. Ἐστω παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 137), τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$ διχοτομοῦν τὰς γωνίας του. Τότε τὸ τρίγωνον $AB\Delta$, ἐφ' ὅσον ἔχει τὸ τμήμα AO ὡς διάμεσον καὶ διχοτόμον, εἶναι ἰσοσκελές με $AB = A\Delta$. Ἄρα τὸ $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ρόμβος (§ 141 πόρισμα).

146. Τετράγωνον καλεῖται τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς γωνίας του ὀρθὰς καὶ ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας (σχ. 138).

Πόρισμα I. Τὸ τετράγωνον εἶναι ἕνας ὀρθογώνιος ρόμβος.

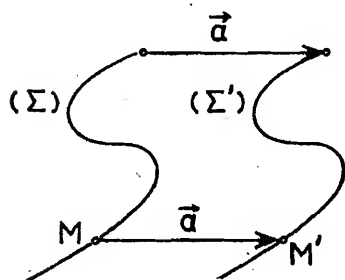
Πόρισμα II. Ένα παραλληλόγραμμο να είναι τετράγωνο, πρέπει και αρκεί οι διαγώνιοί του να είναι ίσαι και να τέμνονται καθέτως.

Πόρισμα III. Το τετράγωνο, ως ορθογώνιο μὲν ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας, τὰς μεσοκαθέτους τῶν πλευρῶν του, ως ρόμβος δὲ ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας, τὰς εὐθείας τῶν διαγωνίων του. Ἄρα τὸ τετράγωνο ἔχει τέσσαρας ἄξονας συμμετρίας (σχ. 138).

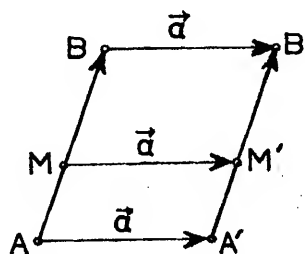
Πόρισμα IV. Οι διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου σχηματίζουν μετὰ τὰς πλευρὰς του γωνίας 45° .

147. Παράλληλος μεταφορά. Παράλληλος μεταφορά σχήματος (Σ) καλεῖται ἡ ἀπεικόνισις αὐτοῦ εἰς σχῆμα (Σ') διὰ τοῦ ἐξῆς νόμου ἀπεικονίσεως :

Κάθε σημεῖον M τοῦ σχήματος (Σ) ἀπεικονίζεται εἰς σημεῖον M' τοῦ σχήματος (Σ') διὰ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμένου τμήματος α , ἥτοι $\overrightarrow{MM'} = \alpha$ (σχ. 139). Τὸ προσανατολισμένον τμήμα α καλεῖται δείκτης τῆς μεταφορᾶς.



Σχ. 139



Σχ. 140

148. Θεώρημα. Τυχὸν προσανατολισμένον τμήμα \overrightarrow{AB} , ἀπεικονίζεται διὰ παραλλήλου μεταφορᾶς εἰς ἴσον προσανατολισμένον τμήμα $\overrightarrow{A'B'}$.

Ἀπόδειξις. Ἐστω α ὁ δείκτης τῆς μεταφορᾶς. Ἀπεικονίζομεν τὰ ἄκρα A καὶ B τοῦ προσανατολισμένου τμήματος \overrightarrow{AB} κατὰ τὸν δείκτην α εἰς τὰ A' καὶ B' ἀντιστοίχως, ἥτοι $\overrightarrow{AA'} = \alpha$, $\overrightarrow{BB'} = \alpha$ (σχ. 140). Ἐξ αὐτῶν ἔπεται ὅτι τὸ τετράπλευρον $AA'B'B$ εἶναι παραλληλόγραμμο, διότι $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \alpha \Rightarrow AA' \uparrow\uparrow BB'$. Ἄρα εἶναι καὶ $AB \uparrow\uparrow A'B' \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

Πρέπει ἀκόμη νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ \overrightarrow{AB} ἀπεικονίζεται εἰς σημεῖον M' τοῦ $\overrightarrow{A'B'}$ καὶ ἀντιστρόφως. Πράγματι, ἐὰν ἐκ τυχόντος σημείου M τοῦ \overrightarrow{AB} φέρωμεν εὐθεῖαν $MM' \parallel AA'$, ὅπου τὸ M' εἶναι ἐπὶ τοῦ $\overrightarrow{A'B'}$. Τὸ τετράπλευρον $AA'M'M$ εἶναι παραλληλόγραμμο, ὡς ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς του παραλλήλους. Ἄρα θὰ εἶναι $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'} = \alpha$, ἥτοι τὸ

M' είναι ή εἰκὼν τοῦ σημείου M κατὰ τὴν μεταφορὰν δείκτου $\vec{\alpha}$. Ὀμοίως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον, ἥτοι τυχὸν σημεῖον M' τοῦ $\vec{A'B'}$ ἔχει ὡς πρότυπον ἓν σημεῖον M τοῦ \vec{AB} κατὰ τὴν μεταφορὰν δείκτου $\vec{\alpha}$.

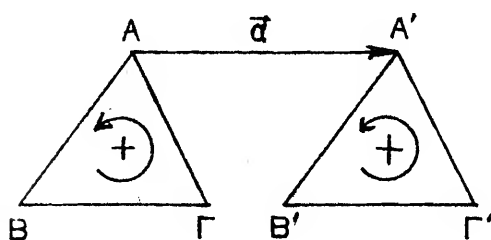
Ἀναφερόμενοι καὶ εἰς μὴ προσανατολισμένα τμήματα, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ παράλληλος μεταφορὰ τὰ ἀπεικονίζει εἰς παράλληλα καὶ ἴσα.

Πόρισμα I. Κάθε τρίγωνον ἀπεικονίζεται διὰ παράλληλου μεταφορᾶς εἰς ἴσον τρίγωνον καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ (φορᾶς διαγραφῆς).

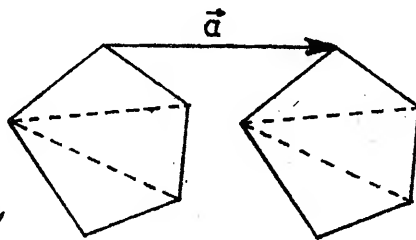
Πράγματι, ἓν τρίγωνον $AB\Gamma$ ἀπεικονίζεται διὰ τοῦ δείκτου μεταφορᾶς $\vec{\alpha}$ εἰς ἴσον τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ (σχ. 141), διότι τὰ δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.

Πόρισμα II. Κάθε πολὺγωνον ἀπεικονίζεται διὰ παράλληλου μεταφορᾶς εἰς ἴσον πολὺγωνον καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.

Πράγματι αὐτὸ συμβαίνει, διότι τὰ δύο πολὺγωνα δύνανται νὰ διαιρεθοῦν εἰς ἴσα καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ τρίγωνα (σχ. 142).



Σχ. 141



Σχ. 142

Τὰ ἀνωτέρω δύνανται νὰ γενικευθοῦν δι' οἰονδήποτε σχῆμα (Σ), τὸ ὁποῖον ἀπεικονίζεται διὰ παράλληλου μεταφορᾶς εἰς ἴσον καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ σχῆμα (Σ'). Κατὰ συνέπειαν ἡ παράλληλος μεταφορὰ εἶναι μετατόπισις καὶ ὡς ἐκ τούτου δύνανται νὰ λέγεται καὶ **παράλληλος μετατόπισις**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

142. Δίδονται δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) τεμνόμεναι εἰς τὸ O . Ἀπὸ σημείου A τῆς (ε_1) φέρομεν καθέτους AB καὶ $A\Gamma$ πρὸς τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν δύο εὐθειῶν. Δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον $ABO\Gamma$ εἶναι ὀρθογώνιον, ἡ δὲ $B\Gamma$ εἶναι παράλληλος τῆς (ε_2).

143. Δίδεται γωνία \widehat{xOy} καὶ σημεῖον A ἐντὸς αὐτῆς. Φέρομεν $AB \perp Ox$, $A\Gamma \perp Oy$ καὶ ἐκ τοῦ μέσου M τοῦ τμήματος OA φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν $B\Gamma$. Δείξατε ὅτι ἡ κάθετος αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος $B\Gamma$.

144. Είς ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) φέρομεν τὸ ὕψος AD . Ἐάν E καὶ Z εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν AB καὶ $A\Gamma$, δείξατε ὅτι $\widehat{E\Delta Z} = 1^\circ$.

145. Ἀπὸ σημείου M τῆς διχοτόμου γωνίας \widehat{XOY} φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς τῆς, αἱ ὁποῖαι ὀρίζουν ἐπ' αὐτῶν τὰ σημεία A καὶ B . Δείξατε ὅτι τὰ τμήματα AB καὶ OM τέμνονται καθέτως καὶ ἀλληλοδιχοτομοῦνται.

146. Συνδέομεν τυχὸν σημεῖον M τῆς διαγωνίου $A\Gamma$ ρόμβου $AB\Gamma\Delta$ μετὰ τὰς κορυφὰς τοῦ B καὶ Δ . Δείξατε ὅτι ὁ ρόμβος ἔχει χωρισθῇ εἰς δύο ζεύγη ἴσων τριγώνων.

147. Τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνομεν τὰς πλευράς AB καὶ $B\Gamma$. Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς AB καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ B λαμβάνομεν σημεῖον M , εἰς δὲ τὴν προέκτασιν τῆς $B\Gamma$ καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ λαμβάνομεν σημεῖον N τοιοῦτον, ὥστε $\Gamma N = AM$. Κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον $M\Delta N E$. Δείξατε ὅτι τοῦτο εἶναι τετράγωνον.

148. Δείξατε ὅτι τὰ ὕψη ρόμβου εἶναι ἴσα καὶ ἀντιστρόφως, ἐάν παραλληλόγραμμον ἔχῃ ἴσα ὕψη εἶναι ρόμβος.

149. Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ διχοτόμος τῆς ὀρθῆς γωνίας διχοτομεῖ καὶ τὴν γωνίαν τοῦ ὕψους καὶ τῆς διαμέσου πού ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας.

150. Ἐάν παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ εἶναι $AB = 2 \cdot B\Gamma$ καὶ E εἶναι τὸ μέσον τῆς $\Gamma\Delta$, δείξατε ὅτι $\widehat{AEB} = 1^\circ$.

B'.

151. Ἡ κάθετος πού ἄγεται ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς βάσεως $B\Gamma$ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) ἐπ' αὐτήν, τέμνει τὴν μίαν πλευρὰν καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ἄλλης εἰς τὰ σημεία E καὶ Z . Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα $\Delta E + \Delta Z$ εἶναι σταθερόν.

152. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) φέρομεν τὸ ὕψος AD καὶ ἐκ τοῦ Δ τὰς καθέτους ΔE καὶ ΔZ ἐπὶ τὰς AB καὶ $A\Gamma$. Δείξατε ὅτι ἡ EZ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμεσον AM τοῦ τριγώνου.

153. Ἐστω ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) καὶ M τυχὸν σημεῖον τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$. Ἐκ τοῦ M φέρομεν καθέτους ME καὶ MZ ἐπὶ τὰς AB καὶ $A\Gamma$. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα $ME + MZ$ παραμένει σταθερόν.

154. Τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν τὰ ὕψη BD καὶ ΓE . Δείξατε ὅτι $\Delta E < B\Gamma$.

155. Ἐάν O εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον ἰσοπλευροῦ τριγώνου $AB\Gamma$, δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τὰς πλευράς τοῦ τριγώνου εἶναι σταθερόν.

156. Τὰ τμήματα πού ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημείου τῆς βάσεως $B\Gamma$ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) καὶ τέμνουν τὰς ἴσας πλευράς τοῦ ὑπὸ τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν γωνίαν, ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

157. Δίδονται δύο ἐφεξῆς γωνίαι \widehat{XOY} , \widehat{YOZ} ἐκάστη 60° καὶ M τυχὸν σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς \widehat{XOY} . Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ M ἀπὸ τὰς Ox , καὶ Oy εἶναι ἴσον μετὰ τὴν ἀπόστασιν τοῦ M ἀπὸ τὴν Oz .

158. Ὁρθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ φέρομεν $AA' \perp B\Delta$ καὶ $\Gamma\Gamma' \perp B\Delta$. Ἐάν E καὶ Z εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν AB καὶ $B\Gamma$ ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι $A'E$ καὶ $\Gamma'Z$ τέμνονται ὀρθογωνίως.

159. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν παραλληλογράμμου τεμνόμεναι σχηματίζουν ὀρθογώνιον, τοῦ ὅπου αἱ διαγώνιοι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευράς τοῦ παραλληλογράμμου. Πότε τοῦτο εἶναι τετράγωνον;

160. Εάν E και Z είναι σημεία τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ ἀντιστοίχως ῥόμβου ΑΒΓΔ, αἱ εὐθεῖαι ΕΒ, ΕΔ, ΖΑ, ΖΓ τεμνόμεναι σχηματίζουν κυρτὸν τετράπλευρον, τοῦ ὁποῦ αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικά.

ΤΡΑΠΕΖΙΟΝ

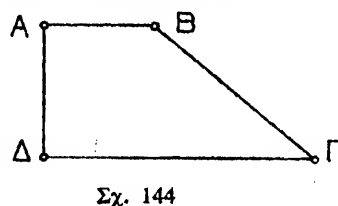
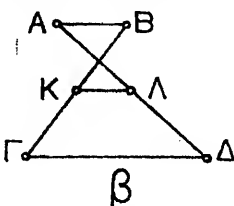
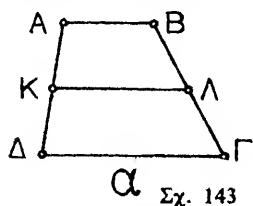
149. Ὅρισμός. Κάθε τετράπλευρον, τοῦ ὁποῦ αἱ δύο μόνον ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι, λέγεται **τραπέζιον**.

Ἐν τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι δυνατόν νὰ εἶναι κυρτὸν (σχ. 143α) ἢ καὶ μὴ κυρτὸν (σχ. 143β).

Αἱ παράλληλοι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ τραπέζιου ΑΒΓΔ λέγονται **βάσεις** αὐτοῦ καὶ ἡ ἀπόστασίς των, ὕψος τοῦ τραπέζιου.

Διάμεσος τραπέζιου λέγεται τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΚΛ μέ ἄκρα τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.

150. **Θεώρημα.** Παντὸς κυρτοῦ τραπέζιου, αἱ γωνίαι αἱ προσκείμεναι εἰς ἐκάστην τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν, εἶναι παραπληρωματικά



Ἀπόδειξις. Ἐστω κυρτὸν τραπέζιον ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$. (σχ. 143α). Ἡ πλευρὰ ΑΔ, ὡς τέμνουσα τὰς παραλλήλους ΑΒ καὶ ΓΔ, θὰ σχηματίζῃ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς. Ἀρα θὰ εἶναι $\widehat{A} + \widehat{D} = 2^\circ$. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὰς γωνίας \widehat{B} καὶ \widehat{C} , ἤτοι $\widehat{B} + \widehat{C} = 2^\circ$.

Πόρισμα. Ἐὰν ἐν τραπέζιον ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθήν, ἔχει καὶ μίαν ἄλλην γωνίαν ὀρθήν. Τότε τὸ τραπέζιον λέγεται ὀρθογώνιον τραπέζιον (σχ. 144).

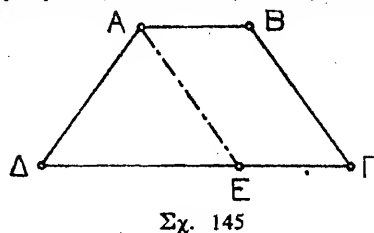
151. Ἴσοσκελές τραπέζιον καλεῖται τὸ τραπέζιον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἴσας τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του (σχ. 145).

152. **Θεώρημα.** Παντὸς ἰσοσκελοῦς τραπέζιου, αἱ προσκείμεναι εἰς ἐκάστην βάσιν γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὸ ἰσοσκελές τραπέζιον ΑΒΓΔ με

$$(1) \quad BG = AD$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι $\widehat{C} = \widehat{D}$ καὶ $\widehat{A} = \widehat{B}$.



Ἐκ τοῦ ἄκρου Α τῆς μικροτέρας βάσεως ΑΒ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν βάσιν ΓΔ εἰς τὸ Ε (σχ. 145). Τότε θὰ εἶναι :

$$(2) \quad \text{ΒΓ} = \text{ΑΕ},$$

διότι εἶναι παράλληλα τμήματα κείμενα μεταξύ παραλλήλων. Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι $\text{ΑΔ} = \text{ΑΕ}$, ἥτοι τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἰσοσκελές. Τότε θὰ ἔχῃ :

$$(3) \quad \widehat{\Delta} = \widehat{\text{ΑΕΔ}}.$$

Ἐπὶ πλέον ἔχομεν ὅτι :

$$(4) \quad \widehat{\Gamma} = \widehat{\text{ΑΕΔ}},$$

λόγῳ τῶν παραλλήλων $\text{ΑΕ} \parallel \text{ΒΓ}$, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓΕ. Ἐκ τῶν σχέσεων

$$(3) \text{ καὶ } (4) \text{ ἔπεται ὅτι } \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}.$$

Τότε θὰ εἶναι καὶ $\widehat{\text{Β}} = \widehat{\text{Α}}$ ὡς παραπληρώματα τῶν ἴσων γωνιῶν $\widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Delta}$ ἀντιστοίχως. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ μὴ κυρτὸν τραπέζιον.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 145) μὲ

$$(5) \quad \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta},$$

Θὰ δεῖξωμε ὅτι τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.

Ἐκ τῆς κορυφῆς Α τῆς μικροτέρας βάσεως ΑΒ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΓΔ εἰς τὸ Ε. Τότε θὰ εἶναι :

$$(6) \quad \widehat{\Gamma} = \widehat{\text{ΑΕΔ}},$$

λόγῳ τῶν παραλλήλων $\text{ΒΓ} \parallel \text{ΑΕ}$, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓΕ.

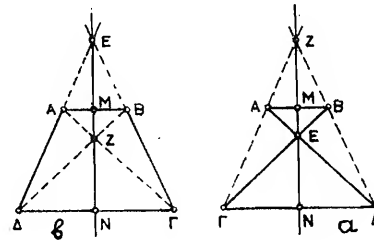
Ἐκ τῶν σχέσεων (5) καὶ (6) ἔπεται ὅτι $\widehat{\Delta} = \widehat{\text{ΑΕΔ}}$, ἥτοι τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἰσοσκελές, ὡς ἔχον τὰς παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ΔΕ γωνίας ἴσας. Ἐξ αὐτοῦ λαμβάνομεν :

$$(7) \quad \text{ΑΔ} = \text{ΑΕ},$$

Ἀλλὰ εἶναι καὶ :

$$(8) \quad \text{ΒΓ} = \text{ΑΕ},$$

ὡς παράλληλα τμήματα κείμενα μεταξύ παραλλήλων. Ἐκ τῶν (7) καὶ (8) λαμβάνομεν $\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ}$, ἥτοι τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοσκελές.



Σχ. 146

153. Ἀξων συμμετρίας ἰσοσκελοῦς τραπέζιου. Ἐπειδὴ παντὸς ἰσοσκελοῦς τραπέζιου (κυρτοῦ ἢ μὴ κυρτοῦ σχ. 146α,β) αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ σχηματίζουν μεθ' ἑκάστης τῶν βάσεων γωνίας ἴσας, αὗται προεκτείνονται (ἐν ἀνάγκῃ), τέμνονται εἰς σημεῖον Ε καὶ σχηματίζουν μετὰ τῶν βάσεων τοῦ

τραπεζίου. δύο ισοσκελῆ τρίγωνα, τὰ ΕΑΒ καὶ ΕΓΔ. Τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Ε ὕψος αὐτῶν θὰ διέρχεται ἐκ τῶν μέσων Μ καὶ Ν τῶν βάσεων ΑΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως, ἥτοι θὰ εἶναι κοινὴ μεσοκάθετος τῶν βάσεων, ἄρα ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος.

Αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ, ὡς συμμετρικαὶ μεταξύ των, εἶναι ἴσαι καὶ τέμνονται εἰς σημεῖον Ζ ἐπὶ τοῦ ἄξωνος συμμετρίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

161. Δείξατε ὅτι ἐὰν αἱ διαγώνιοι τραπεζίου εἶναι ἴσαι, τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.

162. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ἡ ἐνοῦσα τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτάς, τὸ τετράπλευρον εἶναι ἰσοσκελές τραπέζιον.

163. Ἐὰν ἡ βάσις ΓΔ τραπεζίου ΑΒΓΔ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ, δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν \hat{A} καὶ \hat{B} τέμνονται ἐπὶ τῆς ΓΔ.

164. Δείξατε ὅτι εἰς κάθε τραπέζιον ἡ διαφορά τῶν δύο βάσεων εἶναι μεγαλύτερα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο μὴ παραλλήλων πλευρῶν καὶ μικρότερα τοῦ ἄθροισματος αὐτῶν.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

154. Θεώρημα. Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα, ποὺ ὀρίζεται ἀπὸ τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου, εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν καὶ ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυν αὐτῆς.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Μ, Ν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως (σχ. 147). Φέρομεν τὸ τμήμα ΜΝ καὶ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτοῦ λαμβάνομεν τμήμα ΝΔ = ΝΜ. Τότε, τοῦ τετραπλεύρου ΑΜΓΔ αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΜΔ τεμνόμεναι εἰς τὸ Ν, διχοτομοῦνται, ἄρα τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι :

$$(1) \quad \Gamma\Delta // = MA (*)$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι ΜΑ = ΜΒ καὶ τὸ τμήμα ΜΒ κεῖται ἐπ' εὐθείας μετὰ τοῦ ΜΑ, ἔπεται ἐκ τῆς σχέσεως (1) ὅτι :

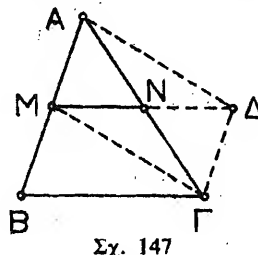
$$\Gamma\Delta // = MB.$$

Ἀρα τὸ τετράπλευρον ΒΓΔΜ εἶναι παραλληλόγραμμον. Τότε θὰ εἶναι :

$$M\Delta // = B\Gamma \quad \eta \quad 2 \cdot MN // = B\Gamma \quad \alpha\gamma\alpha :$$

$$MN // = \frac{B\Gamma}{2}$$

* Ἡ $\Gamma\Delta // = MA$ συμβολίζει τὴν παραλληλίαν καὶ ἰσότητα διὰ τὰ τμήματα ΓΔ, ΜΑ καὶ ἐπομένως ἀντικαθιστᾷ τὰς $\Gamma\Delta // MA \wedge \Gamma\Delta = MA$.



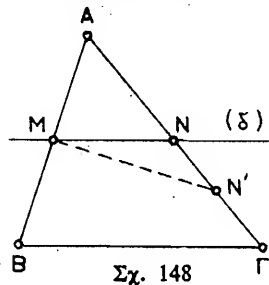
155. Θεώρημα. Ἐάν εὐθεΐα (δ) εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν $ΒΓ$ τριγώνου $ΑΒΓ$ καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον $Μ$ τῆς πλευρᾶς $ΑΒ$, τότε θὰ διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ μέσον $Ν$ τῆς πλευρᾶς $ΑΓ$ καὶ τὸ ἀποκοπτόμενον ἀπ' αὐτὴν τμήμα $ΜΝ$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς $ΒΓ$.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι ἡ ἐκ τοῦ μέσου $Μ$ τῆς $ΑΒ$ παράλληλος τῆς $ΒΓ$, τέμνει τὴν $ΑΓ$ εἰς τὸ $Ν$ (σχ. 148). Ἐάν τὸ $Ν$ δὲν ἦτο μέσον τῆς πλευρᾶς $ΑΓ$ καὶ ἦτο τὸ $Ν'$ μέσον αὐτῆς, τότε ἡ $ΜΝ'$, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ ἦτο παράλληλος τῆς $ΒΓ$. Τοῦτο ὁμῶς εἶναι ἄτοπον, διότι ἐκ τοῦ σημείου $Μ$ θὰ εἶχονεν δύο παραλλήλους, τὰς $ΜΝ$ καὶ $ΜΝ'$ πρὸς τὴν $ΒΓ$. Ἀρα ἡ ἐκ τοῦ $Μ$ παράλληλος τῆς $ΒΓ$ διέρχεται ἐκ τοῦ μέσου $Ν$ τῆς $ΑΓ$.

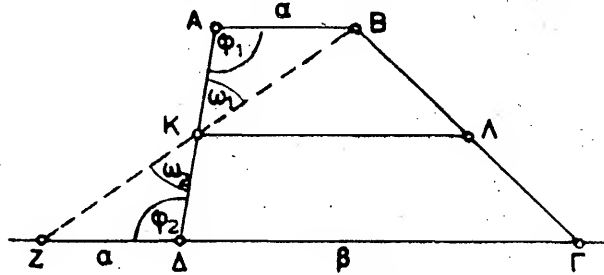
Τὸ τμήμα $ΜΝ$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς $ΒΓ$ διότι, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ προηγούμενου θεωρήματος, ὁρίζεται ἐκ τῶν μέσων $Μ$ καὶ $Ν$ τῶν πλευρῶν $ΑΒ$ καὶ $ΑΓ$ τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$.

156. Θεώρημα. Ἡ διάμεσος κυρτοῦ τραπεζίου εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις του καὶ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω κυρτὸν τραπέζιον $ΑΒΓΔ$, τοῦ ὁποῦ αἱ βάσεις εἶναι $ΑΒ = \alpha$ καὶ $ΓΔ = \beta$ (σχ. 149). Ἄν $Κ$ καὶ $Λ$ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν $ΑΔ$ καὶ $ΒΓ$ ἀντιστοίχως, φέρομεν τὴν $ΒΚ$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς βάσεως $ΓΔ$ εἰς τὸ $Ζ$.



Σχ. 148



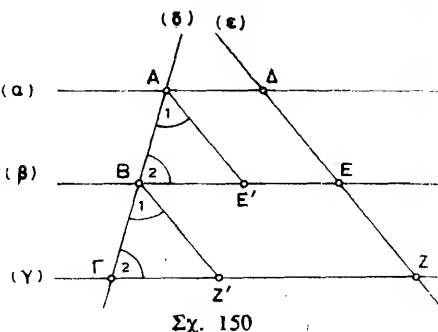
Σχ. 149

Τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα $ΑΒΚ$ καὶ $ΔΖΚ$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν $ΚΑ = ΚΔ$, $\omega_1 = \omega_2$ ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ $\phi_1 = \phi_2$, λόγῳ τῶν $ΑΒ \parallel ΓΔ$, τεμνομένων ὑπὸ τῆς $ΑΔ$. Τότε θὰ ἔχωμεν $ΒΚ = ΚΖ$, ἥτοι τὸ $Κ$ εἶναι μέσον τοῦ $ΒΖ$ καὶ $ΑΒ = ΔΖ = \alpha$.

Τοῦ τριγώνου πλέον $ΒΖΓ$, ἡ πλευρὰ $ΖΓ$ εἶναι ἴση μὲ $\alpha + \beta$, ἥτοι μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου, ἐνῶ ἡ διάμεσος $ΚΛ$ τοῦ τραπεζίου συνδέει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν $ΒΖ$ καὶ $ΒΓ$ τοῦ τριγώνου $ΒΖΓ$. Ἀρα θὰ εἶναι $ΚΛ \parallel \frac{ΖΓ}{2}$, ἥτοι $ΚΛ \parallel ΑΒ \parallel ΓΔ$ ἂν $ΚΛ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

157. Θεώρημα. Ἐάν παράλληλοι εὐθεΐαι ἀποκόπτουν ἀπὸ εὐθείαν τέμνουσαν αὐτὰς ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, τότε αὐταὶ ἀποκόπτουν ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα καὶ ἀπὸ κάθε ἄλλην τέμνουσαν αὐτάς.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τρεῖς παραλλήλους εὐθείας (α), (β), (γ) καὶ εὐθεῖαν (δ) τέμνουσαν αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε $AB = B\Gamma$ (σχ. 150). Ἐστω (ε), μία ἄλλη τέμνουσα τὰς παραλλήλους εἰς τὰ Δ, Ε, Ζ ἀντιστοίχως. Ἐκ τῶν Α καὶ Β θεωροῦμεν τὰς παραλλήλους τῆς (ε), αἱ ὁποῖαι τέμνουσι ἢ μὲν πρώτη τὴν (β) (α) εἰς τὸ Ε', ἢ δὲ δευτέρα τὴν (γ) εἰς τὸ Ζ'. Τότε τὰ τετράπλευρα ΑΔΕΕ' καὶ ΒΕΖΖ' εἶναι παραλληλόγραμμα, ἐπομένως :



Σχ. 150

$$(1) \quad \Delta E = AE' \quad \text{καὶ} \quad EZ = BZ'$$

Τὰ τμήματα AE' καὶ BZ' , ὡς παράλληλα πρὸς τὴν (ε) εἶναι καὶ μετὰξὺ των

παράλληλα. Τότε θὰ εἶναι $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ ὡς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων AE' καὶ BZ' τεμνομένων ὑπὸ τῆς (δ). Ὀμοίως $\widehat{B_2} = \widehat{\Gamma_2}$, λόγῳ τῶν παραλλήλων (β) καὶ (γ), τεμνομένων ὑπὸ τῆς (δ). Τότε τὰ τρίγωνα ABE' καὶ $B\Gamma Z'$ εἶναι ἴσα, διότι ἐπὶ πλέον ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως $AB = B\Gamma$. Ἐξ αὐτῶν ἔπεται ὅτι :

$$(2) \quad AE' = BZ'.$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται $\Delta E = EZ$.

Πόρισμα. Ἐὰν παράλληλοι εὐθεῖαι ἀποκόπτουν ἀπὸ εὐθεῖαν τέμνουσαν αὐτὰς ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, αὗται ἰσαπέχουν.

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα φαίνεται ἡ δυνατότης τῆς διαιρέσεως ἐνὸς εὐθυγράμμου τμήματος εἰς ὅσαδῆποτε ἴσα τμήματα (βλ. καὶ § 227).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

165. Δείξατε ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν παντὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου, εἶναι κορυφαί, παραλληλογράμμου. Πότε τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον, πότε ῥόμβος καὶ πότε τετράγωνον;

166. Τὰ τμήματα ποὺ συνδέουν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου, διαιροῦν αὐτὸ εἰς τέσσαρα ἴσα τρίγωνα.

167. Εἰς κάθε τρίγωνον τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καὶ τὸ ἴχνος ἐνὸς ὕψους του, εἶναι κορυφαὶ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου.

168. Δείξατε ὅτι ἡ διάμεσος ἐπὶ τινὰ πλευρὰν τριγώνου τέμνει εἰς τὸ μέσον του τὸ τμήμα ποὺ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

169. Ἐὰν ἡ μία βᾶσις κυρτοῦ τραπεζίου εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, τότε ἡ διάμεσος αὐτοῦ τριχοτομεῖται ὑπὸ τῶν διαγωνίων.

170. Ἐὰν ἡ διάμεσος ΚΑ τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνεται ὑπὸ τῶν διαγωνίων εἰς τὰ Ε καὶ Ζ δείξατε ὅτι $KE = AZ$. Πότε ἡ διάμεσος τριχοτομεῖται ὑπὸ τῶν διαγωνίων;

171. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἑνὸς τριγώνου ἀπὸ τυχοῦσαν εὐθεΐαν, ἢ ὁποία δὲν τὸ τέμνει, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ ἀπ' αὐτήν.

172. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἄγομεν τυχοῦσαν εὐθεΐαν διὰ τῆς κορυφῆς A καὶ ἀπὸ τὰ B καὶ Γ φέρομεν καθετοὺς BA καὶ ΓE ἐπ' αὐτήν. Δείξατε ὅτι τὸ μέσον M τοῦ τμήματος $B\Gamma$ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ Δ καὶ E .

B.

173. Εἰς κάθε κυρτὸν τετράπλευρον τὰ τμήματα ποὺ ὀρίζονται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν καὶ ἀπὸ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι μέσον ἑκάστου.

174. Ἡ εὐθεΐα ἢ διερχομένη διὰ τῆς κορυφῆς A τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ τοῦ μέσου E τῆς διαμέσου BA τέμνει τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ εἰς σημεῖον Z . Δείξατε ὅτι $Z\Gamma = 2.BZ$.

175. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν τὴν διχοτόμον AA καὶ ἐκ τοῦ B κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἢ ὁποία τὴν τέμνει εἰς τὸ E . Ἐὰν εἶναι M τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$, δείξατε ὅτι $EM \parallel A\Gamma$ καὶ $EM = \frac{|AB - A\Gamma|}{2}$.

176. Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα μὲ ἄκρα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τραπέζιου, εἶναι παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τοῦ καὶ ἴσον πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν αὐτῶν.

177. Ἐστω Δ τυχὸν σημεῖον τῆς πλευρᾶς AB ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς $A\Gamma$ λαμβάνομεν τμήμα $\Gamma E = BA$. Δείξατε ὅτι τὸ τμήμα ΔE διχοτομεῖται ἀπὸ τὴν $B\Gamma$.

178. Εἰς κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ φέρομεν τὴν BE παράλληλον καὶ ἴσην τῆς AA καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος κειμένην μετὰ τῆς AA ὡς πρὸς τὴν AB . Δείξατε ὅτι τὸ τμήμα ΓE εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεΐαν τὴν ἐνοῦσαν τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου.

179. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον E τῆς πλευρᾶς AB παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν AA καὶ $B\Gamma$ αὐτοῦ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως σημεῖα Z καὶ H οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $AZ = AE$ καὶ $BH = BE$. Ἐὰν M εἶναι τὸ μέσον τῆς ZH , δείξατε ὅτι $\widehat{AMB} = 1L$.

180. Διὰ τῆς κορυφῆς A παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεΐαν (ϵ). Δείξατε ὅτι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Γ ἀπὸ τὴν (ϵ) ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν B καὶ Γ ἀπὸ τὴν (ϵ), ἀναλόγως τοῦ ἂν ἡ εὐθεΐα (ϵ) δὲν τέμνη ἢ τέμνη τὸ παραλληλόγραμμον.

181. Δίδεται παραλληλόγραμμον καὶ τυχοῦσα εὐθεΐα (ϵ) μὴ τέμνουσα αὐτό. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τοῦ παραλληλογράμμου ἀπὸ τὴν (ϵ) ἰσοῦται πρὸς τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλογράμμου ἀπὸ τὴν (ϵ).

182. Ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου εὐθυγράμμου τμήματος ἀπὸ τυχοῦσαν εὐθεΐαν ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμίθροισμα ἢ μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν ἀποστάσεων τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος ἀπὸ τὴν εὐθεΐαν, ἀναλόγως τοῦ ἂν τὸ τμήμα δὲν τέμνη ἢ τέμνη τὴν εὐθεΐαν.

KENTRA TOY TPIΓΩNOY

158. Θεώρημα. Αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ (σχ. 151). Θεωροῦμεν τὰς μεσοκάθετους τῶν πλευρῶν $B\Gamma$ καὶ $A\Gamma$. Αὗται εἶναι κάθετοι εἰς μὴ παραλλή-

λους πλευράς ΒΓ καὶ ΑΓ, συνεπῶς δὲν εἶναι παράλληλοι, ἄρα τέμνονται εἰς ἐν σημεῖον Ο. Τὸ σημεῖον τοῦτο, ὡς ἀνήκον εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΒΓ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα του, ἥτοι :

$$(1) \quad OB = OG.$$

Ὁμοίως τὸ σημεῖον Ο ἰσαπέχει ἐκ τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος ΑΓ, ὡς ἀνήκον εἰς τὴν μεσοκάθετον αὐτοῦ, ἥτοι :

$$(2) \quad OG = OA.$$

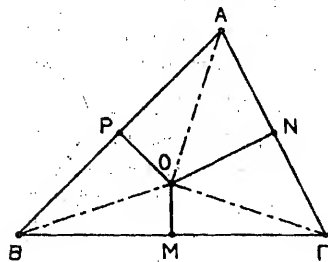
Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἐπεταί :

$$OA = OB,$$

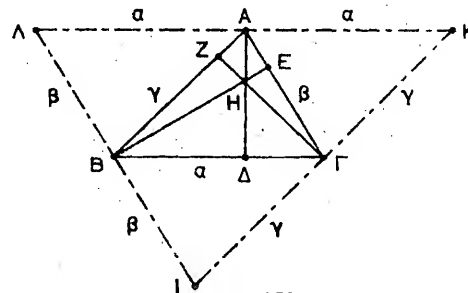
δηλαδή τὸ Ο ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος ΑΒ, συνεπῶς ἀνήκει εἰς τὴν μεσοκάθετον αὐτοῦ. Ἄρα αἱ τρεῖς μεσοκάθετοι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, τὸ ὁποῖον καλεῖται **περίκεντρον** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὸ ὁποῖον ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφάς τοῦ τριγώνου ὡς προκύπτει ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2).

159. Θεώρημα. Τὰ τρία ὕψη παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τριγώνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τὰ τρία ὕψη αὐτοῦ (σχ. 152). Ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Β καὶ Γ φέρομεν παράλληλους πρὸς τὰς ἀπέναντι αὐτῶν πλευράς, αἱ ὁποῖαι ὀρίζουν τὸ τριγώνον ΙΚΛ. Τὸ τετράπλευρον



Σχ. 151



Σχ. 152

ΑΒΓΚ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του παράλληλους, συνεπῶς εἶναι παραλληλόγραμμον, ἄρα :

$$(1) \quad AK = BG = \alpha.$$

Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ διὰ τὸ ΑΓΒΛ. Ἐπομένως :

$$(2) \quad AL = GB = \alpha.$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἐπεταί ὅτι $AK = AL$, ἥτοι τὸ Α εἶναι μέσον τῆς πλευρᾶς ΚΛ τοῦ τριγώνου ΙΚΛ.

Τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὡς κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, θὰ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλὸν τῆς ΚΛ καί, ἐπειδὴ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Α τῆς ΚΛ, ἐπεταί ὅτι εἶναι μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς ΚΛ τοῦ τριγώνου ΙΚΛ.

Όμοίως αποδεικνύεται ότι τα ύψη BE και ΓZ του τριγώνου ABΓ είναι μεσοκάθετοι των πλευρών ΙΑ και ΙΚ του τριγώνου ΙΚΑ αντίστοιχως. Τότε ταυτά διέρχονται διά του αυτού σημείου Η (§ 158). Το σημείον Η καλεῖται ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ABΓ.

160. Όρθοκεντρική τετράς σημείων. Αἱ τρεῖς κορυφαὶ παντός τριγώνου καὶ τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ λέγονται ὅτι ἀποτελοῦν μίαν ὀρθοκεντρικὴν τετράδα σημείων, διότι εὐκόλως φαίνεται ὅτι τὰ οἰαδήποτε τρία ἐξ αὐτῶν ὀρίζουν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ὀρθόκεντρον τὸ τέταρτον σημείον τῆς τετράδος.

★ **161. Θεώρημα.** Ἐὰν E καὶ Z εἶναι σημεῖα τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως τριγώνου ABΓ, αἱ ἡμιευθεῖαι BE καὶ ΓZ τέμνονται εἰς σημείον Σ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου καὶ ἡ ἡμιευθεῖα ΑΣ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς σημείον Δ ἐνδιάμεσον τῶν Β καὶ Γ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα E καὶ Z εἶναι ἐσωτερικὰ τῶν γωνιῶν \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἀντιστοίχως ἔπεται ὅτι (σχ. 153):

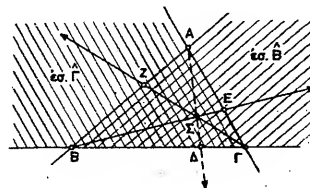
$$\widehat{EB\Gamma} < \widehat{B} \quad \text{καὶ}$$

$$\widehat{Z\Gamma B} < \widehat{\Gamma}$$

Τότε θὰ εἶναι καὶ

$$\widehat{EB\Gamma} + \widehat{Z\Gamma B} < \widehat{B} + \widehat{\Gamma} < 2\angle$$

Ἀρα αἱ ἡμιευθεῖαι BE καὶ ΓZ τέμνονται εἰς ἓν σημείον Σ.



Σχ. 153

Αἱ ἡμιευθεῖαι BE καὶ ΓZ εἶναι ἐσωτερικαὶ διὰ τὰς γωνίας \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἀντιστοίχως ἦτοι:

$$BE \in \text{εσ. } \widehat{B} \quad \text{καὶ}$$

$$\Gamma Z \in \text{εσ. } \widehat{\Gamma}.$$

Ἐξ αὐτῶν ἔπεται ὅτι:

$$(1) \quad BE \cap \Gamma Z \in (\text{εσ. } \widehat{B}) \cap (\text{εσ. } \widehat{\Gamma})$$

Ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) εἶναι τὸ κοινὸν σημείον τῶν ἡμιευθειῶν BE καὶ ΓZ, δηλαδὴ τὸ Σ καὶ τὸ δεύτερον μέλος τῆς εἶναι τὸ κοινὸν μέρος τῶν ἐσωτερικῶν τῶν γωνιῶν \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$, δηλαδὴ τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου ABΓ. Τότε ἡ (1) γράφεται.

$$\Sigma \in \text{εσ. } AB\Gamma,$$

ἄρα τὸ Σ εὐρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου ABΓ.

Κατὰ ταῦτα ἡ ΑΣ εἶναι ἐσωτερικὴ ἡμιευθεῖα τῆς κυρτῆς γωνίας \widehat{A} , τὰ δὲ Β καὶ Γ, ὡς σημεῖα τῶν πλευρῶν τῆς \widehat{A} , εὐρίσκονται ἐκατέρωθεν τῆς ΑΣ. Συνεπῶς τὸ τμήμα ΒΓ τέμνει τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΣ εἰς σημείον Δ ἡ ἰσοδυνάμως ἡ ἡμιευθεῖα ΑΣ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς σημείον Δ ἐνδιάμεσον τῶν Β καὶ Γ.

162. Θεώρημα. Αἱ τρεῖς διάμεσοι παντός τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου, ἀπέχει δὲ ἀπὸ ἐκάστην κορυφὴν ἀπόστάσιν ἴσην πρὸς τὰ $2/3$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ $BE, \Gamma Z$ αἱ δύο διαμέσοι αὐτοῦ (σχ. 154). Αὗται τέμνονται εἰς σημεῖον Σ (βλ. § 161), τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου.

Φέρομεν τὴν $A\Sigma$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ Δ καὶ ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς $B\Gamma$.

Ἐπὶ τῆς $A\Delta$, λαμβάνομεν τμήμα :

$$(1) \quad \Sigma K = \Sigma A,$$

ὥστε τὸ Σ νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος AK . Τότε, ἐπειδὴ τὸ Z εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς AB , ἔπεται ὅτι $Z\Sigma // BK$ ἢ

$$(2) \quad Z\Gamma // BK$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $E\Sigma // \Gamma K$ ἢ

$$(3) \quad EB // \Gamma K$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (2) καὶ (3) ἔπεται ὅτι τὸ τετράπλευρον $BK\Gamma\Sigma$ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὡς ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους. Ἄρα αἱ διαγώνιοι τοῦ ΣK καὶ $B\Gamma$ διχοτομοῦνται, ἥτοι τὸ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς $B\Gamma$. Ἐπομένως καὶ ἡ ἐκ τοῦ A διάμεσος τοῦ τριγώνου διέρχεται ἐκ τοῦ κοινοῦ σημείου Σ τῶν δύο ἄλλων διαμέσων.

Ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου $BK\Gamma\Sigma$ λαμβάνομεν $\Sigma K = 2 \cdot \Sigma\Delta$. Τότε ἡ σχέση (1) γράφεται :

$$(4) \quad 2 \cdot \Sigma\Delta = \Sigma A$$

ἔχομεν ὅμως ὅτι $\Sigma A + \Sigma\Delta = A\Delta$ ἢ

$$2\Sigma A + 2\Sigma\Delta = 2A\Delta \quad \text{καὶ λόγω τῆς (4) ἡ τελευταία γράφεται}$$

$$2\Sigma A + \Sigma A = 2A\Delta \Rightarrow 3\Sigma A = 2A\Delta \quad \text{ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται ὅτι :}$$

$$\Sigma A = \frac{2}{3} A\Delta,$$

ἥτοι τὸ σημεῖον Σ τῆς τομῆς τῶν διαμέσων, ἀπέχει ἀπὸ τὴν κορυφὴν A ἀστάσις ἴσην πρὸς τὰ $2/3$ τῆς διαμέσου $A\Delta$.

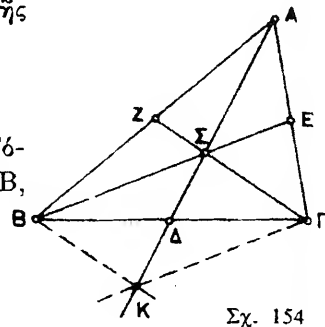
Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι :

$$\Sigma B = \frac{2}{3} BE \quad \text{καὶ} \quad \Sigma \Gamma = \frac{2}{3} \Gamma Z.$$

Τὸ κοινὸν σημεῖον Σ τῶν διαμέσων τριγώνου ὀνομάζεται **κέντρον βάρους** ἢ **βαρύκεντρον** αὐτοῦ. Ὁ ὅρος οὗτος ἔχει ληφθῇ ἐκ τῆς φυσικῆς, διότι τὸ Σ συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον βάρους ὕλικῆς πλακὸς ἐξ ὁμογενοῦς ὕλικου, σχήματος τριγώνου.

$$\text{Σημείωσις. Εἶναι ἐπίσης} \quad \Sigma\Delta = \frac{1}{3} A\Delta, \quad \Sigma E = \frac{1}{3} BE, \quad \Sigma Z = \frac{1}{3} \Gamma Z.$$

163. Θεώρημα. Αἱ τρεῖς ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώ-



νου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου καὶ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευράς.

*Απόδειξις. Ἀς θεωρήσωμεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$ (σχ. 155). Αὗται εἶναι ἐσωτερικαὶ τῶν γωνιῶν \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἀντιστοίχως, ἐπομένως, τέμνονται εἰς σημεῖον Θ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου. Ἐκ τοῦ Θ φέρομεν $\Theta I \perp BG$, $\Theta K \perp AG$ καὶ $\Theta \Lambda \perp AB$. Τὸ σημεῖον Θ , ὡς ἀνήκον εἰς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας \widehat{B} , ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς πλευράς της, ἥτοι :

$$(1) \quad \Theta I = \Theta \Lambda.$$

Ἐπειδὴ ἐπὶ πλεόν τοῦτο ἀνήκει καὶ εἰς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $\widehat{\Gamma}$ ἔπεται ὅτι :

$$(2) \quad \Theta I = \Theta K$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) συνεπάγεται ὅτι :

$$\Theta \Lambda = \Theta K.$$

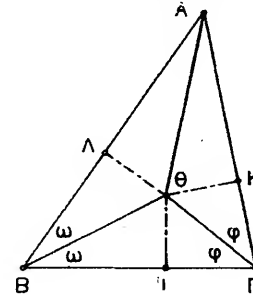
Ἀρα τὸ σημεῖον Θ ἀνήκει καὶ εἰς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας \widehat{A} , ὡς ἰσαπέχον ἀπὸ τὰς πλευράς της. Ἐπομένως αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Θ , τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου. Τὸ σημεῖον Θ καλεῖται **εὐκεντρον** τοῦ τριγώνου καὶ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευράς του.

★ 164. Θεώρημα. Εἰς κάθε τρίγωνον αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι δύο γωνιῶν του τέμνονται εἰς σημεῖον εὐρισκόμενον ἐντὸς τῆς τρίτης γωνίας του.

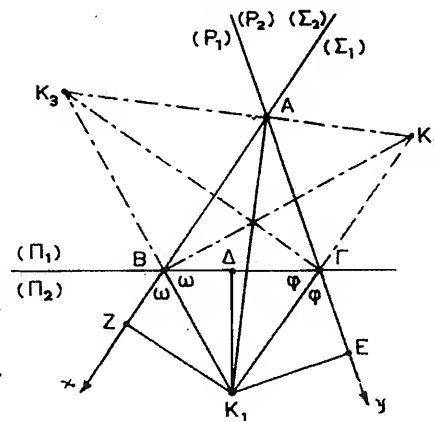
*Απόδειξις. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ (σχ. 156). Ἡ εὐθεῖα $B\Gamma$, ἐπὶ τῆς ὁποίας εὐρίσκεται ἡ πλευρὰ τοῦ τριγώνου, χωρίζει τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο ἡμιεπίπεδα (Π_1) καὶ (Π_2) ὅπου ἡ κορυφή A εὐρίσκεται εἰς τὸ (Π_1) , αἱ δὲ εὐθεῖαι AG καὶ AB χωρίζουν τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο ἡμιεπίπεδα ἑκάστη, (P_1) , (P_2) καὶ (Σ_1) , (Σ_2) ἀντιστοίχως ὅπου αἱ κορυφαὶ B καὶ Γ εὐρίσκονται εἰς τὰ (P_1) καὶ (Σ_1) ἀντιστοίχως. Ἄν 2ω καὶ 2φ εἶναι αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι τῶν \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἀντιστοίχως, ἔχομεν: $2\omega < 2L$ καὶ $2\varphi < 2L$ ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$. Ἀρα $2\omega + 2\varphi < 4L$ ἢ $\omega + \varphi < 2L$. Ἐξ αὐτῆς ἔπεται ὅτι αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$ τέμνονται εἰς σημεῖον K_1 ἐντὸς τοῦ ἡμιεπιπέδου (Π_2) . Τὸ σημεῖον K_1 , ὡς σημεῖον τοῦ ἡμιεπιπέδου (Π_2) εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, διότι τὸ τρίγωνον κεῖται ἐντὸς τοῦ (Π_1) .

Αἱ διχοτόμοι BK_1 καὶ ΓK_1 κεῖνται ἐντὸς τῶν κυρτῶν γωνιῶν \widehat{GBx} καὶ $\widehat{B\Gamma y}$ ἥτοι :

$$\begin{aligned} BK_1 &\in (\Pi_2) \cap (\Sigma_1) \quad \text{καὶ} \\ \Gamma K_1 &\in (\Pi_2) \cap (P_1) \end{aligned}$$



Σχ. 155



Σχ. 156

Εξ αὐτῶν ἐπεταὶ ὅτι:

$$(BK_1) \cap (ΓK_1) \in [(\Pi_2) \cap (\Sigma_1)] \cap [(\Pi_2) \cap (P_1)]$$

$$\eta K_1 \in (\Pi_2) \cap (\Sigma_1) \cap (P_1)$$

$$\eta K_1 \in (\Pi_2) \cap [(\Sigma_1) \cap (P_1)]$$

$$\text{ἐκ τῆς ὁποίας ἐπεταὶ} \quad K_1 \in (\Sigma_1) \cap (P_1) \quad \eta$$

$$K_1 \in \text{εσ. } \hat{A}.$$

Ἄρα τὸ σημεῖον K_1 εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου καὶ ἐντὸς τῆς γωνίας \hat{A} .

165. Θεώρημα. Εἰς κάθε τρίγωνον ἀνά δύο αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τέμνονται εἰς σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον διέρχεται ἡ τρίτη ἐσωτερικὴ διχοτόμος καὶ τὸ ὁποῖον ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τρίγωνον $ABΓ$. Φέρομεν τὰς ἐξωτερικὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν \hat{B} καὶ $\hat{\Gamma}$, αἱ ὁποῖαι τέμνονται, εἰς σημεῖον K_1 (βλ. § 164), ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου καὶ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας \hat{A} (σχ. 156). Φέρομεν τὰς $K_1\Delta \perp B\Gamma$, $K_1E \perp A\Gamma$ καὶ $K_1Z \perp AB$. Τότε, ἐπειδὴ τὸ K_1 εἶναι σημεῖον τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν \hat{B} καὶ $\hat{\Gamma}$, θὰ ἔχωμεν :

$$K_1\Delta = K_1Z \quad \text{καὶ} \quad K_1\Delta = K_1E$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἐπεταὶ ὅτι $K_1Z = K_1E$. Ἐκ τῆς τελευταίας ἐπεταὶ ὅτι τὸ K_1 ἀνήκει εἰς τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας \hat{A} , διότι ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς καὶ εὐρίσκεται καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς.

Τὸ σημεῖον τοῦτο ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου καὶ ὀνομάζεται **παράκεντρον** αὐτοῦ. Ἀντιστοίχως ὑπάρχουν καὶ δύο ἄλλα παράκεντρα K_2 καὶ K_3 τοῦ τριγώνου ἐντὸς τῶν γωνιῶν \hat{B} καὶ $\hat{\Gamma}$ αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

183. Ἐὰν A' , B' , Γ' εἶναι τὰ συμμετρικὰ τοῦ περικέντρου τριγώνου $AB\Gamma$ ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς του, δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $AB\Gamma$.

184. Τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέσων παντὸς τριγώνου εἶναι μεγαλύτερον τῶν $3/4$ καὶ μικρότερον τῶν $3/2$ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ.

185. Ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν εὐθεῖαν (ε), ἡ ὁποία ἀφῆνει τὰς κορυφὰς B καὶ Γ πρὸς τὸ ἓνα μέρος αὐτῆς. Ἐὰν AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν τριῶν κορυφῶν ἀπὸ αὐτῆς, δείξατε ὅτι εἶναι $AA' = BB' + \Gamma\Gamma'$.

186. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τριγώνου ἀπὸ τυχοῦσαν εὐθεῖαν μὴ τέμνουσαν αὐτό, ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου ἀπὸ αὐτῆς.

187. Παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ θεωροῦμεν τὰ μέσα M καὶ N τῶν πλευρῶν AB καὶ AD . Δείξατε ὅτι ἡ διαγώνιος BD τριχοτομεῖται ἀπὸ τὰς GM , GN .

188. Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ δύο ἴσας διαμέσους, τότε εἶναι ἰσοσκελές.

189. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$, AD , BE , ΓZ αἱ διαμέσοι αὐτοῦ καὶ O τὸ κέντρον βά-

ρους του. Προεκτείνωμεν τὰς διαμέσους καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνωμεν τμήματα $\Delta\Lambda' = \Delta\Theta$, $\text{EB}' = \text{EO}$, $\text{ZI}' = \text{ZO}$ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι τὰ τρίγωνα $\text{AB}\Gamma$ καὶ $\text{A}'\text{B}'\Gamma'$ εἶναι ἴσα.

Β.

190. Ἐὰν ἰσοπλεύρου τριγώνου $\text{AB}\Gamma$ προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς του κατὰ κύκλικήν σειρὰν καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λάβωμεν τμήματα $\text{AA}' = \text{BB}' = \Gamma\Gamma'$, δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον $\text{A}'\text{B}'\Gamma'$ εἶναι ἰσόπλευρον, τοῦ ὁποῦ τοῦ κέντρον βάρους ταυτίζεται μετὰ τὸ κέντρον βάρους τοῦ $\text{AB}\Gamma$.

191. Μετὰ πλευρὰς τὰς AB καὶ $\text{A}\Gamma$ τριγώνου $\text{AB}\Gamma$ κατασκευάζομεν ἐκτὸς αὐτοῦ τὰ τετράγωνα $\text{AB}\Delta\text{E}$ καὶ $\text{A}\Gamma\text{Z}\text{H}$. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι BH καὶ $\Gamma\Delta$ τέμνονται ἐπὶ τοῦ ὕψους AO τοῦ τριγώνου.

192. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον $\text{AB}\Gamma$ ($\text{AB} = \text{A}\Gamma$). Ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς πλευρᾶς AB καὶ λάβωμεν εἰς τὴν προέκτασιν τῆς $\text{A}\Gamma$ σημεῖον N , τοιοῦτον ὥστε $\Gamma\text{N} = \text{BM}$, δείξατε ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος MN διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

193. Ἐστω τρίγωνον $\text{AB}\Gamma$. Ἐὰν Δ καὶ E εἶναι σημεῖα τῶν πλευρῶν $\text{A}\Gamma$ καὶ AB ἀντιστοίχως τοιαῦτα, ὥστε διὰ τὰ τμήματα BD καὶ ΓE τεμνόμενα εἰς σημεῖον O νὰ εἶναι $\text{BO} = 2\text{OD}$ καὶ $\Gamma\text{O} = 2\text{OE}$, δείξατε ὅτι τὰ Δ καὶ E εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν $\text{A}\Gamma$ καὶ AB .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

Β'.

194. Ἐὰν E καὶ Z εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου $\text{AB}\Gamma\Delta$, δείξατε ὅτι ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν $\widehat{\text{E}}$ καὶ $\widehat{\text{Z}}$ ἰσοῦται μετὰ τὸ ἡμίθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου.

195. Ὁρθογωνίου τριγώνου $\text{AB}\Gamma$ εἶναι $\text{AB} < \text{A}\Gamma$. Φέρομεν τὸ ὕψος AA' καὶ ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας λαμβάνομεν τμήμα $\Delta\text{E} = \Delta\text{B}$. Ἐκ τῆς κορυφῆς Γ φέρωμεν $\Gamma\text{Z} \perp \text{AE}$. Δείξατε ὅτι ἡ ΓB εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{\text{A}\Gamma\text{Z}}$.

196. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου $\text{AB}\Gamma$ πλευρὰς α λαμβάνομεν τμήματα $\text{AA}' = \text{BB}' = \Gamma\Gamma' = \frac{\alpha}{3}$. Δείξατε ὅτι: α) τὸ τρίγωνον $\text{A}'\text{B}'\Gamma'$ εἶναι ἰσόπλευρον, β) αἱ πλευραὶ τοῦ $\text{A}'\text{B}'\Gamma'$ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ $\text{AB}\Gamma$ καὶ γ) τὸ κέντρον βάρους τοῦ $\text{A}'\text{B}'\Gamma'$ συμπίπτει μετὰ τὸ κέντρον βάρους τοῦ $\text{AB}\Gamma$.

197. Τριγώνου $\text{AB}\Gamma$ ἡ γωνία $\widehat{\text{B}}$ εἶναι ἴση μετὰ 45° . Φέρομεν τὰ ὕψη AD καὶ ΓE καὶ ἔστω Z τὸ μέσον τῆς $\text{A}\Gamma$. Δείξατε ὅτι $\text{ZD} \perp \text{ZE}$.

198. Αἱ διάμεσοι τριγώνου ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἀνίσους πλευρὰς, εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλύτερα εἶναι ἢ ἀντιστοιχοῦσα εἰς μικρότεραν πλευράν.

199. Ἐστω M σημεῖον ἐσωτερικὸν ὀρθογωνίου $\text{AB}\Gamma\Delta$. Ἐὰν E , Z , H , Θ εἶναι τὰ συμμετρικὰ τοῦ M ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς AB , $\text{B}\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA τοῦ ὀρθογωνίου, α) δείξατε ὅτι αἱ κορυφαὶ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου $\text{EZ}\text{H}\Theta$, β) πότε τὸ $\text{EZ}\text{H}\Theta$ εἶναι παραλληλόγραμμον;

200. Ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\widehat{\text{A}}$ τριγώνου $\text{AB}\Gamma$, δείξατε ὅτι $\text{MB} + \text{M}\Gamma > \text{AB} + \text{A}\Gamma$.

201. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ϵ_1) , (ϵ_2) καὶ ἐξ ἑνὸς σημείου A τῆς (ϵ_1) φέρομεν $\text{A}\Gamma \perp (\epsilon_2)$ καὶ AB πλαγίαν ὡς πρὸς τὴν (ϵ_3) . Ἐκ τοῦ B θεωροῦμεν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὴν $\text{A}\Gamma$ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν (ϵ_1) εἰς τὸ Z τοιαύτην, ὥστε $\Delta\text{Z} = 2\text{AB}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\widehat{\text{AB}\Gamma} = 3 \cdot \widehat{\text{AB}\Delta}$.

202. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB , $\text{B}\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA τετραγώνου $\text{AB}\Gamma\Delta$ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα

E, Z, H, Θ αντίστοιχως ούτως, ώστε $AE = BZ = \Gamma H = \Delta\Theta = \lambda$. α) Δείξτε ότι τὸ $EZH\Theta$ εἶναι τετράγωνον, β) νὰ προσδιορισθῇ τὸ λ , ούτως, ώστε τὸ τετράγωνον $EZH\Theta$ νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν.

203. Τετραπλεύρου αἱ διαγώνιοι τέμνονται καθέτως. Δείξτε ότι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

204. Κυρτοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ αἱ πλευραὶ AD καὶ $B\Gamma$ εἶναι ἴσαι. Ἐὰν E καὶ Z εἶναι τὰ μέσα τῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$, δείξτε ότι ἡ EZ εἶναι παράλληλος τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῶν πλευρῶν AD καὶ $B\Gamma$.

205. Δίδεται εὐθύγραμμον τμήμα AB καὶ Γ τυχὸν σημεῖον αὐτοῦ. Ἐκ τῶν A καὶ B φέρομεν τὰς παραλλήλους ἡμιευθείας Ax καὶ By πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ AB , ἐπὶ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν τμήματα $AD = A\Gamma$ καὶ $BE = B\Gamma$ ἀντιστοίχως. Ἐὰν Z εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος DE , δείξτε ότι $ZA \perp ZB$.

206. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἐκ τῆς κορυφῆς A φέρομεν καθέτους ἡμιευθείας ἐπὶ τὰς AB καὶ $A\Gamma$ ὅχι πρὸς τὸ μέρος τοῦ τριγώνου καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα $AB' = AB$ καὶ $A\Gamma' = A\Gamma$ ἀντιστοίχως. Δείξτε ότι τὸ ὕψος AD τοῦ $AB\Gamma$ προεκτεινόμενον διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος $B'\Gamma'$. Τί παρατηρεῖται διὰ τὸ ὕψος AE τοῦ τριγώνου $AB'\Gamma'$;

207. Ἀπὸ τὸ μέσον M τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας \widehat{A} , ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς AB καὶ $A\Gamma$ εἰς τὰ B' καὶ Γ' ἀντιστοίχως. Δείξτε ότι $AB' = A\Gamma' = \frac{AB + A\Gamma}{2}$.

208. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἐκ τοῦ A φέρομεν ἀνὰ μίαν κάθετον AD, AE, AZ, AH , ἐπὶ τὰς τέσσαρας διχοτόμους τῶν γωνιῶν \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$. Δείξτε ότι τὰ σημεῖα D, E, Z, H κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

209. Μὲ πλευρὰς τὰς AB καὶ $A\Gamma$ ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) κατασκευάζομεν ἐκτὸς αὐτοῦ τὰ τετράγωνα $AB\Delta E$ καὶ $A\Gamma Z\Theta$. Φέρομεν τὰς $\Delta\Delta' \perp B\Gamma$ καὶ $ZZ' \perp B\Gamma$. Δείξτε ότι: α) $\Delta\Delta' + ZZ' = B\Gamma$, β) τὰ σημεῖα D, A, Z κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ γ) αἱ DE καὶ $Z\Theta$ τέμνονται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ὕψους AH τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

210. Κυρτοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ δὲ ἀπέναντι πλευραὶ προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς τὰ E καὶ Z . Δείξτε ότι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν \widehat{E} καὶ \widehat{Z} τέμνουν τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου εἰς τέσσαρα σημεῖα, τὰ ὁποία εἶναι κορυφαὶ ρόμβου.

211. Ἐὰν E καὶ Z εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν AB καὶ $B\Gamma$ ἀντιστοίχως τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ Δ τὸ ἴχνος τοῦ ὕψους AD , δείξτε ότι ἡ γωνία \widehat{DEZ} ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου.

212. Ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) φέρομεν τὸ ὕψος AH καὶ ἐκ τοῦ H τὰ καθέτους HA, HE ἐπὶ τὰς $AB, A\Gamma$ ἀντιστοίχως. Ἐκ τοῦ B φέρομεν εὐθεῖαν (δ) παράλληλον τῆς DE . Ἐὰν Λ καὶ M εἶναι τὰ μέσα τῶν AB καὶ $B\Gamma$ ἀντιστοίχως, δείξτε ότι: α) $AM \perp (\delta)$, β) αἱ AM καὶ AH τέμνονται ἐπὶ τῆς (δ) καὶ γ) αἱ AM καὶ HE τέμνονται ἐπὶ τῆς (δ) .

213. Αἱ μεσοκάθετοι DO, EO τῶν πλευρῶν $AB, B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνουν τὰς $B\Gamma, AB$ εἰς τὰ Z, H ἀντιστοίχως. Ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον $HBZ\Theta$, δείξτε ότι ἡ ΘO εἶναι μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς $A\Gamma$.

214. Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ δύο ἴσας διχοτόμους, τότε εἶναι ἰσοσκελές.

215. Ἐστω κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ὁποίου κατασκευάζομεν ἐκτὸς αὐτοῦ τὰ τετράγωνα $ABEZ, B\Gamma H\Theta, \Gamma\Delta IK, A\Delta\Lambda M$. Ἐὰν Σ καὶ T εἶναι τὰ μέσα τῶν AE καὶ $I\Theta$, δείξτε ότι τὸ τετράπλευρον $B\Sigma\Delta T$ εἶναι τετράγωνον.

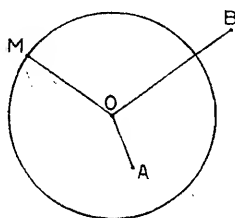
BIBAIION ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Ο ΚΥΚΛΟΣ

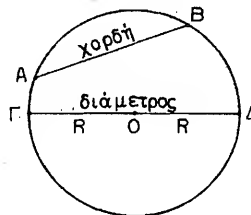
166. Ὅρισμοί: Κύκλος καλεῖται τὸ σύνολον τῶν σημείων (γ. τόπος) τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ιδιότητα νὰ ἀπέχουν ὠρισμένην ἀπόστασιν R ἀπὸ σταθερὸν σημείον O τοῦ ἐπιπέδου.

Τὸ σημειοσύνολον τοῦτο συμβολίζεται μὲ (O, R) καὶ τὸ O καλεῖται κέντρον τοῦ κύκλου. Ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (σχ. 157), τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $OM = R$ καλεῖται ἀκτίς τοῦ κύκλου.

Ἐν σημεῖον A καλεῖται ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (O, R) τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν εἶναι $OA < R$. Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων καλεῖται ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου καὶ συμβολίζεται μὲ ἐς. (O, R) . Ἐν σημεῖον B καλεῖται ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν εἶναι $OB > R$. Τὸ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν σημείων καλεῖται ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου καὶ συμβολίζεται μὲ ἐξ. (O, R) .



Σχ. 157



Σχ. 158

Σημείωσις. Κατ' ἄλλον ὅρισμόν, κύκλος καλεῖται τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $OM \leq R$, ἐνῶ τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $OM = R$ καλεῖται περιφέρεια κύκλου. Ἐνταῦθα θὰ δεχθῶμεν τὸν προαναφερθέντα ὅρισμόν § 166.

Χορδὴ τοῦ κύκλου (O, R) καλεῖται κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα AB , τοῦ ὁποῖου τὰ ἄκρα A καὶ B εἶναι σημεῖα τοῦ κύκλου (σχ. 158).

Διάμετρος τοῦ κύκλου (O, R) καλεῖται κάθε χορφή $\Gamma\Delta$ αὐτοῦ, ἥ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου O τοῦ κύκλου (σχ. 158). Τὸ μῆκος κάθε διαμέτρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτίνος, ἥτοι $\Gamma\Delta = 2R$. Ἄρα ὅλαι αἱ διαμέτροι τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Τὰ ἄκρα Γ καὶ Δ μιᾶς διαμέτρου $\Gamma\Delta$ καλοῦνται ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα.

Ἡ χάραξις τοῦ κύκλου ἐπιτυγχάνεται διὰ γνωστοῦ ὄργάνου, τοῦ διαβή-

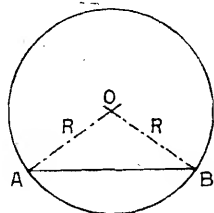
του, τὸ ὁποῖον διατηρεῖ σταθερὰν ἀπόστασιν μεταξύ τῆς αἰχμῆς του, ἥτις καθορίζει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ τῆς γραφίδος του, ἥτις χαράσσει (γράφει) τὸν κύκλον.

167. Θεώρημα. Διὰ κάθε χορδὴν AB κύκλου (O, R) ἰσχύει $AB \leq 2R$.

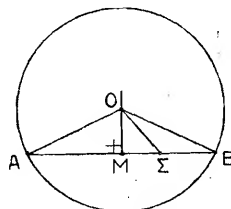
Ἀπόδειξις i) Ἐὰν ἡ χορδὴ AB δὲν εἶναι διάμετρος (σχ. 159), τὸ τρίγωνον OAB εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ $OA = OB = R$. Ἐξ αὐτοῦ λαμβάνομεν $AB < OA + OB \Rightarrow AB < R + R \Rightarrow AB < 2R$.

ii) Ἐὰν ἡ χορδὴ AB εἶναι διάμετρος θὰ ἔχωμεν $AB = 2R$.

Ἄρα διὰ κάθε χορδὴν AB ἰσχύει $AB \leq 2R$ καὶ ἡ μεγαλύτερα χορδὴ εἶναι ἡ διάμετρος, ἴση πρὸς $2R$.



Σχ. 159



Σχ. 160

168. Θεώρημα. Κάθε σημεῖον χορδῆς κύκλου, εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω κύκλος (O, R) , AB μία χορδὴ αὐτοῦ καὶ Σ τυχὸν σημεῖον τῆς χορδῆς (σχ. 160). Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $O\Sigma < R$. Φέρομεν $OM \perp AB$. Τὸ σημεῖον M εἶναι μέσον τῆς χορδῆς AB , διότι τὸ τρίγωνον AOB εἶναι ἰσοσκελὲς ($OA = OB = R$). Ἐπειδὴ τὸ Σ εἶναι σημεῖον τῆς χορδῆς, ἔπεται $M\Sigma < MB \Rightarrow O\Sigma < OB$ (§ 80) ἢ $O\Sigma < R$.

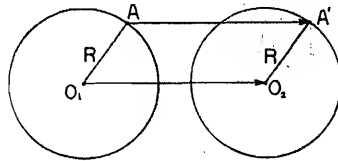
169. Ἴσοι κύκλοι. Δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ἔχουν ἴσας ἀκτίνας. Διότι δύνανται νὰ ταυτισθοῦν διὰ παραλλήλου μετατοπίσεως (σχ. 161).

170. Ἀξονικὴ συμμετρία εἰς τὸν κύκλον. Θεώρημα. Πᾶσα διάμετρος κύκλου εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ.

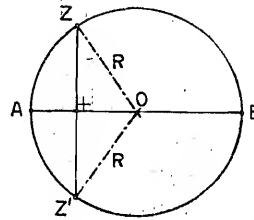
Ἀπόδειξις. Ἐστω ὁ κύκλος (O, R) καὶ AB μία διάμετρος αὐτοῦ. Ἄν Z εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, θεωροῦμεν τὸ συμμετρικόν του Z' ὡς πρὸς ἄξονα τὴν AB καὶ ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ Z' εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (σχ. 162). Πράγματι τοῦτο συμβαίνει, διότι λόγῳ τῆς συμμετρίας εἶναι $OZ = OZ'$. Ἀλλὰ $OZ = R$. Ἄρα $OZ' = R$ καὶ ἐπομένως τὸ Z' εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου.

Πόρισμα I. Πᾶσα διάμετρος χωρίζει ἕνα κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων καλεῖται ἡμικύκλιον.

Πόρισμα II. Ἡ ἀπὸ τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου κάθετος ἐπὶ μίαν χορδὴν αὐτοῦ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον αὐτῆς.



Σχ. 161



Σχ. 162

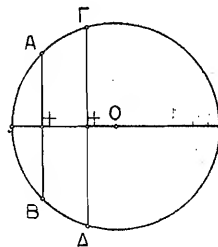
Πόρισμα III. Ἡ μεσοκάθετος μιᾶς χορδῆς κύκλου διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Διότι ἂν δὲν διήρχετο θὰ ὑπῆρχον δύο μεσοκάθετοι τοῦ αὐτοῦ τμήματος. Ἡ δευτέρα θὰ ἦτο ἡ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

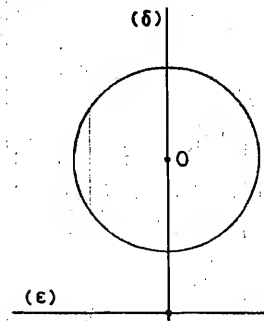
Πόρισμα IV. Δύο παράλληλοι χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἔχουν κοινὴν μεσοκάθετον, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου (σχ. 163).

Πόρισμα V. Δοθέντος κύκλου κέντρου O καὶ εὐθείας (ϵ) , ἡ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εὐθεῖα (δ) , ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν (ϵ) , εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος.

Πράγματι ἡ εὐθεῖα (δ) εἶναι ἄξων συμμετρίας διὰ τὸν κύκλον, ἐφ' ὅσον περιέχει διάμετρον αὐτοῦ. Ἐπὶ πλέον εἶναι καὶ ἄξων συμμετρίας διὰ τὴν εὐθεῖαν (ϵ) , ἐφ' ὅσον εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν. Ἀρα εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος (σχ. 164).



Σχ. 163



Σχ. 164

Πόρισμα VI. Ἡ εὐθεῖα ποὺ ἐνώνει τὸ κέντρον μὲ τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν.

171. Κεντρικὴ συμμετρία εἰς τὸν κύκλον. Θεώρημα. Τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου εἶναι καὶ κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὁ κύκλος (O, R) καὶ M τυχὸν σημεῖον του. Θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν M' αὐτοῦ ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ O καὶ ἀρκεῖ νὰ

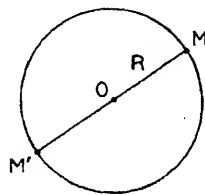
δείξωμεν ὅτι τὸ M' εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (σχ. 165). Πράγματι τοῦτο συμβαίνει, διότι ἡ συμμετρία μᾶς ἐξασφαλίζει $OM = OM'$. Ἀλλὰ $OM = R$. Ἄρα $OM' = R$. Ἐπομένως τὸ M' εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου.

172. Προσανατολισμός κύκλου. Εἰς κύκλος δύναται νὰ διαγραφῇ ὑπὸ κινήτου ἄνευ παλινδρομήσεως κατὰ δύο διαφόρους ἀλλήλων φοράς. Πρὸς διαφοροποίησιν αὐτῶν, μία αὐθαίρετως ἐκλεγεῖσα φορά καλεῖται **θετική** (σχ. 166). Τότε ἡ ἄλλη καλεῖται ἀντίθετος τῆς πρώτης ἢ **ἀρνητική**. Ὡς θετική φορά διαγραφῆς λαμβάνεται συνήθως ἡ ἀντίθετος τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὥρολογίου.

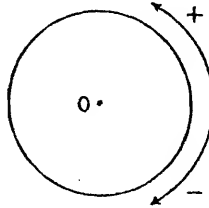
Εἰς κύκλος, εἰς τὸν ὁποῖον ἔχει ὁρισθῇ ἡ θετική φορά διαγραφῆς του καλεῖται **προσανατολισμένος κύκλος**.

173. Ἐπίκεντρος γωνία. Κάθε γωνία, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφὴν της εἰς τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου, καλεῖται **ἐπίκεντρος γωνία**. Ἐκάστη πλευρὰ τῆς ἐπίκεντρος γωνίας, τέμνει τὸν κύκλον εἰς ἓν σημεῖον (σχ. 167).

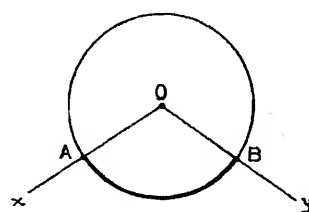
174. Τόξον καλεῖται τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ περιεχόμενον εἰς τὸ ἔσω-



Σχ. 165.



Σχ. 166



Σχ. 167

τερικὸν μιᾶς ἐπίκεντρος γωνίας. Ἐὰν A καὶ B εἶναι τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἐπίκεντρος γωνία \widehat{xOy} τέμνει τὸν κύκλον (σχ. 167), τὰ A καὶ B καλοῦνται **ἄκρα** τοῦ τόξου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν \widehat{xOy} . Τὸ ἐν λόγῳ τόξον συμβολίζεται \widehat{AB} .

Παρατήρησις. Μεταξὺ τῶν τόξων ἑνὸς κύκλου (O, R) καὶ τῶν ἐπικέντρων αὐτοῦ γωνιῶν ὑφίσταται ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία, διότι εἰς κάθε ἐπίκεντρον γωνίαν \widehat{xOy} ἀντιστοιχεῖ ἓν τόξον \widehat{AB} τοῦ κύκλου (O, R) , ἀλλὰ καὶ εἰς κάθε τόξον \widehat{AB} τοῦ κύκλου (O, R) ἀντιστοιχεῖ μία ἐπίκεντρος γωνία, ἡ $\widehat{AOB} \equiv \widehat{xOy}$.

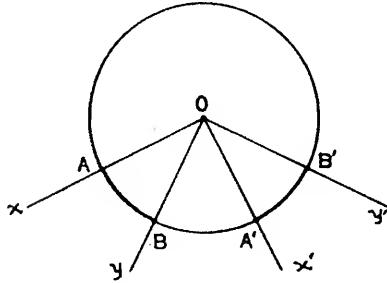
175. Ἰσότης - πράξεις - διάταξις εἰς τὸ σύνολον τῶν τόξων. Λόγῳ τῆς ὑφισταμένης ἀμφιμονοσημάντου ἀντιστοιχίας μεταξὺ τόξων καὶ ἐπικέντρων γωνιῶν, εὐκόλως ἀποδεικνύεται ἡ ἰσότης καὶ ὁρίζονται τὰ ἀκό-

λουθα. Τονίζομεν ὅτι ἀναφερόμεθα εἰς τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἴσων κύκλων.

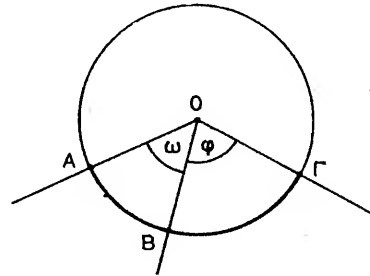
i) Δύο τόξα \widehat{AB} καὶ $\widehat{A'B'}$ εἶναι ἴσα, τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν εἰς αὐτὰ ἀντιστοιχοῦν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι \widehat{xOy} καὶ $\widehat{x'O'y'}$. Ἀποδεικνύεται διὰ μετατοπίσεως (σχ. 168).

ii) Ἐθροισμα δύο τόξων εἰς τὰ ὅποια ἀντιστοιχοῦν ἐπίκεντροι γωνίαι ω καὶ ϕ , καλεῖται τόξον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία $\omega + \phi$.

Εἰς τὸ σχῆμα 169 εἶναι $\widehat{AB} + \widehat{B\Gamma} = \widehat{A\Gamma}$, διότι $\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma}$. Ἀναλόγως ὀρίζεται τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο τόξων.



Σχ. 168



Σχ. 169

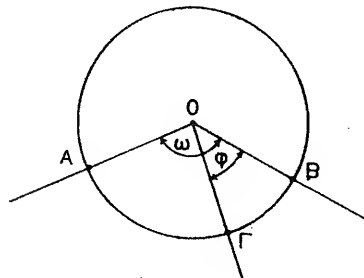
iii) Διαφορὰ δύο τόξων εἰς τὰ ὅποια ἀντιστοιχοῦν ἐπίκεντροι γωνίαι ω καὶ ϕ μὲ $\omega > \phi$, καλεῖται τόξον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία $\omega - \phi$.

Εἰς τὸ σχῆμα 170 εἶναι $\widehat{AB} - \widehat{B\Gamma} = \widehat{A\Gamma}$ διότι $\widehat{AOB} - \widehat{BO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma}$.

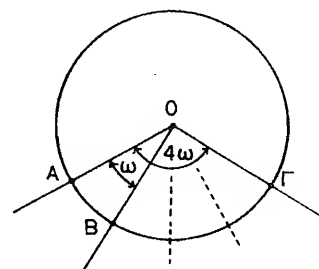
iv) Γινόμενον τόξου, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία ω , ἐπὶ φυσικὸν ἀριθμὸν n , καλεῖται τόξον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία $n \cdot \omega$.

Εἰς τὸ σχῆμα 171 εἶναι $4 \cdot \widehat{AB} = \widehat{A\Gamma}$, διότι $4 \cdot \widehat{AOB} = \widehat{AO\Gamma}$.

v) Πηλίκον τόξου, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία ϕ , διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ n , καλεῖται τόξον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία ϕ/n .



Σχ. 170



Σχ. 171

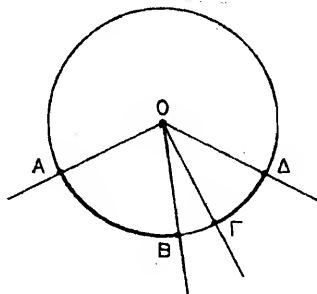
Εἰς τὸ σχῆμα 171 εἶναι $\frac{\widehat{ΑΓ}}{4} = \widehat{ΑΒ}$, διότι $\frac{\widehat{ΑΟΓ}}{4} = \widehat{ΑΟΒ}$.

vi) Γινόμενον τόξου, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία ω , ἐπὶ ρητὸν ἀδιθμόν μ/ν , καλεῖται τὸ τόξον εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία $\varphi = \frac{\mu}{\nu} \cdot \omega$.

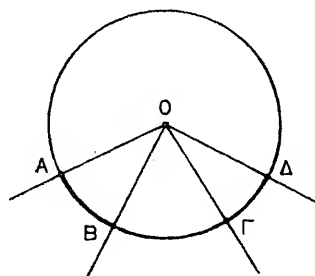
vii) Ἐν τόξον $\widehat{ΑΒ}$ (σχ. 172) καλεῖται μεγαλύτερον τόξον $\widehat{ΓΔ}$ καὶ συμβολίζεται $\widehat{ΑΒ} > \widehat{ΓΔ}$, τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνία εἶναι ὁμοίως ἄνιστοι, ἤτοι ὅταν $\widehat{ΑΟΒ} > \widehat{ΓΟΔ}$. Ἀντιστοίχως ὀρίζεται καὶ ἡ σχέσις $<$.

176. Μέσον τόξου καλεῖται ἓν σημεῖον αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα τόξα. Ἀπὸ τὸ μέσον ἑνὸς τόξου διέρχεται καὶ ἡ διχοτόμος τῆς ἀντιστοίχου ἐπίκεντρος γωνίας καὶ κατὰ συνέπειαν ἓν τόξον ἔχει ἓν μόνον μέσον, διότι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία ἔχει μίαν μόνον διχοτόμον.

177. Διαδοχικὰ τόξα καλοῦνται δύο ἢ περισσότερα τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ὅταν αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνία εἶναι, ἐφεξῆς προκειμένου περὶ δύο, γενικῶς διαδοχικαὶ (σχ. 173).



Σχ. 172



Σχ. 173

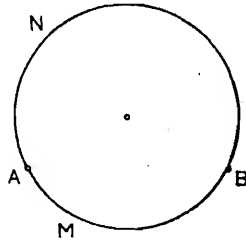
178. Παραπληρωματικὰ τόξα καλοῦνται δύο τόξα (τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἴσων κύκλων), ὅταν αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνία εἶναι παραπληρωματικαί.

Παρατήρησις. Δοθέντος κύκλου (O, R) , δύο σημεῖα A καὶ B ἐπ' αὐτοῦ εἶναι προφανῶς ἄκρα δύο τόξων (σχ. 174). Ἐξ αὐτῶν, ἓν γένει, τὸ ἓν εἶναι μικρότερον ἡμικυκλίου καὶ καλεῖται ἔλασσον τόξον $\widehat{ΑΒ}$ ἢ ἀπλῶς τόξον $\widehat{ΑΒ}$ καὶ τὸ ἄλλο εἶναι μεγαλύτερον ἡμικυκλίου καὶ καλεῖται μεῖζον τόξον $\widehat{ΑΒ}$. Ὁ καθορισμὸς ἑνὸς ἀπὸ τὰ τόξα $\widehat{ΑΒ}$ εἶναι δυνατόν νὰ γίνῃ καὶ μὲ τὴν παρεμβολὴν ἑνὸς τρίτου γράμματος ἀντιστοιχοῦντος εἰς σημεῖον τοῦ τόξου ἐνδιάμεσον τῶν

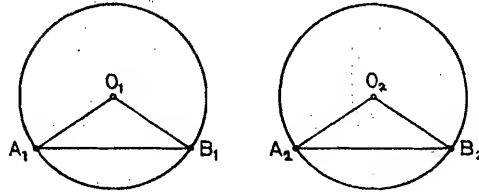
ἄκρων Α και Β π.χ. \widehat{AMB} ἢ \widehat{ANB} δια τὰ δύο τόξα \widehat{AB} τοῦ σχήματος 174.

179. Θεώρημα. Εἰς ἴσα τόξα δύο ἰσων κύκλων (ἢ τοῦ αὐτοῦ κύκλου) ἀντιστοιχοῦν ἴσαι χορδαί *.

Ἀπόδειξις. Ἐὰς θεωρήσωμεν δύο ἰσους κύκλους (O_1, R) , (O_2, R) καὶ $\widehat{A_1B_1} = \widehat{A_2B_2}$ δύο ἴσα τόξα αὐτῶν (σχ. 175). Τότε θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀντιστοιχοὶ ἐπίκεντροι γωνίαι $\widehat{A_1O_1B_1} = \widehat{A_2O_2B_2}$ τῶν τόξων. Ἄρα $\widehat{A_1O_1B_1} = \widehat{A_2O_2B_2}$ (Π - Γ - Π) διότι $O_1A_1 = O_1B_1 = O_2A_2 = O_2B_2 = R$. Ἐπομένως $A_1B_1 = A_2B_2$.



Σχ. 174



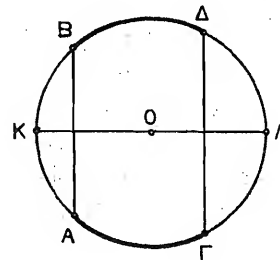
Σχ. 175

180. Θεώρημα. Εἰς ἴσας χορδὰς δύο ἰσων κύκλων (ἢ τοῦ αὐτοῦ κύκλου), ἀντιστοιχοῦν ἴσα ἐλάσσονα (ἀντιστοίχως μείζονα) τόξα.

Ἀπόδειξις. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $A_1B_1 = A_2B_2$ (σχ. 175), $\Rightarrow \widehat{A_1O_1B_1} = \widehat{A_2O_2B_2}$ (Π - Π - Π), διότι $O_1A_1 = O_1B_1 = O_2A_2 = O_2B_2 = R$. Ἄρα $\widehat{A_1B_1} = \widehat{A_2B_2}$. Συμπερασματικῶς καὶ τὰ μείζονα τόξα μετὰ τὰ αὐτὰ ἄκρα θὰ εἶναι ἴσα.

181. Θεώρημα. Δύο παράλληλοι χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ὀρίζουν ἐντὸς τῆς ζώνης αὐτῶν δύο ἴσα τόξα τοῦ κύκλου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω κύκλος κέντρου Ο καὶ $AB // \Gamma\Delta$ δύο χορδαὶ αὐτοῦ. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΚΟΛ, ἡ ὁποία εἶναι κοινὴ μεσοκάθετος τῶν δύο παραλλήλων χορδῶν (σχ. 176). Τότε ἡ ΚΛ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος καὶ ἐπομένως εἶναι $\widehat{A\Gamma} = \widehat{B\Delta}$.



Σχ. 176

(*) Χορδὴ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τόξον \widehat{AB} νοεῖται ἡ χορδὴ ΑΒ μετὰ ἄκρα τὰ ἄκρα τοῦ τόξου. Εἰς ἓν τόξον \widehat{AB} ἀντιστοιχεῖ μία χορδὴ, ἡ ΑΒ, ἐνῶ εἰς μίαν χορδὴν ΑΒ ἀντιστοιχοῦν τὰ δύο τόξα \widehat{AB} (ἐλάσσον καὶ μείζον).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

216. Ἐάν δύο σημεία μιᾶς χορδῆς κύκλου ἰσαπέχουν τοῦ μέσου αὐτῆς, δείξατε ὅτι ἰσαπέχουν καὶ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

217. Δείξατε ὅτι δύο παράλληλοι χορδαὶ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων μιᾶς διαμέτρου κύκλου εἶναι ἴσαι καὶ ἡ ἐνοῦσα τὰ ἄλλα ἄκρα αὐτῶν χορδῇ εἶναι ἐπίσης διάμετρος.

218. Δείξατε ὅτι δύο χορδαὶ κύκλου κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα τρίτης χορδῆς εἶναι ἴσαι.

219. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΚΒ. Ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ἐκατέρωθεν τοῦ κέντρου Κ λαμβάνομεν σημεῖα Γ καὶ Δ οὕτως, ὥστε $ΚΓ = ΚΔ$ καὶ ἐξ αὐτῶν φέρομεν δύο παραλλήλους, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Δείξατε ὅτι ἡ χορδὴ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς παραλλήλους ταύτας.

220. Ἡ μεσοκάθετος μιᾶς ἀκτίνος ΚΑ κύκλου κέντρου Κ τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὰ σημεία Β καὶ Γ. Δείξατε ὅτι εἶναι $\widehat{ΒΚΓ} = 120^\circ$.

221. Δίδεται κύκλος διαμέτρου ΑΟΒ καὶ σημείον Γ τῆς ἀκτίνος ΟΑ. Ἄν Μ εἶναι τυχὸν σημείον τοῦ κύκλου, δείξατε ὅτι $ΓΑ < ΓΜ < ΓΒ$.

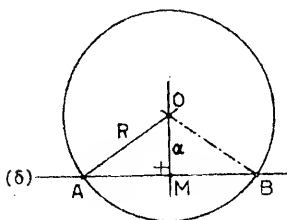
222. Δείξατε ὅτι δύο χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου δὲν δύνανται νὰ ἀλληλοδιχοτομοῦνται.

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ
ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

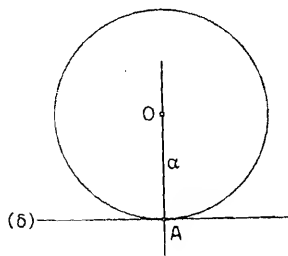
182. Θεώρημα. Ἐάν μία εὐθεΐα (δ) καὶ εἷς κύκλος, (Ο, R) ἔχουν δύο κοινὰ σημεία, τότε εἶναι $a < R$, ὅπου α ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ τὴν εὐθεΐαν.

Ἀπόδειξις. Κατ' ἀρχὰς ἂς παρατηρήσωμε ὅτι εἷς κύκλος καὶ μία εὐθεΐα δύνανται νὰ ἔχουν δύο κοινὰ σημεία, διότι δύο οἰαδήποτε σημεία ἐνὸς κύκλου ὀρίζουν μίαν εὐθεΐαν, ἡ ὁποία μετ' αὐτοῦ ἔχει προφανῶς κοινὰ τὰ σημεία αὐτά.

Ἐστω ὅτι ἡ εὐθεΐα (δ) μετὸν κύκλον (Ο, R) ἔχουν δύο κοινὰ σημεία Α καὶ Β (σχ. 177). Θεωροῦμεν τὴν ἀπόστασιν $ΟΜ = α$ τοῦ Ο ἀπὸ τὴν (δ). Τότε ἡ ΟΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν (δ) καὶ τὸ Μ εἶναι μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ. Ἀρα ἡ ΟΑ = R θὰ εἶναι πλάγια ὡς πρὸς τὴν (δ), συνεπῶς θὰ εἶναι $ΟΜ < ΟΑ$ ἢ $α < R$.



Σχ. 177



Σχ. 178

Εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν τοῦ κύκλου καὶ τῆς εὐθείας, ἡ εὐθεῖα λέγεται **τέμνουσα** τοῦ κύκλου, ἢ λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα **τέμνει** τὸν κύκλον ἢ ὅτι ὁ κύκλος **τέμνει** τὴν εὐθεῖαν εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B .

183. Έφαπτομένη εὐθεῖα κύκλου καλεῖται μία εὐθεῖα ἔχουσα ἐν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τοῦ κύκλου (σχ. 178). Τὸ κοινὸν σημεῖον καλεῖται **σημεῖον ἐπαφῆς**. Αἱ προτάσεις εὐθεῖα ἐφάπτεται κύκλου καὶ κύκλος ἐφάπτεται εὐθείας εἶναι ἰσοδύναμοι.

184. Θεώρημα. Ἐὰν εὐθεῖα (δ) ἐφάπτεται κύκλου (O, R) , τότε εἶναι $a = R$, ὅπου a ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν.

Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ σχῆμα ποὺ ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὸν κύκλον (O, R) καὶ τὴν εὐθεῖαν (δ) ἔχει ὡς ἄξονα συμμετρίας τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου O κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (δ) (§ 170 πόρισμα V). Ἐὰν ἐπομένως ὁ κύκλος (O, R) καὶ ἡ εὐθεῖα (δ) ἔχουν ἐν κοινὸν σημεῖον A , πρέπει κατ' ἀνάγκην τοῦτο νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας. Ἐὰν δὲν συνέβαινε τοῦτο, θὰ ὑπῆρχε καὶ δεύτερον κοινὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (O, R) μετὰ τὴν εὐθεῖαν (δ) , τὸ συμμετρικὸν τοῦ A ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας, ὅπερ ἄτομον, διότι τότε θὰ ὑπῆρχον δύο κοινὰ σημεῖα εὐθείας καὶ κύκλου. Ἀρα τὸ τμήμα OA εἶναι τὸ κάθετον τμήμα ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (δ) , δηλαδὴ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν. Ἐπομένως εἶναι $OA = R$, διότι τὸ A ἀνήκει εἰς τὸν κύκλον, ἦτοι $a = R$.

Πόρισμα. I. Μία ἐφαπτομένη ἐνὸς κύκλου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς.

Πόρισμα II. Ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον μιᾶς ἀκτίνος κύκλου, τότε ἡ εὐθεῖα ἐφάπτεται εἰς τὸν κύκλον.

Πόρισμα III. Ἐὰν A εἶναι σημεῖον ἐνὸς κύκλου, ὑπάρχει μία καὶ μόνον μία εὐθεῖα ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον A .

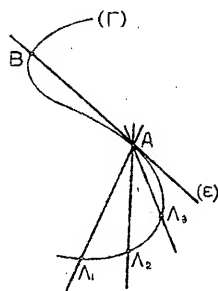
* 185. **Έφαπτομένη καμπύλης.** Ἐνῶ ὁ ὅρισμός τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας εἰς κύκλον, ὡς ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἔχει ἐν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τὸν κύκλον, ἐξυπηρετεῖ ἀπολύτως τὰς ἀνάγκας τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, ἐν τούτοις ὁ ὅρισμός οὗτος δὲν ἀρκεῖ διὰ μίαν τυχοῦσαν καμπύλην (Γ) . Γενικώτερον θὰ δώσωμεν τὸν ἐξῆς ὅρισμόν: Μία εὐθεῖα (ϵ) καλεῖται **ἐφαπτομένη** μιᾶς καμπύλης (Γ) εἰς σημεῖον τῆς A (σχ. 179), ὅταν ἡ εὐθεῖα (ϵ) εἶναι ἡ ὁριακὴ θέσις μιᾶς μεταβλητῆς τεμνούσης AA , ὅπου τὸ μεταβλητὸν σημεῖον A , διατρέχον τὴν ἀκολουθίαν τῶν σημείων A_1, A_2, A_3, \dots τῆς καμπύλης (Γ) , τείνει νὰ ταυτισθῇ μετὰ τὸ A .

Ἡ ἐφαπτομένη εὐθεῖα (ϵ) , δυνατὸν νὰ ἔχῃ μετὰ τῆς καμπύλης (Γ) ἐκτὸς τοῦ A καὶ δεύτερον κοινὸν σημεῖον B . Τοῦτο ἐνδεχομένως νὰ συμβαίῃ μόνον ὅταν ἡ καμπύλη (Γ) εἶναι μὴ κυρτή.

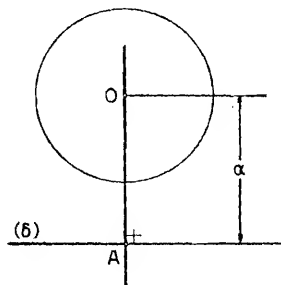
186. Θεώρημα. Ἐὰν μία εὐθεῖα (δ) καὶ εἰς κύκλος (O, R) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, τότε εἶναι $a > R$ ὅπου a ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν.

Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον ἡ εὐθεῖα (δ) καὶ ὁ κύκλος (O, R) δὲν ἔχουν κοινὰ

σημεία, έπεται ότι δεν υπάρχουν σημεία της (δ) έσωτερικά δια τον κύκλον (O, R) , διότι εάν υπήρχον ή ευθεία θα έτεμνε τον κύκλον (σχ. 180). Τότε από



Σχ. 179



Σχ. 180

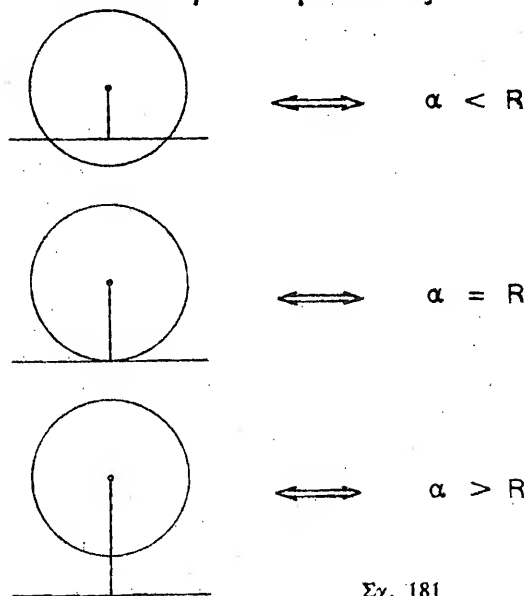
το κέντρον O του κύκλου φέρομεν την κάθετον OA επί την (δ) και το A , ως σημείον της (δ) θα είναι έξωτερον του κύκλου. Άρα δια την απόστασιν $OA = \alpha$ του κέντρου του κύκλου (O, R) από την ευθείαν (δ) θα είναι $OA > R$ ή $\alpha > R$.

Είς την θέσιν αυτήν της ευθείας και του κύκλου, ή ευθεία λέγεται έξωτερική δια τον κύκλον, ή μη τέμνουσα αυτόν.

Διά τὰ τρία προηγούμενα θεωρήματα ισχύουν και τὰ αντίστροφα αὐτῶν τὰ ὁποῖα συνοψίζονται εἰς τὸ ἐπόμενον θεώρημα :

187. Θεώρημα. Ἐστω ευθεία (δ) , κύκλος (O, R) καὶ α ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου O τοῦ κύκλου ἀπὸ τὴν ευθείαν. Τότε εἰναι $\alpha < R$ ἢ $\alpha = R$ ἢ

Συνοπτική ἀνακεφαλαίωσις



Σχ. 181

$\alpha > R$ ή εὐθεῖα μετὸν κύκλον ἔχουν δύο ἢ ἓνα ἢ οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἀντιστοίχως.

Ἀπόδειξις. i). Ἐάν εἶναι $\alpha < R$, τότε ἀποκλείεται ὁ κύκλος μετὴν εὐθεῖαν νὰ ἔχουν ἓν ἢ οὐδὲν κοινὸν σημεῖον, διότι τότε θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι ἢ $\alpha = R$ ἢ $\alpha > R$ ἀντιστοίχως. Ἀρα ὁ κύκλος μετὴν εὐθεῖαν ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα.

ii). Ἐάν $\alpha = R$, τότε ἀποκλείεται ὁ κύκλος μετὴν εὐθεῖαν νὰ ἔχουν δύο ἢ οὐδὲν κοινὰ σημεῖα, διότι τότε θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι ἢ $\alpha < R$ ἢ $\alpha > R$ ἀντιστοίχως. Ἀρα ὁ κύκλος μετὴν εὐθεῖαν ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον.

iii). Ἐάν τέλος εἶναι $\alpha > R$ τότε κατ' ἀνάγκην ὁ κύκλος μετὴν εὐθεῖαν δὲν θὰ ἔχουν κοινὰ σημεῖα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

223. Δείξατε ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου κύκλου, εἶναι παράλληλοι.

224. Ἐστω ὀρθογώνιον τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$ εἰς τὰς γωνίας \widehat{A} καὶ $\widehat{\Delta}$. Ἐάν ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ εἶναι ἴση μετὸ ἄθροισμα $AB + \Gamma\Delta$ τῶν δύο βάσεων, δείξατε ὅτι ὁ κύκλος μετὰ διάμετρον τὴν $B\Gamma$ ἐφάπτεται τῆς AD .

Β'.

225. Ἀπὸ σημείου A εὐρισκόμενον εἰς τὴν προέκτασιν μιᾶς διαμέτρου $B\Gamma$ κύκλου κέντρου K καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ , φέρομεν τέμνουσαν τοῦ κύκλου $AD\epsilon$ οὕτως, ὥστε τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου τμήμα αὐτῆς AD νὰ εἶναι ἴσον μετὴν ἀκτῖνα. Δείξατε ὅτι εἶναι $B\widehat{K\epsilon} = 3 \cdot \widehat{\Gamma K\Delta}$.

226. Ἐστωσαν (δ_1) καὶ (δ_2) δύο παράλληλοι εὐθεῖαι, AB μία κοινὴ κάθετος αὐτῶν καὶ M τὸ μέσον τοῦ τμήματος AB . Θεωροῦμεν ὀρθὴν γωνίαν μετὰ κορυφὴν τὸ M , τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ τέμνουν τὰς (δ_1) καὶ (δ_2) εἰς τὰ Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι ἡ $\Gamma\Delta$ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου μετὰ διάμετρον τὴν AB .

188. Θεώρημα. Ἐστω κύκλος (O, R) καὶ Σ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου του. Φέρομεν τὴν SO , ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B . Ἐάν εἶναι $\Sigma A < \Sigma B$ καὶ M τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, τότε θὰ εἶναι καὶ $\Sigma A \leq \Sigma M \leq \Sigma B$.

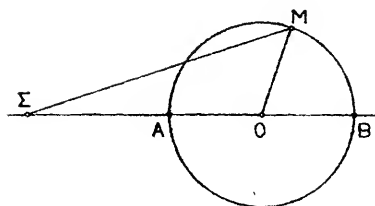
Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα OM καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου ΣOM λαμβάνομεν (§ 115) :

$$(1) \quad |SO - OM| < \Sigma M$$

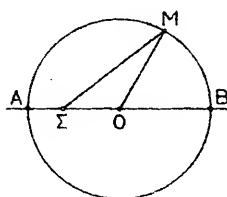
Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

i). Ἐάν τὸ Σ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου (O, R) (σχ. 182), ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$\begin{aligned} \Sigma O - OM < \Sigma M \quad \eta \quad \Sigma A + AO - OM < \Sigma M \quad \eta \\ \Sigma A + R - R < \Sigma M \Rightarrow \Sigma A < \Sigma M \end{aligned}$$



Σχ. 182



Σχ. 183

ii). 'Εάν τὸ Σ εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (O, R) (σχ. 183), ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$\begin{aligned} OM - \Sigma O < \Sigma M \quad \eta \quad OM - (OA - \Sigma A) < \Sigma M \quad \eta \\ R - (R - \Sigma A) < \Sigma M \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(2) \quad \Sigma A < \Sigma M$$

Οὕτως ἀπεδείχθη τὸ πρῶτον σκέλος τῆς δοθείσης διπλῆς σχέσεως μετὰ τὴν παρατήρησιν ὅτι τὸ ἴσον θὰ ἰσχύῃ, ὅταν τὸ Μ συμπίπτῃ μετὰ τὸ Α.

Ὁμοίως ἐκ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου ΣΟΜ λαμβάνομεν καὶ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις ὅτι :

$$\begin{aligned} \Sigma M < \Sigma O + OM \quad \eta \quad \Sigma M < \Sigma O + R \quad \eta \\ \Sigma M < \Sigma O + OB \quad \eta \end{aligned}$$

$$(3) \quad \Sigma M < \Sigma B$$

Αἱ σχέσεις (2) καὶ (3) συγχωνεύονται εἰς τὴν :

$$\Sigma A \leq \Sigma M \leq \Sigma B$$

ὅπου τὸ ἴσον ἰσχύει ἐάν τὸ Μ συμπίπτῃ μετὰ τὸ Α ἢ μετὰ τὸ Β ἀντιστοίχως.

Παρατήρησις. Ἡ ἀπόστασις ΣΑ καλεῖται ἐλάχιστη ἀπόστασις τοῦ σημείου Σ ἀπὸ τὸν κύκλον (O, R) καὶ ἡ ΣΒ μέγιστη ἀπόστασις τοῦ Μ ἀπὸ τὸν κύκλον (O, R).

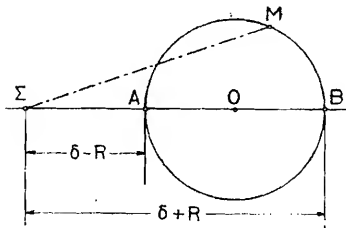
Πόρισμα. 'Εάν δ εἶναι ἡ ἀπόστασις σημείου Σ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (O, R), τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ τυχόντος σημείου Μ τοῦ κύκλου ἀπὸ τὸ Σ περιέχεται εἰς τὸ κλειστὸν διάστημα $[|\delta - R|, \delta + R]$ (σχ. 184).

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

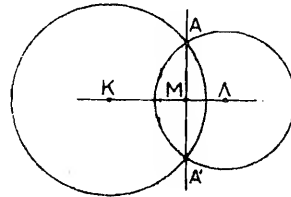
189. Διάκεντρος δύο κύκλων καλεῖται τὸ εὐθύγραμμον τμήμα μετὰ ἄκρα τὰ κέντρα τῶν δύο κύκλων. Συμβολίζεται συνήθως ἡ διάκεντρος μετὰ τὸ γράμμα δ.

190. Θεώρημα. 'Εάν δύο κύκλοι ἔχουν ἓνα κοινὸν σημεῖον, ἔχουν κοινὸν καὶ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον.

Ἀπόδειξις. Ἡ διάκεντρος ΚΛ, δύο κύκλων κέντρων Κ καὶ Λ, προεκτεινομένη, περιέχει διαμέτρου αὐτῶν (σχ. 185). Ἐπειδὴ ἐκάστη διάμετρος κύκλου εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ, ἔπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ΚΛ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ ὅλου σχήματος. Ἐὰν ἐπομένως ὑπάρχῃ σημεῖον Α ἀνήκον καὶ εἰς τοὺς δύο κύκλους, τότε καὶ τὸ συμμετρικὸν Α' αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν ΚΛ θὰ ἀνήκῃ καὶ εἰς τοὺς δύο κύκλους.



Σχ. 184



Σχ. 185

Πόρισμα I. Ἐὰν δύο κύκλοι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, τότε ἡ διάκεντρος αὐτῶν εἶναι μεσοκάθετος τῆς κοινῆς χορδῆς τῶν.

Τότε λέγομεν ὅτι δύο κύκλοι τέμνονται.

Πόρισμα II. Ἐὰν δύο κύκλοι ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τοῦτο εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν.

Ἐστω Α τὸ κοινὸν σημεῖον δύο κύκλων κέντρων Κ καὶ Λ (σχ. 187). Ἐὰν τὸ Α δὲν ᾔτο ἐπὶ τῆς διακέντρου ΚΛ, τότε οἱ δύο κύκλοι θὰ εἶχον ὡς κοινὸν σημεῖον καὶ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν ΚΛ, δηλαδή θὰ εἶχον δύο κοινὰ σημεῖα, ὅπερ ἄτοπον. Ἀρα τὸ κοινὸν σημεῖον Α εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς ΚΛ.

Εἰς τὴν περίπτωσιν πού οἱ δύο κύκλοι ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, λέγομεν ὅτι ἐφάπτονται ὁ εἰς εἰς τὸν ἄλλον, τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν λέγεται σημεῖον ἐπαφῆς.

191. Θεώρημα. Ἐὰν δύο κύκλοι (Κ, R) καὶ (Λ, ρ) τέμνονται εἰς δύο σημεῖα, τότε εἶναι: $|R - \rho| < \delta < R + \rho$, ὅπου δ ἡ διάκεντρος αὐτῶν.

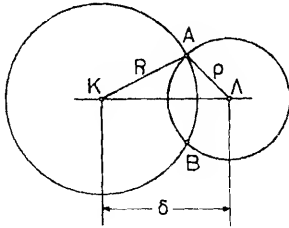
Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο κύκλων (σχ. 186). Ταῦτα θὰ εἶναι συμμετρικά ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον ΚΛ, ἐπομένως εὐρίσκονται ἐκατέρωθεν αὐτῆς. Τότε ὑπάρχει τρίγωνον ΑΚΛ, ἐκ τοῦ ὁποῦ λαμβάνομεν (§ 115).

$$|AK - AL| < KL < AK + AL \quad \eta \quad |R - \rho| < \delta < R + \rho.$$

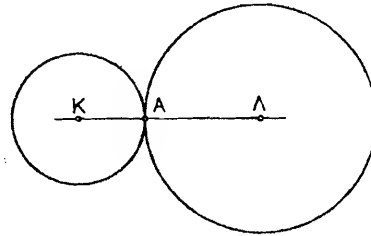
192. Θεώρημα. Ἐὰν δύο κύκλοι (Κ, R) καὶ (Λ, ρ) ἐφάπτονται καὶ ὁ εἰς εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου, τότε εἶναι $\delta = R + \rho$, ὅπου δ ἡ διάκεντρος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω Α τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῶν. Γνωρίζομεν ὅτι τοῦτο εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς διακέντρου ΚΛ (σχ. 187). Τὸ σημεῖον Α εἶναι ἐνδιάμεσον

τῶν κέντρων K καὶ Λ τῶν δύο κύκλων, διότι ὁ εἰς εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου. Ἄρα $K\Lambda = KA + \Lambda A \Rightarrow \delta = R + \rho$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς.



Σχ. 186

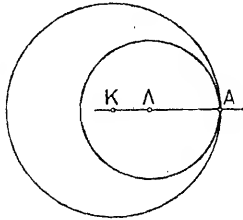


Σχ. 187

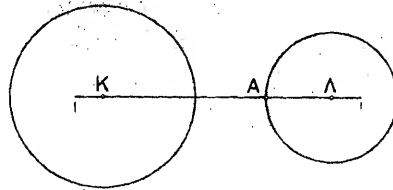
193. Θεώρημα. Ἐὰν δύο κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) ἐφάπτονται καὶ ὁ εἰς εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἄλλου, τότε εἶναι $\delta = |R - \rho|$, ὅπου δ ἡ διάκεντρος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω A τὸ σημεῖον ἐπαφῆς των, τὸ ὁποῖον θὰ εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς $K\Lambda$ (σχ. 188). Ὡς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ κύκλος (Λ, ρ) εἶναι ἐσωτερικὸς διὰ τὸν κύκλον (K, R) . Τότε εἶναι $R > \rho$ καὶ τὸ Λ , ὡς ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (K, R) , εἶναι ἐνδιάμεσον τῶν K καὶ A . Ἄρα $KA = K\Lambda + \Lambda A \Rightarrow R = \delta + \rho \Rightarrow \delta = R - \rho$. Γενικῶς γράφομεν $\delta = |R - \rho|$, ὅταν δὲν γνωρίζωμεν τὴν σχέσιν μεγέθους τῶν ἀκτίνων.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς.



Σχ. 188



Σχ. 189

194. Θεώρημα. Ἐὰν δύο κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ὁ εἰς εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου, τότε εἶναι $\delta > R + \rho$, ὅπου δ ἡ διάκεντρος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον ὁ κύκλος (Λ, ρ) εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (K, R) (σχ. 189), ἔπεται ὅτι κάθε σημεῖον τοῦ κύκλου (Λ, ρ) ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον K ἀπόστασιν μεγαλυτέραν τῆς ἀκτίνος R τοῦ κύκλου (K, R) . Τότε καὶ ἡ ἐλάχιστη ἀπόστασις KA τοῦ σημείου K ἀπὸ τὸν κύκλον (Λ, ρ) θὰ εἶναι

μεγαλύτερα τῆς ἀκτίνος R , ἤτοι (§ 188) θὰ εἶναι $KA > R$ ἢ $\delta - \rho > R \Rightarrow \delta > R + \rho$.

195. Θεώρημα. Ἐὰν δύο κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ὁ εἰς εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἄλλου, τότε εἶναι $\delta < |R - \rho|$, ὅπου δ ἡ διάκεντρος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι ὁ κύκλος (Λ, ρ) εὐρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (K, R) καὶ ἄρα εἶναι $R > \rho$. Τότε ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ (Λ, ρ) θὰ ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον K τοῦ κύκλου (K, R) ἀπόστασιν μικρότεραν τῆς ἀκτίνος R (σχ. 190). Ἀρα καὶ ἡ μεγίστη ἀπόστασις KA τοῦ σημείου K ἀπὸ τὸν κύκλον (Λ, ρ) , θὰ εἶναι μικρότερα τῆς ἀκτίνος R , ἤτοι (§ 188) θὰ εἶναι

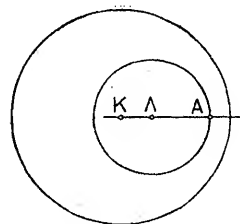
$$KA < R \quad \text{ἢ} \quad \delta + \rho < R$$

$$\text{ἢ} \quad \delta < R - \rho.$$

Ἐὰν εἶναι $R < \rho$, τότε θὰ ἔχωμεν $\delta < \rho - R$.

Γενικῶς ἔχομεν :

$\delta < |R - \rho|$ ὅταν δὲν γνωρίζωμεν σχέσιν μεγέθους τῶν ἀκτίνων.



Σχ. 190

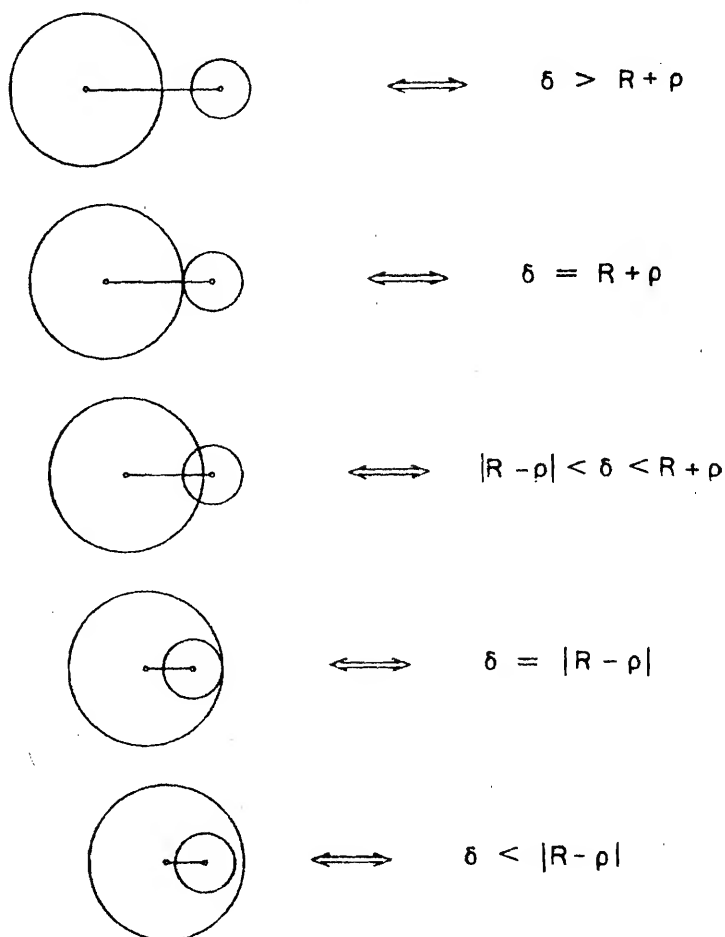
Διὰ τὰ προηγούμενα θεωρήματα τῶν σχετικῶν θέσεων δύο συνεπιπέδων κύκλων, ἰσχύουν καὶ τὰ ἀντίστροφα, τὰ ὁποῖα συνοψίζομεν εἰς τὸ ἐπόμενον θεώρημα :

196. Θεώρημα. Ἐὰν (K, R) καὶ (Λ, ρ) εἶναι δύο συνεπίπεδοι κύκλοι, διὰ τοὺς ὁποίους ἰσχύει: $|R - \rho| < \delta < R + \rho$, ἢ $\delta = R + \rho$, ἢ $\delta = |R - \rho|$, ἢ $\delta > |R + \rho|$, ἢ $\delta < |R - \rho|$, τότε οἱ δύο κύκλοι τέμνονται εἰς δύο σημεῖα, ἢ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς, ἢ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς, ἢ ὁ εἰς εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου, ἢ ὁ εἰς εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἄλλου ἀντιστοίχως.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι διὰ τοὺς κύκλους (K, R) καὶ (Λ, ρ) ἰσχύει $|R - \rho| < \delta < R + \rho$. Τότε ἀποκλείεται τὸ ἐνδεχόμενον, οἱ δύο κύκλοι νὰ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς, διότι τότε θὰ ἦτο $\delta = R + \rho$ (§ 192) ἢ $\delta = |R - \rho|$ (§ 193) ἀντιστοίχως, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν. Ἐπίσης ἀποκλείεται οἱ δύο κύκλοι νὰ μὴ ἔχουν κοινὸν σημεῖον, διότι τότε θὰ ἦτο ἢ $\delta > R + \rho$ (§ 194) ἢ $\delta < |R - \rho|$ (§ 195), ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἀρα κατ' ἀνάγκην οἱ δύο κύκλοι θὰ τέμνονται εἰς δύο σημεῖα.

Ὅμοίως ἀποδεικνύεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ὅτι ἐκάστη τῶν ὑπολοίπων συνθηκῶν $\delta = R + \rho$, $\delta = |R - \rho|$, $\delta > R + \rho$ καὶ $\delta < |R - \rho|$, ἐξασφαλίζει τὴν ἀντίστοιχον θέσιν τῶν δύο κύκλων.

Συνοπτική ανακεφαλαίωση τῶν σχετικῶν θέσεων δύο κύκλων εἰς τὸ ἐπίπεδον.



Σχ. 191

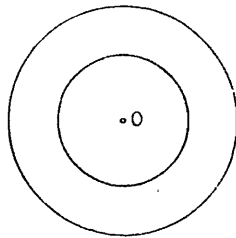
Με δ συμβολίζομεν τὴν διάκεντρον ΚΛ τῶν δύο κύκλων (Κ, R) καὶ (Λ, ρ).

197. Ὅμόκεντροι κύκλοι καλοῦνται δύο κύκλοι ὅταν ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον. Ἡ διάκεντρος αὐτῶν εἶναι μηδενικὴ καὶ ὁ εἰς κύκλος εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἄλλου (σχ. 192).

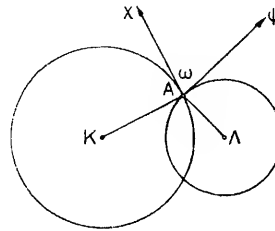
198. Γωνία δύο τεμνομένων κύκλων καλεῖται ἡ κυρτὴ γωνία ω τὴν ὁποῖαν σχηματίζουν αἱ ἐφαπτόμεναι ἡμισυθεῖαι Αχ, Αγ τῶν κύκλων εἰς ἓν τῶν κοινῶν σημείων των Α, ὅταν αὗται δὲν τέμνουν τοὺς κύκλους (σχ. 193).

Ἡ γωνία αὐτῶν ω εἶναι παράπληρωματικὴ τῆς γωνίας $\widehat{ΚΑΛ}$, ποὺ σχηματίζουν αἱ ἐκ τοῦ κοινοῦ σημείου Α ἀγόμεναι ἀκτῖνες τῶν δύο κύκλων (διατί ;)

199. Ὀρθογώνιοι κύκλοι ἢ κύκλοι τεμνόμενοι ὀρθογωνίως καλοῦνται δύο κύκλοι, τῶν ὁποίων ἡ γωνία ω εἶναι ὀρθή.



Σχ. 192



Σχ. 193

200. Ἐφαπτόμενον τμήμα. Ἐάν Σ εἶναι σημεῖον ἐκτὸς κύκλου κέντρου O (σχ. 194) καὶ (ϵ) μία εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Σ καὶ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς σημεῖον A , τὸ τμήμα ΣA καλεῖται ἐφαπτόμενον τμήμα ἐκ τοῦ σημείου Σ πρὸς τὸν κύκλον κέντρου O .

201. Θεώρημα. Ἐάν ΣA εἶναι ἓν ἐφαπτόμενον τμήμα ἐκ σημείου Σ ἐκτὸς κύκλου κέντρου O πρὸς τὸν κύκλον, τότε ὑπάρχει καὶ δεῦτερον ἐφαπτόμενον τμήμα $\Sigma A'$ ἐκ τοῦ σημείου Σ πρὸς τὸν κύκλον καὶ εἶναι:

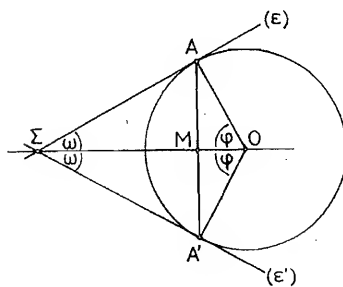
i) $\Sigma A = \Sigma A'$

ii) Ἡ ΣO εἶναι διχοτόμος τῆς κυρτῆς γωνίας $\widehat{A \Sigma A'}$.

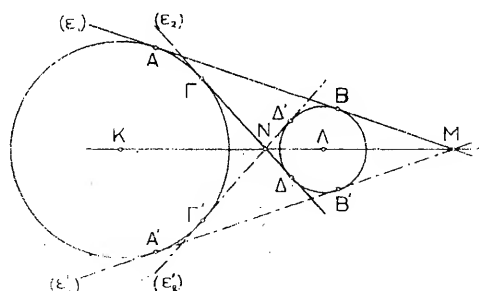
iii) Ἡ ΣO εἶναι διχοτόμος τῆς κυρτῆς γωνίας $\widehat{A O A'}$.

iv) Ἡ ΣO εἶναι μεσοκάθετος τῆς χορδῆς AA' .

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ ΣO περιέχει διάμετρον τοῦ κύκλου, ἔπεται ὅτι εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος (σχ. 194). Ἀρα τὸ τμήμα $\Sigma A'$, συμμετρικὸν τοῦ ΣA ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ΣO , εἶναι καὶ αὐτὸ ἐφαπτόμενον τοῦ κύκλου καὶ μάλιστα εἰς σημεῖον A' συμμετρικὸν τοῦ A ὡς πρὸς ἄξονα τὸν ΣO . Τότε, λόγῳ τῆς συμμετρίας ἰσχύουν αἱ προτάσεις i), ii), iii) καὶ iv).



Σχ. 194



Σχ. 195

202. Κοινή ἐφαπτομένη δύο κύκλων καλεῖται μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἐφάπτεται καὶ εἰς τοὺς δύο κύκλους.

Μία κοινή εφαπτομένη (ε_1) δύο κύκλων κέντρων K και Λ καλεῖται **ἐξωτερική**, ἐὰν ἀφήνη πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της τοὺς δύο κύκλους, ὅπως ἡ AB (σχ. 195) καὶ μία κοινή εφαπτομένη (ε_2) καλεῖται **ἐσωτερική**, ἐὰν ἀφήνη ἐκατέρωθεν αὐτῆς τοὺς δύο κύκλους, ὅπως ἡ $\Gamma\Delta$.

Ἐὰν εὐθεῖα (ε_1) εἶναι κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων, τότε καὶ ἡ συμμετρικὴ αὐτῆς (ε_1') ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον εἶναι κοινή εφαπτομένη τῶν δύο κύκλων. Τοῦτο ἔπεται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ διάκεντρος τῶν δύο κύκλων εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος. Κατὰ συνέπειαν ἐὰν δύο κοινὰ εφαπτόμεναι (ε_1) καὶ (ε_1') τέμνονται, τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῶν M εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας $K\Lambda$.

Κατὰ τὸ θεώρημα 201, ἔχομεν :

$$MA = MA' \quad \text{καὶ} \quad MB = MB'$$

Δι' ἀφαιρέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη, εὐρίσκομεν :

$$AB = A'B'.$$

Ὅμοίως ἔχομεν $NG = NG'$ καὶ $ND = ND'$. Ἄρα $\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$.

Ὡστε τὰ κοινὰ εφαπτόμενα τμήματα (ἐξωτερικὰ $AB = A'B'$ ἢ ἐσωτερικὰ $\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$) δύο κύκλων εἶναι ἴσα.

Ἐὰν οἱ δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι, τότε αἱ δύο κοινὰ ἐξωτερικὰ ἐφαπτόμεναι εἶναι παράλληλοι (διὰ τί ;).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

227. Δύο κύκλοι κέντρων K καὶ Λ τέμνονται εἰς τὰ A καὶ B . Ἐκ τοῦ A φέρομεν εὐθεῖαν $\Gamma\Delta \parallel K\Lambda$, τέμνουσαν αὐτοὺς εἰς τὰ Γ καὶ Δ . Δείξατε ὅτι εἶναι $\Gamma\Delta = 2K\Lambda$.

228. Δύο κύκλοι κέντρων K καὶ Λ τέμνονται εἰς τὰ A καὶ B . Δείξατε ὅτι ἐξ ὧν τῶν τεμνουσῶν αὐτοὺς τῶν διερχομένων διὰ τοῦ A , μεγαλύτερα εἶναι ἢ παράλληλος τῆς $K\Lambda$.

229. Ἐὰν δύο κύκλοι ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον (εἶναι ὁμόκεντροι), ὅλαι αἱ χορδαὶ τοῦ μεγαλύτερου αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται τοῦ μικροτέρου εἶναι ἴσαι.

230. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον A . Διὰ τοῦ A φέρομεν εὐθεῖαν τέμνουσαν αὐτοὺς εἰς τὰ B καὶ Γ . Δείξατε ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων εἰς τὰ B καὶ Γ εἶναι παράλληλοι.

231. Ἐκ σημείου A ἐκτὸς κύκλου κέντρου K θεωροῦμεν τὰς ἐφαπτομένας $AB, A\Gamma$ τοῦ κύκλου καὶ ἔστω K' τὸ συμμετρικὸν τοῦ K ὡς πρὸς τὴν $A\Gamma$. Δείξατε ὅτι $\widehat{BAK'} = 3 \cdot \widehat{BAK}$.

232. Δείξατε ὅτι ἡ κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων εἶναι μικρότερα ἢ τὸ πολὺ ἴση πρὸς τὴν διάκεντρον τῶν κύκλων. Πότε εἶναι ἴση;

233. Δύο κύκλοι κέντρων K καὶ Λ ἐφάπτονται τρίτου κύκλου εἰς τὰ A καὶ B ἀντιστοίχως. Ἐὰν ἡ AB τέμνη τὸν κύκλον Λ εἰς τὸ Γ , δείξατε ὅτι $K\Lambda \parallel \Lambda\Gamma$.

Β'.

234. Δίδεται κύκλος κέντρου K καὶ διάμετρος AB αὐτοῦ. Μὲ κέντρον σημεῖον Γ τῆς ἀκτίνος KB καὶ ἀκτῖνα ΓK γράφομεν κύκλον, ὁ ὁποῖος νὰ τέμνη τὸν (K, KB) εἰς τὰ

σημεία Δ και Ε. Εάν η εὐθεΐα ΔΓ τέμνη τὸν κύκλον (Κ, ΚΒ) εἰς τὸ Ζ, δείξατε ὅτι $\widehat{AKZ} = 3\widehat{BK\Delta}$.

235. Δύο κύκλοι ἀκτίνων ρ καὶ 3ρ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν.

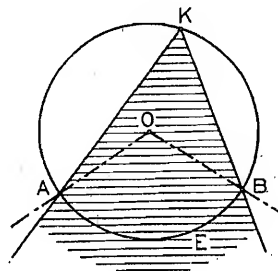
236. Δύο κύκλοι κέντρων Κ καὶ Λ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Α. Εάν ΒΓ εἶναι ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν, δείξατε ὅτι εἶναι: α) $\widehat{B\Lambda\Gamma} = 1^\circ$, β) ὁ κύκλος μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ ἐφάπτεται τῆς διακέντρου εἰς τὸ Α, γ) ὁ κύκλος μὲ διάμετρον τὴν ΚΛ ἐφάπτεται τῆς ΒΓ εἰς τὸ μέσον της.

237. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΚΒ. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ἡμιευθείας ΑΧ καὶ ΒΥ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἡμικυκλίου καὶ τρίτην ἐφαπτομένην αὐτοῦ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΧ καὶ ΒΥ εἰς τὰ Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι: α) $\Gamma\Delta = \Lambda\Gamma + \Delta\Lambda$, β) $\widehat{\Gamma K\Delta} = 1^\circ$.

203. Έγγεγραμμένη γωνία εἰς κύκλον (Ο, R) καλεῖται κάθε γωνία \widehat{AKB} , ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφὴν της Κ ἐπὶ τοῦ κύκλου (Ο, R), αἱ δὲ πλευραὶ της τέμνουν αὐτὸν εἰς σημεία Α καὶ Β.

Λέγομεν ἀκόμη ὅτι ἡ \widehat{AKB} εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον \widehat{AKB} , τὸ ὁποῖον δὲν περιέχεται ἐντὸς τῆς γωνίας καὶ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου \widehat{AEB} τὸ ὁποῖον περιέχεται ἐντὸς τῆς γωνίας (σχ. 196).

Ἡ ἐπίκεντρος γωνία \widehat{AOB} , ἡ ὁποία περιέχει τὸ αὐτὸ τόξον \widehat{AB} μετὰ τῆς ἐγγεγραμμένης \widehat{AKB} , καλεῖται ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος τῆς ἐγγεγραμμένης. Εἶναι προφανές ὅτι εἰς τὴν ἀντιστοιχίαν αὐτὴν κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία ἔχει μίαν ἀντίστοιχον ἐπίκεντρον ἐνῶ κάθε ἐπίκεντρος γωνία εἶναι ἀντίστοιχος ἀπείρων ἐγγεγραμμένων γωνιῶν, τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι σημεία τοῦ τόξου \widehat{AKB} .



Σχ. 196

ΣΧΕΣΙΣ ΕΠΙΚΕΝΤΡΟΥ ΓΩΝΙΑΣ ΠΡΟΣ ΜΙΑΝ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΝ ΑΥΤΗΣ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗΝ

204. Θεώρημα. Εἰς δοθέντα κύκλον μία ἐπίκεντρος γωνία εἶναι διπλασία πάσης ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὴν ἐγγεγραμμένης.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὁ κύκλος (Ο, R), \widehat{AOB} ἡ ἐπίκεντρος γωνία βαίνουσα εἰς τόξον \widehat{AB} καὶ \widehat{AMB} μία ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐγγεγραμμένη. Θὰ διακρίνωμεν τρεῖς περιπτώσεις :

i). 'Η κορυφή M εύρεται εις την προέκτασιν τῆς AO (σχ. 197). Τότε τὸ τρίγωνον OMB εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ $OM = OB = R$.

Ἄρα $\widehat{OMB} = \widehat{OBM} = \omega$ ἤ

$$(1) \quad \widehat{AMB} = \omega$$

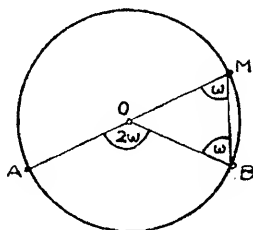
Ἐπομένως (§ 105 I) θὰ εἶναι καὶ :

$$(2) \quad \widehat{AOB} = \omega + \omega = 2\omega$$

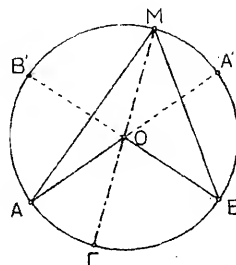
ὡς ἑξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου OMB .

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται :

$$\widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{AMB}$$



Σχ. 197



Σχ. 198

ii). 'Η κορυφή M , εύρεται ἐντὸς τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς \widehat{AOB} (σχ. 198). Τότε ἡ ἡμιευθεῖα MO , ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὸ Γ , εἶναι ἐσωτερικὴ τῆς \widehat{AMB} καὶ ἡ OG ἐσωτερικὴ τῆς \widehat{AOB} .

Ἐπομένως :

$$(3) \quad \widehat{AMB} = \widehat{AM\Gamma} + \widehat{\Gamma MB} \quad \text{καὶ}$$

$$(4) \quad \widehat{AOB} = \widehat{AO\Gamma} + \widehat{\Gamma OB}$$

Κατὰ τὴν περίπτωσιν (i) ἔχομεν :

$$(5) \quad \widehat{AO\Gamma} = 2 \cdot \widehat{AM\Gamma} \quad \text{καὶ}$$

$$(6) \quad \widehat{\Gamma OB} = 2 \cdot \widehat{\Gamma MB}$$

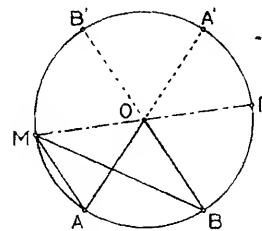
Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (5) καὶ (6) λαμβάνομεν :

$$\widehat{AO\Gamma} + \widehat{\Gamma OB} = 2(\widehat{AM\Gamma} + \widehat{\Gamma MB})$$

καὶ δυνάμει τῶν σχέσεων (3) καὶ (4) ἡ τελευταία γράφεται :

$$\widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{AMB}$$

iii). 'Η κορυφή M εύρεται ἐκτὸς τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς \widehat{AOB} (σχ. 199). Τότε ἡ ἡμιευθεῖα MO , ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὸ Γ , εἶναι ἐξωτερικὴ τὸσον τῆς \widehat{AMB} ὅσον καὶ τῆς \widehat{AOB} .



Σχ. 199

Επομένως :

$$(7) \quad \widehat{AMB} = \widehat{AM\Gamma} - \widehat{BM\Gamma} \quad \text{και}$$

$$(8) \quad \widehat{AOB} = \widehat{AO\Gamma} - \widehat{BO\Gamma}$$

Κατά την περίπτωση (i) έχουμε :

$$(9) \quad \widehat{AO\Gamma} = 2 \cdot \widehat{AM\Gamma} \quad \text{και}$$

$$(10) \quad \widehat{BO\Gamma} = 2 \cdot \widehat{BM\Gamma}$$

Δι' αφαιρέσεως τών (9) και (10) κατά μέλη λαμβάνομεν :

$$\widehat{AO\Gamma} - \widehat{BO\Gamma} = 2(\widehat{AM\Gamma} - \widehat{BM\Gamma})$$

και δυνάμει τών σχέσεων (7) και (8) ή τελευταία γράφεται :

$$\widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{AMB}$$

Πόρισμα I. Είς δοθέντα κύκλον, ὅλαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ἢ ἐπὶ ἰσών τόξων, εἶναι ἰσάι.

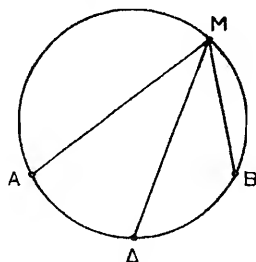
Πράγματι, διότι ὅλαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς αὐτῆς ἐπικέντρου γωνίας ἢ ἰσών ἐπικέντρων γωνιῶν.

Πόρισμα II. Δύο ἰσάι ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἰσούς κύκλους, ἀποτεμνουν ἴσα τόξα.

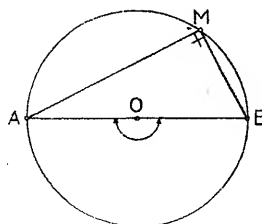
Πόρισμα III. Ἡ διχοτόμος ΜΔ μιᾶς ἐγγεγραμμένης γωνίας \widehat{AMB} , ἢ ὁποῖα βαίνει εἰς τὸ τόξον \widehat{AB} , χωρίζει τοῦτο εἰς δύο ἴσα τόξα $\widehat{AA} = \widehat{BB}$. (σχ. 200).

Πόρισμα IV. Μία γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθή.

Πράγματι, ἀφοῦ ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίκεντρος γωνία εἶναι πεπλατυσμένη (σχ. 201).



Σχ. 200



Σχ. 201

Ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφον, δηλαδὴ ἂν μία ὀρθὴ γωνία εἶναι ἐγγεγραμμένη, τότε βαίνει εἰς ἡμικύκλιον, διότι ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίκεντρος θὰ εἶναι πεπλατυσμένη καὶ συνεπῶς θὰ χωρίζῃ τὸν κύκλον εἰς δύο ἡμικύκλια.

Παρατήρησις. Ἐν τμῆμα AB λέγομεν ὅτι φαίνεται ἀπὸ σημείου M ὑπὸ γωνίαν ω (σχ. 202), ὅταν εἶναι $\widehat{AMB} = \omega$. Τὸ αὐτὸ ἐννοοῦμεν ὅταν λέγωμεν ὅτι τὸ σημεῖον M βλέπει τὸ τμῆμα AB ὑπὸ γωνίαν ω .

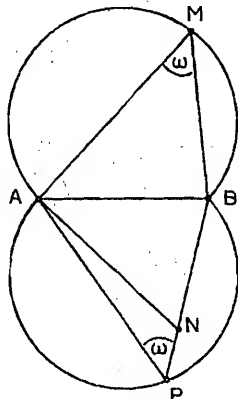
Πόρισμα V. Ἐν τόξον \widehat{AMB} καὶ τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὴν AB (σχ. 202), ἀποτελοῦν τὸν γ. τόπον τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ τμήμα AB φαίνεται ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν ω (ἢ τὰ ὁποῖα βλέπουν τὸ τμήμα AB ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν ω).

Ἐὰν σημεῖον N δὲν ἀνήκη εἰς τὰ τόξα \widehat{AB} , ἀποκλείεται νὰ εἶναι $\widehat{ANB} = \omega$, διότι, ἐπειδὴ ἡ NB τέμνει τὸ τόξον \widehat{AB} εἰς σημεῖον P , θὰ εἶναι $\widehat{APB} = \omega$ καὶ ἐπομένως ἐὰν ᾔτο καὶ $\widehat{ANB} = \omega \Rightarrow AP \parallel AN$, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ὁ γ. τόπος εἶναι τὰ δύο τόξα \widehat{AB} .

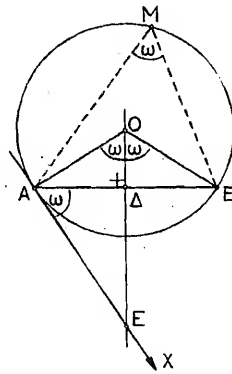
ΓΩΝΙΑ ΣΧΗΜΑΤΙΖΟΜΕΝΗ ΥΠΟ ΧΟΡΔΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΚΗΣ

205. Θεώρημα. Ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ χορδῆς κύκλου καὶ ἐφαπτομένης εἰς τὸ ἓν ἄκρον τῆς χορδῆς, εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐγγεγραμμένην γωνίαν εἰς τὸ τόξον ποὺ δὲν περιέχεται ἐντὸς τῆς πρώτης γωνίας.

Ἀπόδειξις. Ἐστω κύκλος κέντρου O , AB μία χορδὴ αὐτοῦ καὶ Ax ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ ἄκρον A τῆς χορδῆς.



Σχ. 202



Σχ. 203

i). Ἡ γωνία εἶναι ὀξεῖα. Ἐὰν ἡ χορδὴ δὲν εἶναι διάμετρος, θεωροῦμεν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ω , ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπ' αὐτῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης καὶ φέρομεν τὴν ἀκτῖνα OA , ἡ ὁποία θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην Ax (σχ. 203). Φέρομεν τὴν $OD \perp AB$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ax εἰς σημεῖον E . Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ADE καὶ OAE ἔχουν τὴν γωνίαν \widehat{E} κοινήν. Ἄρα θὰ εἶναι ἰσογώνια καὶ ἐπομένως θὰ ἔχουν καὶ

$$(1) \quad \widehat{\Delta AE} = \widehat{AOE} = \omega$$

Ἐχομεν ὁμως $\widehat{BO\Delta} = \widehat{AO\Delta} = \omega$ λόγῳ συμμετρίας ὡς πρὸς ἄξονα τὸν OD

καὶ ἐπομένως $\widehat{AOB} = 2\omega$. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι εἶναι καὶ $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$ (§ 204). Ἄρα :

$$(2) \quad \widehat{AMB} = \omega$$

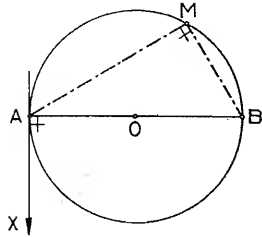
Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι εἶναι $\widehat{DAE} = \widehat{AMB}$ ἥτοι :

$$\widehat{BAx} = \widehat{AMB}$$

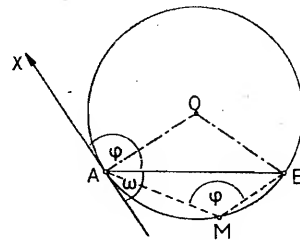
ii). Ἡ γωνία εἶναι ὀρθή. Τοῦτο συμβαίνει μόνον ὅταν ἡ χορδὴ AB εἶναι διάμετρος (σχ. 204). Ἀλλὰ τότε ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία \widehat{AMB} εἶναι ὀρθή ὡς βαίνουσα εἰς ἡμικύκλιον.

Ἄρα :

$$\widehat{BAx} = \widehat{AMB}$$



Σχ. 204



Σχ. 205

iii). Ἡ γωνία εἶναι ἀμβλεία. Ἐστω $\widehat{BAx} = \varphi > 1^\circ$ (σχ. 205). Τότε, ἂν ω εἶναι ἡ παραπληρωματικὴ τῆς, γνωρίζομεν ὅτι :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\widehat{AOB}}{2}. \text{ Ἄρα } \widehat{BAx} = \varphi = 2^\circ - \omega = 2^\circ - \frac{\widehat{AOB}}{2} = \\ &= \frac{4^\circ - \widehat{AOB}}{2} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \widehat{AMB} \end{aligned}$$

ὅπου μὲ τὸ σύμβολον \widehat{AOB} ἐννοοῦμεν τὴν μὴ κυρτὴν γωνίαν μὲ πλευρὰς τὰς OA καὶ OB. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως ἔπεται :

$$\widehat{BAx} = \widehat{AMB}$$

ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΤΕΜΝΟΜΕΝΩΝ ΧΟΡΔΩΝ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

206. Θεώρημα. Ἐὰν δύο χορδαὶ κύκλου τέμνονται εἰς σημεῖον ἐσωτερικὸν αὐτοῦ, ἡ γωνία, τὴν ὁποία σχηματίζουν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ τόξα τὰ περιλαμβανόμενα ἐντὸς τῆς γωνίας καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν αἱ χορδαὶ AB καὶ ΓΔ κύκλου (O, R) τεμνόμεναι

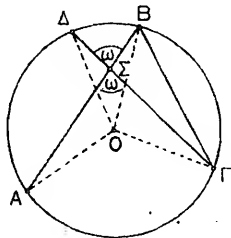
εἰς σημεῖον Σ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου καὶ ὡ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν (σχ. 206). Φέρομεν τὴν ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου ΣΒΓ λαμβάνομεν :

$$\omega = \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = \widehat{AB\Gamma} + \widehat{B\Gamma\Delta} = \frac{\widehat{AO\Gamma}}{2} + \frac{\widehat{BO\Delta}}{2}$$

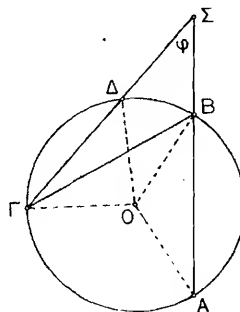
Ἄρα :

$$\omega = \frac{\widehat{AO\Gamma} + \widehat{BO\Delta}}{2}$$

207. Θεώρημα. Ἐὰν δύο χορδαὶ κύκλου τέμνονται προεκτεινόμεναι ἐκτὸς αὐτοῦ, ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν ἰσοῦται πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ τόξα τὰ περιλαμβανόμενα ἐντὸς τῆς γωνίας.



Σχ. 206



Σχ. 207

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ κύκλου (Ο, R), αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς σημεῖον Σ ἐκτὸς τοῦ κύκλου καὶ φ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν (σχ. 207). Φέρομεν τὴν ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου ΣΒΓ λαμβάνομεν :

$$\widehat{AB\Gamma} = \varphi + \widehat{B\Gamma\Delta} \quad \eta$$

$$\varphi = \widehat{AB\Gamma} - \widehat{B\Gamma\Delta} = \frac{\widehat{AO\Gamma}}{2} - \frac{\widehat{BO\Delta}}{2}$$

ἄρα :

$$\varphi = \frac{\widehat{AO\Gamma} - \widehat{BO\Delta}}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A.

238. Δύο ἴσοι κύκλοι τέμνονται εἰς τὰ Α καὶ Β. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν αὐτοὺς ΓΑΔ καὶ ἐκ τοῦ Β φέρομεν κάθετον ΒΜ ἐπ' αὐτήν. Δείξατε ὅτι τὸ Μ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΓΔ.

239. Διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Α δύο ἐφαπτομένων κύκλων φέρομεν δύο τεμνοῦσας αὐτῶν. Δείξατε ὅτι αἱ δύο χορδαὶ ποὺ ὀρίζονται ἀπὸ τὰ δεύτερα σημεῖα τομῆς τῶν κύκλων μετὰ τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι παράλληλοι.

240. Δύο κύκλοι ἀκτίνων ρ καὶ 2ρ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ Α. Δείξατε ὅτι κάθε χορδὴ τοῦ μεγαλυτέρου ποὺ ἄγεται ἀπὸ τὸ Α διχοτομεῖται ἀπὸ τὸν μικρότερον κύκλον.

241. Μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς AB καὶ AG τριγώνου $AB\Gamma$ γράφομεν δύο κύκλους. Δείξατε ὅτι τὸ δεύτερον σημεῖον Δ τῆς τομῆς των εὐρύσκεται ἐπὶ τῆς $B\Gamma$ καὶ ὅτι ἡ $A\Delta$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $B\Gamma$.

242. Ἐάν A, B, Γ, Δ εἶναι τέσσαρα σημεῖα διαδοχικὰ ἐνὸς κύκλου καὶ K, Λ, M, N τὰ μέσα τῶν τόξων $\widehat{AB}, \widehat{B\Gamma}, \widehat{\Gamma\Delta}, \widehat{\Delta A}$, δείξατε ὅτι αἱ χορδαὶ KM καὶ ΛN τέμνονται καθέτως.

243. Μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς AB, AG τριγώνου $AB\Gamma$ γράφομεν δύο κύκλους. Ἀπὸ τὰ B καὶ Γ φέρομεν παραλλήλους χορδὰς $BD, \Gamma E$. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Δ, A, E κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

244. Κύκλος κέντρου K ἐφάπτεται εἰς ἄλλον κύκλον κέντρου Λ εἰς τὸ Α καὶ εὐθείας (ϵ) εἰς τὸ Β. Ἐάν ἡ BA τέμνῃ τὸν δεύτερον κύκλον εἰς τὸ Γ , δείξατε ὅτι εἶναι $\Gamma\Lambda \perp (\epsilon)$.

245. Μὲ διάμετρον τὴν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου γράφομεν κύκλον. Ἐάν οὗτος τέμνῃ τὴν ὑποτείνουσαν εἰς σημεῖον M , δείξατε ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον M διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς τρίτης πλευρᾶς.

B'.

246. Δίδεται κύκλος κέντρου O καὶ διάμετρος AB αὐτοῦ. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα OG κάθετον ἐπὶ τὴν AB καὶ τυχοῦσαν χορδὴν $\Gamma\Delta$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ E . Ἐάν ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Δ τέμνῃ τὴν AB εἰς τὸ Z , δείξατε ὅτι εἶναι $Z\Delta = ZE$.

247. Δύο κύκλοι τέμνονται εἰς τὰ A καὶ B καὶ ἔστω M τυχὸν σημεῖον τῆς κοινῆς χορδῆς AB . Διὰ τοῦ M θεωροῦμεν τυχοῦσαν τέμνουσαν τοὺς κύκλους εἰς τὰ σημεῖα Γ, Δ, E, Z διαδοχικῶς. Δείξατε ὅτι $\widehat{\Gamma A\Delta} = \widehat{E B Z}$.

248. Ἐστω κύκλος κέντρου K καὶ A, B, Γ τρία σημεῖα αὐτοῦ. Φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὸν κύκλον εἰς τὰ Δ καὶ E . Δείξατε ὅτι ἡ ΔE εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος AO , ὅπου O εἶναι τὸ ἔγκεντρον τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

249. Ἐπ' εὐθείας (δ) λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ . Μὲ διαμέτρους τὰς AB καὶ $\Gamma\Delta$ γράφομεν δύο κύκλους καὶ θεωροῦμεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην EZ αὐτῶν, ὅπου τὸ E εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου διαμέτρου AB . Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι $AE, BE, \Gamma Z, \Delta Z$ τεμνόμεναι σχηματίζουν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ ἄλλη διαγώνιος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον.

250. Διὰ τοῦ ἐνὸς κοινοῦ σημείου A δύο τεμνομένων κύκλων θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν $BA\Gamma$ τέμνουσαν αὐτοὺς. Δείξατε ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ B καὶ Γ τέμνονται ὑπὸ γωνίαν σταθεράν.

251. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ Α. Θεωροῦμεν χορδὴν $B\Gamma$ τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τοῦ μικροτέρου εἰς τὸ Δ. Δείξατε ὅτι ἡ $A\Delta$ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $\widehat{BA\Gamma}$.

252. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Α. Θεωροῦμεν χορδὴν $B\Gamma$ τοῦ ἐνὸς κύκλου, ἡ ὁποία προεκτεινομένη ἐφάπτεται τοῦ ἄλλου εἰς τὸ Δ. Δείξατε ὅτι ἡ $A\Delta$ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας \widehat{A} τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

208. Όρισμός. Έν πολύγωνον $AB\Gamma \dots N$ καλεῖται **έγγεγραμμένον** (ἢ **έγγράψιμον**) εἰς κύκλον τότε καὶ μόνον τότε ὅταν αἱ κορυφαὶ τοῦ εἶναι (ἢ δύνανται νὰ εἶναι) σημεῖα ἐνὸς κύκλου.

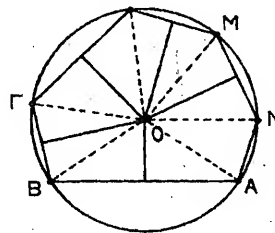
Έκ τοῦ ὁρισμοῦ ἔπεται ὅτι αἱ πλευραὶ ὡς καὶ αἱ διαγώνιοι τοῦ πολυγώνου εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου.

Αἱ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου καλοῦνται **ὁμοκυκλικά** ἢ **ὁμοκύκλια** σημεῖα.

Ὁ κύκλος καλεῖται **περιγεγραμμένος** περὶ τὸ πολύγωνον.

209. Θεώρημα. Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ἓν πολύγωνον $AB\Gamma \dots N$ μὲ n πλευρὰς εἶναι ἑγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O, R) , εἶναι αἱ $n-1$ μεσοκάθετοι τῶν $n-1$ πλευρῶν τοῦ νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις. i) Εἶναι ἀναγκαία. Ἐστω τὸ ἑγγεγραμμένον πολύγωνον $AB\Gamma \dots N$ εἰς τὸν κύκλον (O, R) . Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τοῦ εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου, ἔπεται ὅτι ἡ μεσοκάθετος ἐκάστης διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον O τοῦ κύκλου (σχ. 208). Ἄρα τὸ θεώρημα ἰσχύει.



Σχ. 208

ii) Εἶναι ἱκανή. Ἐστω ὅτι τοῦ πολυγώνου $AB\Gamma \dots MN$ αἱ μεσοκάθετοι τῶν $n-1$ πλευρῶν τοῦ $AB, B\Gamma, \dots, MN$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου O . Τότε τὸ σημεῖον τοῦτο, ὡς ἀνήκον εἰς ἐκάστην τῶν μεσοκαθέτων τούτων θὰ ἰσαπέχῃ ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς, ἥτοι θὰ εἶναι :

$$(1) \quad OA = OB, \quad OB = O\Gamma, \dots, OM = ON$$

Έκ τῶν σχέσεων (1) ἔπεται ὅτι :

$$OA = OB = O\Gamma = \dots = ON$$

Ἄρα, ἐὰν μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἐκ μιᾶς κορυφῆς γραφῇ κύκλος, οὗτος θὰ διέλθῃ δι' ὅλων τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου, ἐπομένως τὸ πολύγωνον εἶναι ἑγγράψιμον εἰς κύκλον.

Πόρισμα I. Κάθε τρίγωνον εἶναι ἑγγράψιμον εἰς κύκλον τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εὐρίσκεται εἰς τὴν τομὴν τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν τοῦ (τὸ κέντρον τοῦ κύκλου λέγεται **περίκεντρον** (§ 158)).

Πόρισμα II. Διὰ τριῶν σημείων μὴ κειμένων ἐπὶ εὐθείας εἰς καὶ μόνον εἰς κύκλος διέρχεται, διότι ἓν εἶναι τὸ περίκεντρον τοῦ τριγώνου μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα αὐτά.

Πόρισμα III. Ἐὰν δύο κύκλοι ἔχουν τρία κοινὰ σημεῖα, τότε ταυτίζονται.

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

210. Θεώρημα. Ἀναγκαία καὶ ἰκανὴ συνθήκη ἵνα ἔν κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, εἶναι δύο ἀπέναντι γωνίαι τοῦ νὰ εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἀπόδειξις. i) Εἶναι ἀναγκαία. Ἐστω τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον κέντρου Ο (σχ. 209). Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΒ καὶ ΟΔ. Ἡ γωνία $\widehat{A} = \omega$ εἶναι ἐγγεγραμμένη. Ἀρα ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίκεντρος θὰ εἶναι $\widehat{DOB} = 2\omega$. Ὀμοίως ἡ γωνία $\widehat{\Gamma} = \varphi$ εἶναι ἐγγεγραμμένη. Ἀρα ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίκεντρος θὰ εἶναι $\widehat{BOD} = 2\varphi$. Ἀλλὰ $2\omega + 2\varphi = 4^\circ$, Ἀρα: $\omega + \varphi = 2^\circ$, ἥτοι: $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2^\circ$

ii) Εἶναι ἰκανή. Ἐστω ὅτι εἰς τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι:

$$(1) \quad \widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2^\circ \iff \widehat{BAx} + \widehat{\Gamma} = 2^\circ$$

Θεωροῦμεν τὸν κύκλον, ὁ ὁποῖος ὀρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Β, Γ καὶ Δ. Ἀν αὐτὸς διέρχεται διὰ τοῦ Α, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη. Ἀν ὁμως δὲν διέρχεται διὰ τοῦ Α θὰ τέμνῃ τὴν ΔΑ εἰς σημεῖον Α', ὁπότε τὸ τετράπλευρον Α'ΒΓΔ θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένον.

Ἀρα:

$$(2) \quad \widehat{BA'x} + \widehat{\Gamma} = 2^\circ$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἐπεταὶ ὅτι $\widehat{BAx} + \widehat{\Gamma} = \widehat{BA'x} + \widehat{\Gamma} \Rightarrow \widehat{BAx} = \widehat{BA'x}$.

Ἐξ αὐτῆς ὁμως ἐπεταὶ $AB \parallel A'B$, ὅπερ ἄτοπον.

Ἀρα ὁ κύκλος ποὺ διέρχεται διὰ τῶν Β, Γ καὶ Δ κατ' ἀνάγκην θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Α. Ἀρα τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον.

211. Θεώρημα. Ἀναγκαία καὶ ἰκανὴ συνθήκη ἵνα ἔν κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, εἶναι μία ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς ἐσωτερικὴν.

Ἀπόδειξις. i) Εἶναι ἀναγκαία. Ἐστω ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 210) εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Τότε θὰ εἶναι:

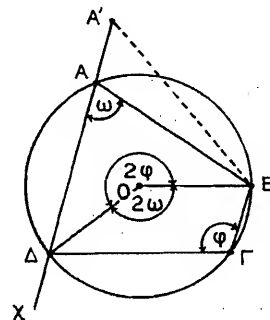
$$(1) \quad \widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2^\circ$$

Ἐπίσης ὁμως εἶναι:

$$(2) \quad \widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma_1} = 2^\circ$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἐπεταὶ

$$\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma_1} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{\Gamma_1}$$



Σχ. 209

ΤΡΑΠΕΖΙΟΝ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΝ ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ

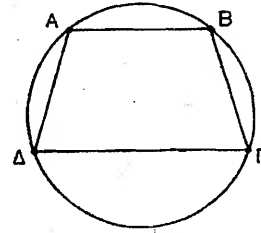
213. Θεώρημα. Ἐάν ἐν τραπέζιον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, εἶναι ἰσοσκελές καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$, μὲ $AB \parallel \Gamma\Delta$ (σχ. 212). Αἱ παράλληλοι χορδαὶ AB καὶ $\Gamma\Delta$ ὀρίζουν ἐντὸς τῆς ζώνης αὐτῶν δύο ἴσα τόξα $\widehat{B\Gamma}$ καὶ $\widehat{A\Delta}$ (§ 181). Ἀρα καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν χορδαὶ εἶναι ἴσαι, ἥτοι $B\Gamma = A\Delta$ καὶ ἐπομένως τὸ τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω τὸ ἰσοσκελές τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$. Τοῦτο ὡς ἰσοσκελές, ἔχει τὰς παρὰ ἑκάστην βάσιν τοῦ γωνίας ἴσας, ἥτοι :

$$(1) \quad \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}$$

Ἐπὶ πλέον, λόγῳ τῶν παραλλήλων $AB \parallel \Gamma\Delta$, ἔχει $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2^\circ$. Ἡ τελευταία, λόγῳ τῆς σχέσεως (1), γράφεται $\widehat{B} + \widehat{\Delta} = 2^\circ$. Ἀρα τὸ τραπέζιον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ὡς ἔχον δύο ἀπέναντι γωνίας τοῦ παραπληρωματικῆς.



Σχ. 212

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

253. Δείξατε ὅτι κάθε παραλληλόγραμμον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον εἶναι ὀρθογώνιον.

254. Ἀπὸ σημείου O κείμενον ἐκτὸς κύκλου κέντρου K φέρομεν τὴν OK καὶ τὸ ἐφαπτόμενον τμήμα OA . Ἐκ τοῦ O θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν (δ) καὶ ἐκ τοῦ K φέρομεν $KB \perp (\delta)$. Δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον ποὺ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα K, A, B, O εἶναι ἐγγράψιμον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ.

255. Δύο κύκλοι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B . Διὰ τῶν A καὶ B φέρομεν ἀνὰ μίαν τέμνουσαν αὐτοὺς $\Gamma A \Delta$ καὶ $E B Z$. Ἐάν τὰ Γ καὶ E εἶναι σημεῖα τοῦ ἑνὸς κύκλου, καὶ Δ καὶ Z τοῦ ἄλλου δείξατε ὅτι $\Gamma E \parallel \Delta Z$.

256. Ἐάν ἀπὸ σημείου M ἀχθοῦν κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας \widehat{XOY} , τὰ σημεῖα τομῆς ἑκάστης καθέτου μὲ τὴν ἄλλην πλευράν, τὰ συμμετρικὰ τοῦ M ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας καὶ τὸ σημεῖον O , εἶναι ὁμοκυκλικά σημεῖα.

257. Ἐάν $AB\Gamma\Delta$ εἶναι τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ $BE, \Gamma Z$ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς $\Gamma\Delta, AB$ ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι $EZ \parallel A\Delta$.

Β'.

258. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου AB . Λαμβάνομεν δύο ἴσα τόξα $\widehat{B\Gamma} = \widehat{\Gamma\Delta}$ μικρότερα τεταρτοκυκλίου καὶ σημεῖον E τοῦ τόξου $\widehat{A\Delta}$. Ἐάν αἱ χορδαὶ $A\Gamma$ καὶ BE τέμνονται εἰς τὸ O , αἱ δὲ $A\Delta$ καὶ ΓE εἰς τὸ Z δείξατε ὅτι: α) τὸ τετράπλευρον $AEZO$ εἶναι ἐγγράψιμον, β) τὸ O ἰσαπέχει ἀπὸ τὴν AB καὶ ἀπὸ τὸ Z .

259. Δίδεται κύκλος κέντρου K και χορδή AB αὐτοῦ. Ἀπὸ τὸ μέσον Γ τοῦ τόξου \widehat{AB} ἄγομεν χορδὰς $\Gamma\Delta$ καὶ ΓE , οὕτως ὥστε αὗται νὰ τέμνουν τὴν χορδὴν AB εἰς τὰ H καὶ Z ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον ΔEZH εἶναι ἐγγράφιστον.

260. Δείξατε ὅτι τὸ ὀρθικὸν τρίγωνον παντὸς τριγώνου $AB\Gamma$ (δηλαδὴ τὸ τρίγωνον μὲ κορυφὰς τοὺς πῶδας τῶν ὑψῶν τοῦ $AB\Gamma$) ἔχει ὡς διχοτόμους τὰ ὑψη τοῦ $AB\Gamma$.

261. Ἐκ τυχόντος σημείου M χορδῆς AB ἐνὸς κύκλου φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία διέρχεται δι' αὐτοῦ. Ἐὰν ἡ κάθετος αὕτη τέμνῃ τὰς ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ποὺ ἄγονται ἀπὸ τὰ A καὶ B εἰς τὰ Γ καὶ Δ , δείξατε ὅτι $M\Gamma = M\Delta$.

262. Δείξατε ὅτι τὰ συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέντρου ἐνὸς τριγώνου ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς του κεῖνται ἐπὶ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

263. Ὁ κύκλος, ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ δύο ἀπέναντι κορυφὰς ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τραπεζίου καὶ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.

264. Δίδεται κύκλος κέντρου K καὶ σημεῖον A ἐκτὸς αὐτοῦ. Φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν $AB\Gamma$ καὶ ἐκ τοῦ A κάθετον ἐπὶ τὴν KA . Αἱ ἐφαπτόμεναι ποὺ ἄγονται εἰς τὰ B καὶ Γ τέμνουν τὴν κάθετον ταύτην εἰς τὰ Δ καὶ E . Δείξατε ὅτι: α) τὰ τετράπλευρα $KBA\Delta$ καὶ $K\Gamma EA$ εἶναι ἐγγράφισμα β) $A\Delta = AE$.

265. Δίδονται δύο ἐφεξῆς καὶ ἴσαι γωνίαι \widehat{XOy} καὶ \widehat{XOz} καὶ σημεῖον M ἐσωτερικὸν τῆς \widehat{XOy} . Ἐκ τοῦ M φέρομεν κάθετους $MA, MB, M\Gamma$ ἐπὶ τὰς Ox, Oy, Oz ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι: α) τὰ σημεῖα M, A, B, Γ, O εἶναι ὁμοκυκλικά, β) $BA = B\Gamma$.

ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΠΕΡΙ ΚΥΚΛΟΝ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

214. Ὅρισμός. Ἐν πολύγωνον καλεῖται περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (ἢ περιγράφιστον) τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ ἐφάπτονται (ἢ δύνανται νὰ ἐφάπτονται) ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Ὁ κύκλος λέγεται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ πολύγωνον.

215. Θεώρημα. Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ἔν πολύγωνον μὲ n πλευρὰς εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον εἶναι αἱ $n - 1$ διχοτόμοι τῶν $n - 1$ γωνιῶν του νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις. i) Εἶναι ἀναγκαία. Ἐστω τὸ πολύγωνον $A_1A_2\dots A_n$ τὸ ὁποῖον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον κέντρου O (σχ. 213). Ἐπειδὴ ἐκάστη γωνία τοῦ πολυγώνου ἔχει πλευρὰς, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται τοῦ κύκλου, ἔπεται ὅτι ἐκάστη διχοτόμος γωνίας διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου O τοῦ κύκλου (§ 201). Ἄρα ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία.

ii) Εἶναι ἱκανή. Ἐστω ὅτι τοῦ πολυγώνου $A_1A_2\dots A_n$ αἱ $n - 1$ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{A_1}, \widehat{A_2}, \dots, \widehat{A_{n-1}}$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου O . Ἐκ τοῦ O θεωροῦμεν τὰς κάθετους OB_1, OB_2, \dots, OB_n ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου. Τὸ σημεῖον O , ὡς ἀνήκον εἰς τὰς $n - 1$ διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{A_1}, \widehat{A_2}, \dots, \widehat{A_{n-1}}$, θὰ ἰσαπέχῃ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ἐκάστης γωνίας, ἥτοι :

$$(1) \quad OB_1 = OB_2, \quad OB_2 = OB_3, \dots, OB_{n-1} = OB_n.$$

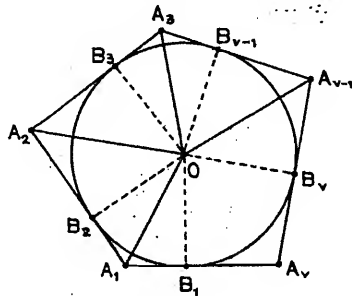
Ἐκ τῶν σχέσεων (1) ἔπεται ὅτι :

$$OB_1 = OB_2 = \dots = OB_n$$

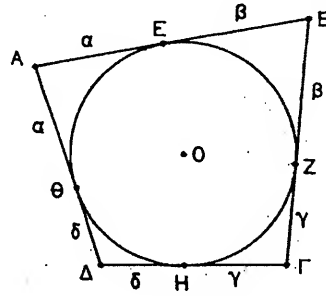
Ἐπομένως ἂν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον O καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ἀποστάσεων τούτων, ἔστω τὴν OB_1 , γράψωμεν κύκλον, οὗτος θὰ ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. Ἄρα τὸ πολύγωνον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον.

Πόρισμα. Κάθε τρίγωνον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εὐρίσκεται εἰς τὴν τομὴν τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του (ἐγκέντρον § 163).

216. Θεώρημα. Ἵνα ἓν τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον περὶ κύκλον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν του.



Σχ. 213



Σχ. 214

Ἀπόδειξις. Ἐστω $AB\Gamma\Delta$ ἓν τετράπλευρον περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (O, R) καὶ ἔστωσαν E, Z, H καὶ Θ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν του μετὰ τοῦ κύκλου (σχ. 214). Τότε θὰ εἶναι (§ 201) :

$$AE = A\Theta = \alpha, \quad BE = BZ = \beta, \quad \Gamma Z = \Gamma H = \gamma \quad \text{καὶ} \quad \Delta H = \Delta\Theta = \delta.$$

Ἄρα θὰ εἶναι :

$$(1) \quad AB + \Gamma\Delta = AE + BE + \Gamma H + \Delta H = \alpha + \beta + \gamma + \delta \quad \text{καὶ}$$

$$(2) \quad A\Delta + B\Gamma = A\Theta + \Delta\Theta + BZ + \Gamma Z = \alpha + \delta + \beta + \gamma$$

Τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) τὰ τελευταῖα μέλη εἶναι ἴσα, ἄρα καὶ τὰ πρῶτα θὰ εἶναι ἴσα, ἥτοι :

$$(3) \quad AB + \Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma.$$

Ἀντιστροφή. Ἄν εἰς τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ ἰσχύῃ ἡ σχέσις (3), θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι περιγράψιμον περὶ κύκλον.

i) Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι $AB > A\Delta$. Τότε, ἡ σχέσις (3) γράφεται :

$$(4) \quad AB - A\Delta = B\Gamma - \Gamma\Delta$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται ὅτι εἶναι $B\Gamma > \Gamma\Delta$.

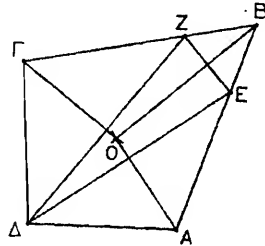
Ἐπὶ τῶν δύο μεγαλυτέρων πλευρῶν AB καὶ $B\Gamma$ (σχ. 215) σχηματίζομεν τὰς διαφορὰς τῶν μελῶν τῆς σχέσεως (4), λαμβάνοντες ἐπ' αὐτῶν τμή-

ματα $AE = AD$ και $\Gamma Z = \Gamma\Delta$ ἀντιστοίχως. Τότε τὰ τρίγωνα ΔDE και $\Gamma\Delta Z$ εἶναι ἰσοσκελῆ, ἐνῶ ἡ σχέσις (4) γράφεται

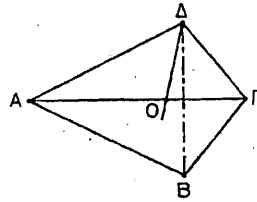
$$\begin{aligned} AB - AE &= BF - \Gamma Z & \eta \\ BE &= BZ \end{aligned}$$

Ἐξ αὐτῆς φαίνεται ὅτι και τὸ τρίγωνον BEZ εἶναι ἰσοσκελές.

Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν \widehat{A} , \widehat{B} και $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, θὰ εἶναι μεσοκάθετοι τῶν τμημάτων ΔE , EZ , και ΔZ ἀντιστοίχως, λόγω τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, ἥτοι μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΔEZ . Ἄρα (§ 158) θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου O . Τότε, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, τὸ τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον περὶ κύκλον.



Σχ. 215



Σχ. 216

ii) Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι $AB = AD$ (σχ. 216). Τότε ἐκ τῆς σχέσεως (3) ἔπεται ὅτι θὰ εἶναι και $\Gamma\Delta = B\Gamma$, συνεπῶς τὰ τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$ εἶναι ἰσοσκελῆ. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν \widehat{A} και $\widehat{\Gamma}$, ὡς μεσοκάθετοι τοῦ αὐτοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $B\Delta$, συμπίπτουν μετὰ τὴν AG . Ἡ διχοτόμος μιᾶς τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου, ἔστω τῆς $\widehat{\Delta}$ τέμνει τὴν AG εἰς τὸ O και οὕτω αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν \widehat{A} , $\widehat{\Delta}$ και $\widehat{\Gamma}$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου O . Ἄρα τὸ τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον (§ 215).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

266. Κάθε παραλληλόγραμμον περιγεγραμμένον περὶ κύκλον εἶναι ῥόμβος.

267. Εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο καθέτων πλευρῶν του ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς ὑποτείνουσας και τῆς διαμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

268. Ἐὰν ἐν τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$ μετὰ βάσεις τὰς AB και $\Gamma\Delta$ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον κέντρου K , δείξατε ὅτι: α) τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν δύο βάσεων εἶναι ἄκρα τῆς αὐτῆς διαμέτρου και β) $\widehat{BK\Gamma} = 1^\circ$.

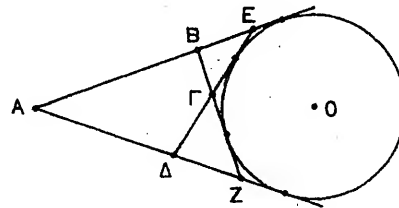
269. Ἐὰν ἰσοσκελοῦς τραπέζιου ἡ διάμεσος ἰσοῦται μετὰ μιαν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του, δείξατε ὅτι τοῦτο εἶναι περιγράψιμον περὶ κύκλον.

270. Ἐὰν οἱ δύο κύκλοι οἱ ἐγγεγραμμένοι εἰς τὰ δύο τρίγωνα εἰς τὰ ὁποῖα τετράπλευρον διαιρεῖται ὑπὸ μιᾶς διαγωνίου του ἐφάπτονται μεταξύ των, δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον περὶ κύκλον.

ΠΑΡΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

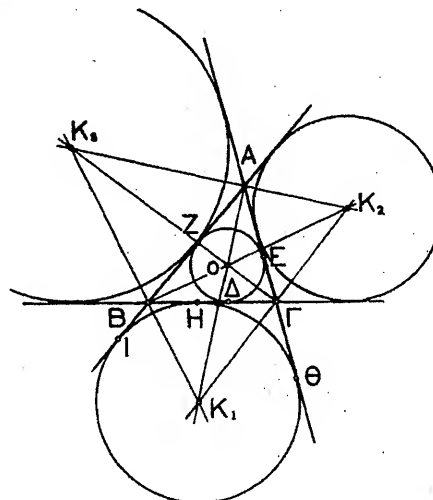
217. Όρισμός. "Εν πολύγωνον καλεῖται **παρεγγεγραμμένον** εἰς κύκλον τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν αἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τοῦ ἢ καὶ μερικαὶ τῶν πλευρῶν τοῦ (πάντως ὅχι ὅλαι), ἐφάπτονται ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Ὁ κύκλος καλεῖται **παρεγγεγραμμένος** εἰς τὸ πολύγωνον. Τὸ πολύγωνον δὲν περιβάλλει τὸν κύκλον, οὔτε περιέχεται ἐντὸς αὐτοῦ, δύναται δὲ νὰ εἴναι κυρτὸν ἢ μὴ κυρτὸν. Τὸ τετράπλευρον π.χ. ΑΒΓΔ (σχ. 217) εἶναι κυρτὸν καὶ παρεγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον κέντρου Ο, ἐνῶ τὸ ΑΕΓΖ εἶναι μὴ κυρτὸν καὶ παρεγγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον. Ὁμοίως τὰ τρίωνα ΑΕΔ καὶ ΑΒΖ εἶναι παρεγγεγραμμένα εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.



Σχ. 217

"Εν τρίγωνον ἔχει πάντοτε τρεῖς παρεγγεγραμμένους κύκλους, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα ὀρίζονται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ (§ 165). Ἀπὸ τὰ ἴδια σημεῖα διέρχεται καὶ ἀνὰ μία τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων. Ὁ παρεγγεγραμμένος κύκλος κέντρου K_1 (σχ. 218) εὐρισκόμενος ἐντὸς τῆς γωνίας \hat{A} , καλεῖται **παρεγγεγραμμένος** εἰς τὴν γωνίαν \hat{A} ἢ εἰς τὴν πλευρὰν α. Ὁμοίως οἱ κύκλοι κέντρων K_2 καὶ K_3 καλοῦνται **παρεγγεγραμμένοι** εἰς τὰς γωνίας \hat{B} καὶ $\hat{\Gamma}$ ἢ εἰς τὰς πλευρὰς β καὶ γ ἀντιστοίχως.



Σχ. 218

Τὰ κέντρα K_1, K_2, K_3 τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων καλοῦνται **παράκεντρα** (§ 165).

218. Θεώρημα. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἂν εἶναι Δ, Ε καὶ Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῶν πλευρῶν α, β καὶ γ ἀντιστοίχως καὶ Η, Θ καὶ Ι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ εἰς τὴν πλευρὰν α παρεγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῆς πλευρᾶς α καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν β καὶ γ ἀντιστοίχως, τότε εἶναι :

i) $AE = AZ = \tau - \alpha$ ii) $A\Theta = AI = \tau$ iii) $E\Theta = ZI = \alpha$
καὶ iv) $\Delta H = |\beta - \gamma|$ ὅπου $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$.

Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν ὅτι (σχ. 218):

- (1) $AE = AZ, BD = BZ, \Gamma\Delta = \Gamma E$
 ως εφαιπτόμενα τμήματα από σημείον πρὸς κύκλον (§ 201). Τότε θὰ εἶναι καί:
 i) $AZ + ZB + BD + \Delta\Gamma + \Gamma E + EA = 2\tau$ καὶ λόγω τῶν σχέσεων (1) αὐτῇ γράφεται: $2(AZ + BD + \Delta\Gamma) = 2\tau$, ἢ $AZ + B\Gamma = \tau$, ἔρα $AZ = \tau - B\Gamma$ ἢ
 $AE = AZ = \tau - \alpha$
 Ὅμοίως εὐρίσκομεν ὅτι εἶναι $BD = BZ = \tau - \beta$ καὶ $\Gamma\Delta = \Gamma E = \tau - \gamma$.
 ii) $AB + BH + \Gamma H + \Delta\Gamma = 2\tau$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $BH = BI$ καὶ $\Gamma H = \Gamma\Theta$, ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται:
 $AB + BI + \Delta\Gamma + \Gamma\Theta = 2\tau$ ἢ $AI + A\Theta = 2\tau$. Ἀλλὰ εἶναι
 $AI = A\Theta$. Ἄρα $2AI = 2\tau$ ἢ $AI = \tau$ ἢ
 $A\Theta = AI = \tau$.
 iii) $ZI = AI - AZ = \tau - (\tau - \alpha) = \alpha$. Ὅμοίως εὐρίσκομεν ὅτι εἶναι $E\Theta = \tau - (\tau - \alpha) = \alpha$. Ἄρα:
 $E\Theta = ZI = \alpha$
 iv) Ἐστω $\gamma > \beta$. Τότε θὰ εἶναι:
 $\Delta H = BD - BH = (\tau - \beta) - BI = (\tau - \beta) - (AI - AB) = (\tau - \beta) - (\tau - \gamma) = \gamma - \beta$. Ἐάν ᾗτο $\gamma < \beta$ ὁμοίως θὰ ὑπελογίζετο ὅτι εἶναι $\Delta H = \beta - \gamma$.
 Γενικῶς ἔχομεν $\Delta H = |\beta - \gamma|$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

B'.

271. Αἱ κορυφαὶ B καὶ Γ τριγώνου ABΓ, τὸ ἔγκεντρον αὐτοῦ καὶ τὸ παράκεντρον ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πλευρὰν α, εἶναι ὁμοκυκλικά σημεῖα.
 272. Ἐάν ὁ παρεγγεγραμμένος εἰς τὴν πλευρὰν α κύκλος τριγώνου ABΓ ἐφάπτεται τῆς BΓ εἰς τὸ Δ καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν AB καὶ ΑΓ εἰς τὰ Ε καὶ Ζ, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, συναρτήσῃ τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ABΓ.
 273. Ἐάν ἐν κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι παρεγγεγραμμένον εἰς κύκλον, δείξατε ὅτι ἡ διαφορὰ δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ.
 274. Ἐάν Ο καὶ Κ εἶναι τὰ κέντρα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τρίγωνον ABΓ καὶ τοῦ παρεγγεγραμμένου εἰς τὴν πλευρὰν α, δείξατε ὅτι ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ τριγώνου διχοτομεῖ τὸ τμήμα OK.
 275. Ἡ διάκεντρος τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰς πλευράς β καὶ γ τριγώνου ABΓ σχηματίζει μετὰ τὴν BΓ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν γωνιῶν \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$.
 276. Τριγώνου ABΓ θεωροῦμεν τοὺς παρεγγεγραμμένους κύκλους εἰς τὰς πλευράς β καὶ γ. Ἐάν οὗτοι ἐφάπτωνται τῶν προεκτάσεων τῆς BΓ εἰς τὰ Δ καὶ Ε, δείξατε ὅτι εἶναι $\Delta E = \beta + \gamma$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ

Α'.

277. Τρίγωνον ABΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΔ καὶ τὸ ὕψος ΓΕ. Δείξατε ὅτι εἶναι $BD \parallel \Gamma E$.
 278. Δείξατε ὅτι ἡ διχοτόμος γωνίας τριγώνου, διτοχοτομεῖ καὶ τὴν γωνίαν τοῦ

ύψους και της διαμέτρου του περιγεγραμμένου περί τὸ τρίγωνον κύκλου, ποὺ ἄγονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφὴν.

279. Τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον κέντρου O . Φέρομεν τὴν χορδὴν $\Gamma\Delta$ κάθετον ἐπὶ τὴν $B\Gamma$. Ἐὰν H εἶναι τὸ ὀρθόκέντρον τοῦ τριγώνου δείξατε ὅτι εἶναι $AH = \Gamma\Delta$.

280. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἐὰν Δ καὶ E εἶναι τὰ μέσα τῶν τόξων \widehat{AB} καὶ $\widehat{A\Gamma}$, δείξατε ὅτι ἡ χορδὴ ΔE τριχοτομεῖται ἀπὸ τὰς πλευρὰς AB καὶ $A\Gamma$.

281. Ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$, ὅπου δὲν εὐρίσκεται τὸ A , φέρομεν τὴν AM καὶ ἐκ τοῦ B φέρομεν $BE \perp AM$, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν $M\Gamma$ εἰς τὸ Δ . Ἐὰν Z εἶναι τὸ μέσον τῆς $B\Gamma$, δείξατε ὅτι εἶναι:

$$\alpha) MB = M\Delta, \quad \beta) EZ // = \frac{\Gamma\Delta}{2}.$$

282. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$. Θεωροῦμεν κύκλον, ὁ ὁποῖος διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς B καὶ τέμνει τὰς πλευρὰς AB καὶ $B\Gamma$ εἰς τὰ Δ καὶ E . Ἄλλος κύκλος διέρχεται διὰ τῶν σημείων Γ καὶ E καὶ τέμνει τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ Z . Ἐὰν Θ εἶναι τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῶν δύο κύκλων, δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον $A\Delta\Theta Z$ εἶναι ἐγγράψιμον.

283. Τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἐκ τοῦ μέσου M τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$ ἄγομεν χορδὴν $M\Delta$ παράλληλον τῆς $A\Gamma$. Δείξατε ὅτι $M\Delta = AB$.

284. Ἐὰν Δ , E , Z εἶναι τρία τυχόντα σημεῖα τῶν πλευρῶν $B\Gamma$, $A\Gamma$, AB ἀντιστοίχως τριγώνου $AB\Gamma$, δείξατε ὅτι οἱ περιγεγραμμένοι κύκλοι περὶ τὰ τρίγωνα $A\Delta Z$, $B\Delta Z$ καὶ $\Gamma\Delta E$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

285. Εἰς κάθε κυρτὸν τετράπλευρον, τὰ κέντρα τῶν τεσσάρων κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν τοῦ ἀνὰ τρεῖς, εἶναι ὁμοκυκλικά σημεῖα.

286. Ἐστω κύκλος κέντρου K καὶ AB , $\Gamma\Delta$ δύο κάθετοι χορδαί. Δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποῦ αἱ πλευραὶ εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου εἰς τὰ ἄκρα τῶν χορδῶν, εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

287. Ἐὰν ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ κύκλος ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἰς τὰ A' , B' , Γ' , νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου $A'B'\Gamma'$ συναρτήσει τῶν γωνιῶν \widehat{A} , \widehat{B} , $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

B.

288. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ ἔαν K εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ Δ τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας \widehat{A} τέμνει τὸν περιγεγραμμένον κύκλον, δείξατε ὅτι εἶναι $B\Delta = \Delta K$.

289. Ἐστω $AB\Gamma\Delta$ κυρτὸν τραπέζιον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ $A\Delta$ καὶ $B\Gamma$ τέμνονται εἰς τὸ E , αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ A καὶ Γ τέμνονται εἰς τὸ Z . Δείξατε ὅτι: α) $\widehat{E} = \widehat{Z}$ καὶ β) ἡ EZ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου.

290. Ἐὰν αἱ διαγώνιοι ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τετραπλεύρου τέμνονται καθέτως, δείξατε ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ μίαν πλευρὰν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς τοῦ τετραπλεύρου.

291. Ἐὰν αἱ διαγώνιοι κυρτοῦ τετραπλεύρου τέμνονται καθέτως, δείξατε ὅτι τὰ

έχνη τῶν καθέτων, πού ἄγονται ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου, εἶναι ὁμοκυκλικά σημεῖα.

292. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἐκ τῶν B καὶ Γ φέρομεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Δ . Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν κάθετα τμήματα ΔE , ΔZ , ΔH ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Δείξατε ὅτι τὸ ΔEZH εἶναι παραλληλόγραμμον.

293. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος καὶ τυχὸν σημεῖον M τοῦ ἐλάσσονος τόξου $B\Gamma$. Δείξατε ὅτι $MA = MB + M\Gamma$.

294. Ἐφ' ἐκάστης πλευρᾶς ἑνὸς ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ὡς χορδῆς, γράφομεν ἓνα κύκλον. Οἱ τέσσαρες οὗτοι κύκλοι, τεμνόμενοι ἀνὰ δύο διαδοχικοὶ ὀρίζουν τέσσαρα σημεῖα, τὰ ὁποῖα δείξατε ὅτι εἶναι ὁμοκυκλικά.

295. Εἰς τὸ ἄκρον A μιᾶς διαμέτρου AB κύκλου φέρομεν ἐφαπτομένην, ἡ ὁποία τέμνεται ἀπὸ τὴν προέκτασιν μιᾶς χορδῆς $B\Gamma$ εἰς τὸ Δ . Εἰς τὴν πρόεκτασιν τῆς $A\Gamma$ (πρὸς τὸ μέρος τοῦ A ἢ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ) λαμβάνομεν τμήμα $AE = AD$ καὶ ἀπὸ τοῦ E φέρομεν παράλληλον τῆς AB , ἡ ὁποία τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ Z . Δείξατε ὅτι εἶναι $BZ = BA$.

296. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν πού σχηματίζουν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τετραπλεύρου τέμνονται καθέτως, συναντοῦν δὲ τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου εἰς σημεῖα, τὰ ὁποῖα εἶναι κορυφαὶ ῥόμβου.

297. Ἀπὸ ἐσωτερικῶν σημείων M τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν καθετοὺς MH , MZ , $M\Theta$ ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Ὁ κύκλος πού ὀρίζεται ἀπὸ τὰ H , Z , Θ τέμνει ἐκ δευτέρου τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς τὰ H' , Z' , Θ' ἀντιστοίχως. Ἐάν M' εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ M ὡς πρὸς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τούτου, δείξατε ὅτι αἱ $M'H'$, $M'Z'$, $M'\Theta'$ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

298. Ἐφ' ἐκάστης πλευρᾶς τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ κατασκευάζομεν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα $AB\Gamma'$, $B\Gamma A'$, $\Gamma A B'$. Δείξατε ὅτι τὰ τμήματα AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$ εἶναι ἴσα, καὶ ὅτι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

299. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Δείξατε ὅτι τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τῆς κορυφῆς A καὶ τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ $AB\Gamma$ ὀρίζουν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$.

300. Ἐάν O εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τρίγωνον $AB\Gamma$, H τὸ ὀρθόκεντρον καὶ M τὸ μέσον τῆς $B\Gamma$, δείξατε ὅτι $AH = 2 \cdot OM$.

301. Ἄν ἡ διαγώνιος $A\Gamma$ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ εἶναι διάμετρος καὶ φέρωμεν τὰς $AE \perp BA$ καὶ $\Gamma Z \perp BA$, δείξατε ὅτι εἶναι $BE = \Delta Z$.

302. Εὐθεῖα τοῦ Euler. Εἰς κάθε τρίγωνον, τὸ ὀρθόκεντρον H , τὸ κέντρον βάρους M καὶ τὸ περίκεντρον K κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, εἶναι δὲ $HM = 2 \cdot MK$.

303. Κύκλος τοῦ Euler (τῶν ἐννέα σημείων). Εἰς κάθε τρίγωνον, τὰ μέσα τῶν πλευρῶν, τὰ ἔχνη τῶν ὑψῶν καὶ τὰ μέσα τῶν τμημάτων πού συνδέουν τὸ ὀρθόκεντρον μὲ ἐκάστην κορυφὴν εἶναι ὁμοκυκλικά σημεῖα.

304. Ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου τοῦ Euler ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου, τὸ δὲ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ Euler εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας τοῦ Euler.

305. Δείξατε ὅτι αἱ ἀκτῖνες τοῦ εἰς τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου πού ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου, εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθοκέντρου τριγώνου.

306. Ἡ εὐθεῖα πού διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον M τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον N τοῦ τμήματος AH , ἐνθα H εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν πού διέρχεται ἀπὸ τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν κορυφῶν B καὶ Γ .

307. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος. Σχηματίζομεν: α)

τὸ ὀρθογώνιον ΔEZ , β) τὸ τρίγωνον $A'B'T'$ με κορυφὰς τὰ συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέντρου ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ $AB\Gamma$ καὶ γ) τὸ τρίγωνον $\Theta I\Lambda$ με πλευρὰς τὰς ἐφαπτομένας τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου εἰς τὰ A, B, Γ . Δείξατε ὅτι τὰ τρία ταῦτα τρίγωνα ἔχουν πλευρὰς παραλλήλους.

308. Δείξατε ὅτι εἰς κάθε ἐγγράψιμον τετράπλευρον, αἱ εὐθεῖαι ποὺ ἄγονται ἀπὸ τὸ μέσον ἐκάστης πλευρᾶς κάθετοι ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

309. Τὸ ἔρκεντρον καὶ τὰ τρία παράκεντρα παντὸς τριγώνου, ἀνὰ δύο ὀρίζουν ἕξ εὐθύγραμμα τμήματα. Δείξατε ὅτι τὰ μέσα τῶν τμημάτων τούτων κεῖνται ἐπὶ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου.

310. Εἰς κάθε τρίγωνον δείξατε ὅτι ἀληθεύει ἡ σχέσις: $R_\alpha + R_\beta + R_\gamma = 4R + \rho$ ἔνθα $R_\alpha, R_\beta, R_\gamma$ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων R ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ρ ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

311. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$). Δείξατε ὅτι εἶναι:

α) $R_\beta + R_\gamma = 2R$ καὶ β) $R_\alpha = R_\beta + R_\gamma + \rho$.

312. Εὐθεῖα τοῦ **Simson**. Τὰ ἴχνη τῶν καθέτων, ποὺ ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τρίγωνον κύκλου ἐπὶ τὰς πλευρὰς του, κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

313. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἄν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα τοῦ **Simson**, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτό, διχοτομεῖ τὸ τμήμα MH , ὅπου H τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ $AB\Gamma$.

314. Δείξατε ὅτι τὰ συμμετρικὰ ἐνὸς σημείου M τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τρίγωνον ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, κεῖνται ἐπ' εὐθείας διερχομένης ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρον H τοῦ τριγώνου καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν τοῦ **Simson** ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ M .

315. Ἀπὸ σημεῖον M τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τρίγωνον κύκλου, φέρομεν εὐθείας ἴσον κεκλιμένας ὡς πρὸς τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Δείξατε ὅτι τὰ τρία σημεῖα, κατὰ τὰ ὁποῖα αὗται τέμνουν ἀντιστοίχως τὰς τρεῖς πλευρὰς, κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

316. Με διαμέτρους τὰς χορδὰς MA, MB, MG ἐνὸς κύκλου γράφομεν τρεῖς κύκλους, οἱ ὁποῖοι ἀνὰ δύο τέμνονται ἐκ δευτέρου εἰς τὰ σημεῖα Δ, E, Z . Δείξατε ὅτι τὰ Δ, E, Z κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

317. Ἐστω $AB\Gamma\Delta$ τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, τοῦ ὁποῖου αἱ διαγώνιοι AG καὶ BD τέμνονται καθέτως εἰς τὸ Θ . Ἐκ τοῦ Θ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, αἱ ὁποῖαι τὰς τέμνουν εἰς τὰ σημεῖα E, Z, H, I ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι:

α) Τὸ τετράπλευρον $EZH I$ εἶναι ἐγγράψιμον,

β) τὸ τετράπλευρον $EZH I$ εἶναι περιγράψιμον,

γ) ὁ κύκλος ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ $EZH I$ διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ $AB\Gamma\Delta$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

A' ΚΑΙ B' ΒΙΒΛΙΟΥ

219. Ὅρισμοί. Γεωμετρικὸν πρόβλημα καλεῖται μία πρότασις, εἰς τὴν ὁποίαν ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἐν γεωμετρικὸν σχῆμα με προκαθωρισμένης ιδιότητος, ἐπὶ τῇ βάσει δεδομένων στοιχείων.

Λύσις ἢ ἐπίλυσις τοῦ γεωμετρικοῦ προβλήματος καλεῖται ὁ τρόπος (ἡ

διαδικασία), διὰ τοῦ ὁποίου ἐπιτυγχάνεται ἡ κατασκευὴ τοῦ ζητουμένου σχήματος.

Γεωμετρικὴ λύσις ἐνὸς προβλήματος καλεῖται ἡ λύσις αὐτοῦ, ἡ ὁποία ἐπιτυγχάνεται διὰ μόνης τῆς χρήσεως τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων, ἥτοι τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.

Ἀπόδειξις τοῦ προβλήματος καλεῖται ἡ λογικὴ σειρὰ σκέψεων, ἡ ὁποία βασιζομένη ἐπὶ γνωστῶν γεωμετρικῶν προτάσεων, μᾶς πείθει ὅτι τὸ κατασκευασθὲν σχῆμα ἔχει τὰ προκαθορισμένα (δεδομένα) στοιχεῖα.

Διερεύνησις τοῦ προβλήματος καλεῖται ὁ ἔλεγχος τῶν συνθηκῶν, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ πληροῦν τὰ δεδομένα μόνον στοιχεῖα τοῦ προβλήματος, οὕτως ὥστε τὸ πρόβλημα νὰ ἐπιδέχεται λύσιν.

Στοιχειώδη γεωμετρικά προβλήματα ἐπιλυόμενα διὰ μόνης τῆς χρήσεως τοῦ κανόνος εἶναι τὰ ἀκόλουθα :

- i) Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ δύο δεδομένων σημείων.
- ii) Νὰ ἀχθῇ ἡμιευθεῖα, τῆς ὁποίας δίδεται ἡ ἀρχὴ καὶ ἐν σημεῖον τῆς.
- iii) Νὰ ἀχθῇ εὐθύγραμμος τμήμα μὲ δεδομένα ἄκρα.

Διὰ μόνης τῆς χρήσεως τοῦ διαβήτου δύναται νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα :

Νὰ γραφῇ κύκλος μὲ δεδομένον κέντρον καὶ δεδομένην ἀκτῖνα.

Ἐπίσης ὁ διαβήτης δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ ὡς μεταφορεὺς εὐθυγράμμων τμημάτων (διαστημόμετρον).

Αἱ ἀνωτέρω στοιχειώδεις γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ θὰ θεωροῦνται ὅπως δῆποτε γνωσταί. Διὰ τοῦ συνδυασμοῦ αὐτῶν καὶ μόνον, θὰ ἐπιτυγχάνωμεν τὰς γεωμετρικὰς λύσεις τῶν διαφόρων προβλημάτων.

Ὁρισμένον γεωμετρικὸν πρόβλημα καλεῖται ἐν πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἐπιδέχεται μίαν τοῦλάχιστον γεωμετρικὴν λύσιν, ἢ ἐν πάσῃ περιπτώσει, πεπερασμένον πλῆθος λύσεων.

Ἀδύνατον γεωμετρικὸν πρόβλημα καλεῖται ἐν πρόβλημα, τὸ ὁποῖον δὲν ἐπιδέχεται γεωμετρικὴν λύσιν. Ἀδύνατα π.χ. προβλήματα εἶναι τὰ ἀκόλουθα :

- i) Νὰ τριχοτομηθῇ τυχούσα γωνία.
- ii) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον μὲ πλευρὰς 2α, 3α, 6α.

Ἀόριστον γεωμετρικὸν πρόβλημα καλεῖται ἓνα πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἐπιδέχεται ἄπειρον πλῆθος γεωμετρικῶν λύσεων. Ἀόριστον πρόβλημα εἶναι π.χ. τὸ πρόβλημα «νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη ἀπὸ ἐν δεδομένον σημεῖον».

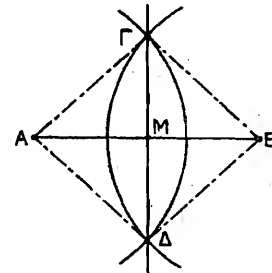
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

220. Πρόβλημα 1. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ μεσοκάθετος δεδομένου εὐθυγράμμου τμήματος AB.

Κατασκευή. Ἀρκεῖ νὰ εὗρωμεν δύο σημεῖα τῆς ζητουμένης μεσοκα-

θέτου. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν τὴν ιδιότητά της, ὅτι τὰ σημεῖα της καὶ μόνον αὐτὰ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα A καὶ B τοῦ τμήματος. Μὲ κέντρον λοιπὸν τὸ A καὶ ἀκτῖνα $R > \frac{AB}{2}$ γράφομεν κύκλον (σχ. 219). Τὸ αὐτὸ ἐπαναλαμβάνομεν μὲ κέντρον τὸ B καὶ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα R. Οἱ δύο κύκλοι τέμνονται εἰς δύο σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶναι ἡ ζητούμενη μεσοκάθετος.

Ἀπόδειξις. Κατ' ἀρχὰς παρατηροῦμεν ὅτι οἱ δύο κύκλοι τέμνονται, διότι ἐκ τῆς σχέσεως $R > \frac{AB}{2}$ ἐπεταὶ $AB < 2R$ ἢ $0 < AB < 2R$ ἢ $R - R < AB < R + R$, ἥτοι ἡ διάκεντρος αὐτῶν περιέχεται μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων των. Διὰ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν κύκλων Γ καὶ Δ ἔχομεν τότε: $GA = GB = R$ καὶ $DA = DB = R$. Ἀρα τὰ Γ καὶ Δ ἀνήκουν εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος AB, τὴν ὁποῖαν καὶ ὁρίζουν.



Σχ. 219

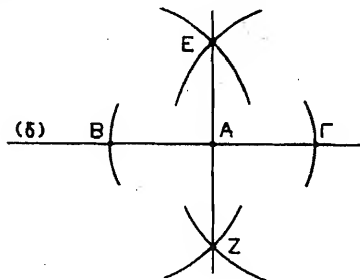
Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν λύσιν.

221. Πρόβλημα 2. Δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος AB νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον αὐτοῦ.

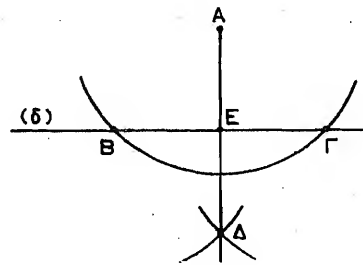
Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον. Ἡ μεσοκάθετος ΓΔ τέμνει τὸ τμήμα AB εἰς σημεῖον M, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον του (σχ. 219).

222. Πρόβλημα 3. Δοθείσης εὐθείας (δ) καὶ σημείου A αὐτῆς, νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐκ τοῦ A ἐπὶ τὴν (δ).

Κατασκευή. Ἐκατέρωθεν τοῦ A ἐπὶ τῆς εὐθείας (δ) λαμβάνομεν δύο σημεῖα B καὶ Γ. οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $AB = AG$ (σχ. 220). Τότε τὸ A εἶναι



Σχ. 220



Σχ. 221

μέσον τοῦ BG. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ φέρωμεν τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος BG, ἡ ὁποία θὰ διέλθῃ ἐκ τοῦ A. Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα 1.

223. Πρόβλημα 4. Δοθείσης εὐθείας (δ) νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτὴν διὰ σημείου A κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς.

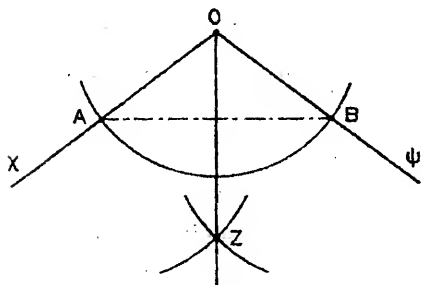
Κατασκευή. Με κέντρον τὸ A γράφομεν κύκλον με μόνην ἀπαίτησιν αὐτὸς νὰ τέμνῃ εἰς δύο σημεῖα B καὶ Γ τὴν εὐθεῖαν (δ) (τοῦτο πάντοτε εἶναι δυνατόν). Ἦδη τὸ A εἶναι σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος $B\Gamma$ (σχ. 221). Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ καὶ ἓν δεύτερον σημεῖον Δ αὐτῆς (πρόβλημα 1). Ἡ $A\Delta$ εἶναι ἡ ζητούμενη κάθετος ἐπὶ τὴν (δ) .

224. Πρόβλημα 5. Νὰ διχοτομηθῇ δοθεῖσα γωνία \widehat{xOy} .

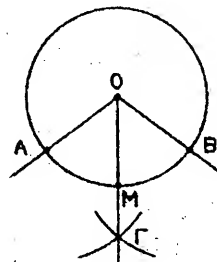
Κατασκευή. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς Ox καὶ Oy λαμβάνομεν δύο ἴσα τμήματα $OA = OB$ (σχ. 222). Τότε, τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου OAB , ἡ μεσοκάθετος ἐπὶ τὴν AB θὰ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας τοῦ \widehat{AOB} (§ 112). Τῆς μεσοκαθέτου μάλιστα αὐτῆς γνωρίζομεν καὶ ἓν σημεῖον τῆς, τὸ O . Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ καὶ ἓν δεύτερον σημεῖον τῆς Z (πρόβλημα 1). Ἡ AZ εἶναι ἡ ζητούμενη διχοτόμος.

Ἀπόδειξις. Ἡ OZ εἶναι μεσοκάθετος τῆς βάσεως AB τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου OAB , ἄρα καὶ διχοτόμος τῆς \widehat{AOB} .

Διερεύνησις. Πάντοτε ὑπάρχει μία λύσις.



Σχ. 222



Σχ. 223

225. Πρόβλημα 6. Νὰ διχοτομηθῇ δοθὲν κυκλικὸν τόξον \widehat{AB} .

Κατασκευή. Ἀρκεῖ νὰ διχοτομηθῇ ἡ ἀντίστοιχος αὐτοῦ ἐπίκεντρος γωνία \widehat{AOB} . Ἡ διχοτόμος θὰ τέμνῃ τὸ τόξον εἰς σημεῖον M , τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι τὸ μέσον του (σχ. 223). Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον.

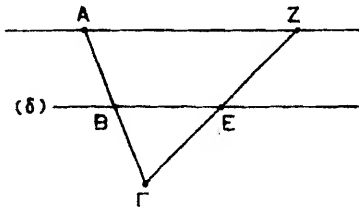
226. Πρόβλημα 7. Διὰ δοθέντος σημείου A νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (δ) .

Κατασκευή. Ἐκ τοῦ A φέρομεν τυχούσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν (δ) εἰς τὸ B καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν σημεῖον Γ , τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $B\Gamma = BA$ (σχ. 224). Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν ἄλλην εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν (δ) εἰς τὸ E καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν $EZ = E\Gamma$. Ἡ AZ εἶναι ἡ ζητούμενη παράλληλος.

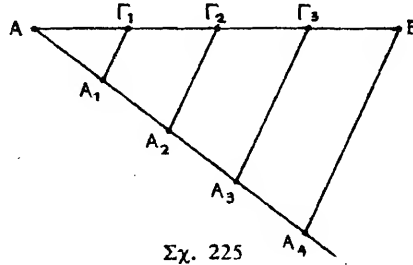
Ἀπόδειξις. Κατ' ἀρχὰς αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ A . Κατόπιν παρατη-

ροῦμεν ὅτι τοῦ τριγώνου ΓAZ τὰ σημεῖα B καὶ E εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ΓA καὶ ΓZ ἐκ κατασκευῆς. Ἀρα θὰ εἶναι $AZ \parallel BE$.

Διερεύνησις. Πάντοτε ὑπάρχει μία λύσις, ἐφ' ὅσον τὸ A δὲν ἀνήκει εἰς τὴν (δ) .



Σχ. 224



Σχ. 225

227. Πρόβλημα 8. Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα AB εἰς n ἴσα τμήματα.

Κατασκευή. Ἐκ τοῦ ἄκρου A τοῦ τμήματος AB φέρομεν τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν σημεῖα A_1, A_2, \dots, A_n , οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n$ (σχ. 225). Οὕτω τὸ τμήμα AA_n εἶναι διηρημένον εἰς n ἴσα τμήματα. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν BA_n (εἰς τὸ σχῆμα εἶναι $n = 4$) καὶ ἐκ τῶν διαιρετικῶν σημείων A_1, A_2, A_3, \dots , φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν BA_n . Αὗται τέμνουν τὸ δοθὲν τμήμα εἰς τὰ $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{n-1}$ ἀντιστοίχως, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ ζητούμενα διαιρετικά σημεῖα.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ εἶναι $AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n$, ἐπεταί ὅτι, (§ 157) θὰ εἶναι καὶ $A\Gamma_1 = \Gamma_1\Gamma_2 = \dots = \Gamma_{n-1}B$.

Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται πάντοτε μίαν λύσιν.

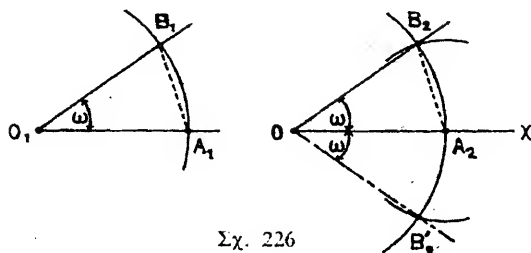
228. Πρόβλημα 9. Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν ω .

Κατασκευή. Καθιστῶμεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω ἐπίκεντρον γράφοντες τόξον μὲ τυχοῦσαν ἀκτῖνα R , τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς πλευράς της εἰς τὰ σημεῖα A_1 καὶ B_1 (σχ. 226). Μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν O τυχοῦσης ἡμιευθείας Ox καὶ μὲ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα R , γράφομεν κύκλον, ὁ ὁποῖος ὀρίζεται ἐπὶ τῆς Ox σημεῖον A_2 . Ἐν συνεχείᾳ, μὲ κέντρον τὸ σημεῖον A_2 καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν χορδὴν A_1B_1 ἢ ὁποῖα ὀρίζεται ἐπὶ τῆς δοθείσης γωνίας ω , γράφομεν κύκλον, ὁ ὁποῖος τέμνει τὸν (O, R) εἰς δύο σημεῖα B_2 καὶ B_2' . Ἡ γωνία $B_2\hat{O}A_2$ εἶναι ἡ ζητούμενη.

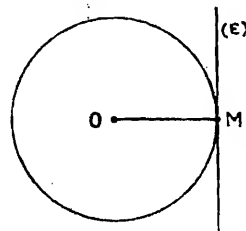
Ἀπόδειξις. Τὰ τόξα $\widehat{A_1B_1}$ καὶ $\widehat{A_2B_2}$ εἶναι ἴσα ὥς τόξα ἴσων κύκλων εἰς τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν ἴσαι χορδαὶ A_1B_1 καὶ A_2B_2 ἐκ κατασκευῆς. Τότε αἱ γωνίαι ω καὶ $A_2\hat{O}B_2$ εἶναι ἴσαι ὥς ἐπίκεντροι γωνίαι ἴσων κύκλων βαίνουσαι εἰς ἴσα τόξα.

Διερεύνησις. Ἡ γωνία $A_2\hat{O}B_2'$ δὲν ἀποτελεῖ μίαν δευτέραν λύσιν τοῦ προβλήματος, διότι εἶναι συμμετρικὴ τῆς $A_2\hat{O}B_2$ ὥς πρὸς τὴν διάκεντρον OA_2 .

Ἄρα εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν. Κατόπιν τούτου τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν μόνον λύσιν.



Σχ. 226



Σχ. 227

229. Πρόβλημα 10. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ σημεῖον M αὐτοῦ. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον M .

Κατασκευή. Ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν $(ε)$ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα OM εἰς τὸ σημεῖον M . Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα 3. Ἡ ἀπόδειξις εἶναι προφανής. Λύσις ὑπάρχει πάντοτε μία (σχ. 227).

230. Πρόβλημα 11. Δίδεται εὐθεῖα $(ε)$ καὶ σημεῖον A αὐτῆς. Νὰ γραφῇ κύκλος δοθείσης ἀκτίνος R ἐφαπτόμενος τῆς $(ε)$ εἰς τὸ A .

Κατασκευή. Ἐκ τοῦ σημείου A φέρομεν εὐθεῖαν $(δ)$ κάθετον ἐπὶ τὴν $(ε)$ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν σημεῖον O τοιοῦτον, ὥστε $OA = R$. Ὁ κύκλος μὲ κέντρον O καὶ ἀκτῖνα R εἶναι ὁ ζητούμενος.

Ἀπόδειξις. Πράγματι εἶναι ὁ ζητούμενος διότι ἔχει ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν R , ἐφάπτεται δὲ καὶ τῆς εὐθείας $(ε)$ εἰς τὸ σημεῖον A , διότι ἡ ἀκτίς τοῦ OA εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $(ε)$ (σχ. 228).

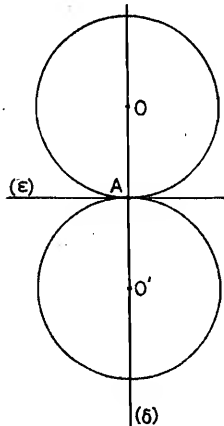
Διερεύνησις. Δυνάμεθα ἐπὶ τῆς $(δ)$ νὰ λάβωμεν καὶ δεύτερον σημεῖον O' τοιοῦτον ὥστε $O'A = R$, ὅπου τὸ A νὰ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος OO' . Ὁ κύκλος $(O'R)$ πληροῖ καὶ αὐτὸς τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος, ἐπομένως ὑπάρχουν πάντοτε δύο λύσεις.

Παρατήρησις. Τὸ πρόβλημα χαρακτηρίζεται ὡς πρόβλημα θέσεως καὶ ὄχι ὡς πρόβλημα μεγέθους. Διότι ἔπρεπε, γνωστὸς κύκλος ἀκτίνος R , νὰ τοποθετηθῇ εἰς κατάλληλον θέσιν ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν $(ε)$. Δι' αὐτὸ οἱ δύο κύκλοι κέντρων O καὶ O' , θεωροῦνται δύο λύσεις τοῦ προβλήματος, διότι, παρ' ὅτι εἶναι ἴσοι, ἐν τούτοις διαφέρει ἡ τοποθέτησις των ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν $(ε)$.

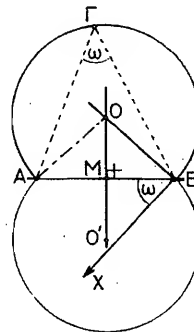
231. Πρόβλημα 12. Νὰ κατασκευασθῇ τόξον μὲ δεδομένα ἄκρα A , καὶ B , τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται δοθεῖσαν γωνίαν ω .

Κατασκευή. Εἰς τὸ ἓν ἄκρον τοῦ τμήματος AB , ἔστω εἰς τὸ B , κατασκευάζομεν ἡμιευθεῖαν Bx , ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μετὰ τοῦ AB γωνίαν ω . Εἰς τὸ σημεῖον B φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν Bx καὶ τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος AB , αἱ ὁποῖαι τεμνόμεναι ὀρίζουν σημεῖον O . Μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα τὴν OB γράφομεν τόξον \widehat{ATB} , τὸ ὁποῖον νὰ μὴ περιέχεται ἐντὸς τῆς γωνίας ω . Τὸ τόξον τοῦτο μὲ ἄκρα τὰ A καὶ B εἶναι τὸ ζητούμενον (σχ. 229).

Απόδειξις. Ἡ ἡμιευθεῖα Bx εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (O, OB) ὡς κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνος OB αὐτοῦ καὶ ἐπομένως ἡ γωνία ω , ὡς σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς χορδῆς AB καὶ τῆς ἐφαπτομένης Bx , εἶναι ἴση μετὰ τὴν ἐγγεγραμμένην εἰς τὸ τόξον γωνίαν (§ 205).



Σχ. 228



Σχ. 229

Διερεύνησις. Ἡ συμμετρία ὡς πρὸς ἄξονα τὴν AB μᾶς ἐξασφαλίζει καὶ ἐν ἄλλο τόξον \widehat{AB} ἴσον μετὰ τὸ πρῶτον καὶ μετὰ τὰ αὐτὰ ἄκρα, τοῦ ὁποῖου τὸ κέντρον O' εἶναι συμμετρικὸν τοῦ O ὡς πρὸς τὴν AB . Πάντοτε ὑπάρχουν τὰ δύο ταῦτα τόξα ἐφ' ὅσον ἡ γωνία ω εἶναι κυρτή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

318. Δίδεται εὐθύγραμμον τμήμα AB καὶ εὐθεῖα (ϵ) . Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς (ϵ) σημεῖον M ἰσαπέχον ἐκ τῶν A καὶ B .
319. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποῖου δίδεται ἡ πλευρὰ α .
320. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποῖου δίδεται ἡ διαγώνιος δ .
321. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τοῦ ὁποῖου δίδεται ἡ πλευρὰ λ .
322. Δίδεται κύκλος μετὰ ἄγνωστον κέντρον καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον του.
323. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ εὐθεῖα (ϵ) . Νὰ κατασκευασθῇ τὸ συμμετρικὸν τοῦ $AB\Gamma$ ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν (ϵ) .
224. Νὰ κατασκευασθῇ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος δοθέντος τριγώνου $AB\Gamma$.
325. Νὰ κατασκευασθῇ ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος δοθέντος τριγώνου $AB\Gamma$.
326. Δίδεται εὐθύγραμμον τμήμα $B\Gamma$ καὶ εὐθεῖα (ϵ) . Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς (ϵ) σημεῖον A , οὕτως ὥστε τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ νὰ ἔχῃ ἐκ τῆς κορυφῆς A δεδομένον ὕψος u .
327. Δίδεται γωνία \widehat{xOy} . Νὰ εὑρεθῇ ἐντὸς αὐτῆς σημεῖον Σ , τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας δεδομένην ἀπόστασιν α .

328. Δεδομένον εὐθύγραμμον τμήμα AB νὰ διαιρεθῇ εἰς 5 ἴσα τμήματα.
329. Δίδεται γωνία \widehat{XOY} . Ἐκ τῆς κορυφῆς O νὰ ἀχθῇ ἡμικυκλίᾳ Oz , τοιαύτη ὥστε ἡ Oy νὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας \widehat{XOz} .
330. Νὰ κατασκευασθῇ ἐφαπτομένη δοθέντος κύκλου (O, R) , παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (δ) .
331. Νὰ κατασκευασθῇ γωνία i) 60° , ii) 30° , iii) 45° .
332. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ξὸν μὲ δεδομένα ἄκρα A καὶ B , τὸ ὅποιον νὰ δέχεται γωνίαν 45° .

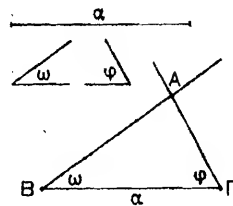
ΑΠΛΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

232. Πρόβλημα 13. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον $AB\Gamma$, ἐκ τῶν στοιχείων του α , $\widehat{B} = \omega$ καὶ $\widehat{\Gamma} = \varphi$ (ἥτοι ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὴν γωνιῶν).

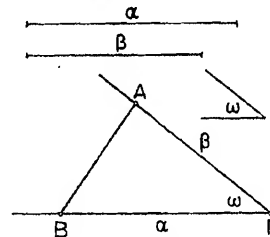
Κατασκευή. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τμήμα $B\Gamma = \alpha$ (σχ. 230). Μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα B καὶ Γ καὶ μὲ μίαν πλευρὰν τὰς ἡμικυκλείας $B\Gamma$ καὶ ΓB ἀντιστοίχως κατασκευάζομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς $B\Gamma$ γωνίας ἴσας μὲ ω καὶ φ ἀντιστοίχως. Αἱ ἄλλαι πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων τέμνονται εἰς σημεῖον A . Τότε τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ πράγματι εἶναι τὸ ζητούμενον διότι, ἐκ κατασκευῆς, ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Πάντοτε ὑπάρχει μία μόνον λύσις, ἐφ' ὅσον εἶναι $\omega + \varphi < 2\angle$.



Σχ. 230



Σχ. 231

233. Πρόβλημα 14. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐκ τῶν στοιχείων του α , β καὶ $\widehat{\Gamma} = \omega$ (ἥτοι ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τῆς περιεχομένης ὑπ' αὐτῶν γωνίας).

Κατασκευή. Μὲ κορυφὴν σημεῖον Γ κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ω καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς λαμβάνομεν τμήματα $\Gamma B = \alpha$, $\Gamma A = \beta$ καὶ φέρομεν τὴν AB . Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον (σχ. 231).

Ἀπόδειξις. Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ πράγματι εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι, ἐκ κατασκευῆς ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Πάντοτε ὑπάρχει μία μόνον λύσις, ἐφ' ὅσον εἶναι $\omega < 2\angle$.

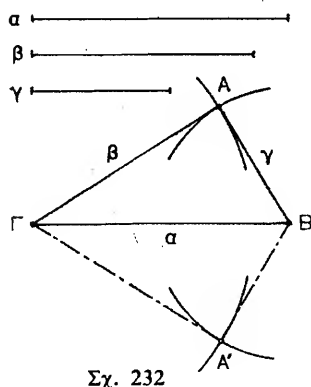
234. Πρόβλημα 15. Νά κατασκευασθῇ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐκ τῶν στοιχείων του α , β καὶ γ , (ἥτοι ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν του).

Κατασκευή. Ἐπὶ εὐθείας τινος λαμβάνομεν τμήμα $B\Gamma = \alpha$ (σχ. 232) καὶ γράφομεν τοὺς κύκλους (B, γ) καὶ (Γ, β) , οἱ ὅποιοι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον A . Φέρομεν τὰς AB καὶ $A\Gamma$. Τότε τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

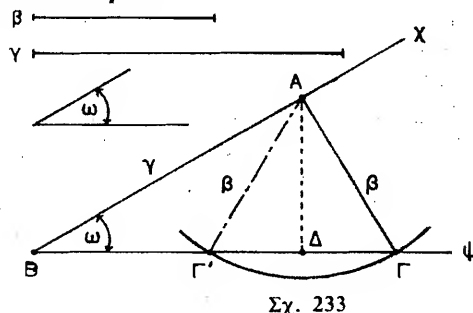
Ἀπόδειξις. Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ πράγματι εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἐκ κατασκευῆς ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Διὰ νὰ τέμνονται οἱ δύο κύκλοι εἰς τὸ σημεῖον A μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς διακέντρου $B\Gamma$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ (§ 115) νὰ εἶναι $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$. Ἡ συνθήκη αὕτη πάντοτε μᾶς ἐξασφαλίζει μίαν μόνον λύσιν. Διότι τὸ δεύτερον σημεῖον A' τῶν κύκλων δὲν δίδει δευτέραν λύσιν τοῦ προβλήματος, δεδομένου ὅτι τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B\Gamma$ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν $B\Gamma$ καὶ ἄρα εἶναι ἴσα.

235. Πρόβλημα 16. Νά κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ δύο πλευραὶ β καὶ γ καὶ ἡ γωνία $\widehat{B} = \omega$, ποὺ κεῖται ἀπέναντι τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δοθεισῶν πλευρῶν.



Σχ. 232



Σχ. 233

Κατασκευή. Μὲ κορυφὴν τὸ B κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{xBy} = \omega$ καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς Bx λαμβάνομεν τμήμα $BA = \gamma$ (σχ. 233). Μὲ κέντρον τὸ A καὶ ἀκτῖνα β γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν By εἰς τὸ σημεῖον Γ . Φέρομεν τὴν $A\Gamma$ καὶ τὸ κατασκευασθὲν τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

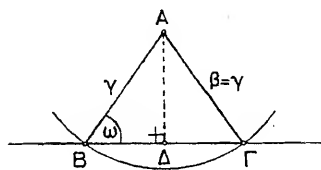
Ἀπόδειξις. Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἐκ κατασκευῆς ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Θεωροῦμεν τὴν κάθετον $A\Delta$ ἐκ τοῦ A ἐπὶ τὴν By . Τὸ τόξον (A, β) διὰ νὰ τέμνῃ τὴν By , πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\beta \geq A\Delta$. Διακρίνομεν τὰς ἐξῆς περιπτώσεις :

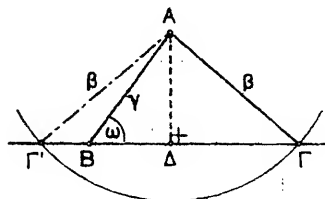
i) Ἐὰν εἶναι $\omega < 1^\circ$ καὶ $\beta = A\Delta$, τότε τὸ τόξον (A, β) ἐφάπτεται τῆς By εἰς τὸ Δ καὶ τότε τὸ Γ ταυτίζεται μὲ τὸ Δ . Ὑπάρχει λοιπὸν μία λύσις, ἥτοι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Delta$.

ii) Ἐάν εἶναι $\omega < 1^\circ$ καὶ $AD < \beta < \gamma$ (σχ. 233), τότε τὸ τόξον (A, β) τέμνει τὴν By εἰς τὰ δύο σημεῖα Γ καὶ Γ' καὶ ἐπομένως ὑπάρχουν δύο τρίγωνα διάφορα ἀλλήλων, τὰ $AB\Gamma$ καὶ $AB\Gamma'$, τὰ ὅποια ἔχουν τὰ δοθέντα στοιχεῖα. Ἄρα ἔχομεν δύο λύσεις.

iii) Ἐάν εἶναι $\omega < 1^\circ$ καὶ $\beta = \gamma$ τότε ὑπάρχει μία λύσις μόνον, τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοσκελές ($AB = A\Gamma$) (σχ. 234).



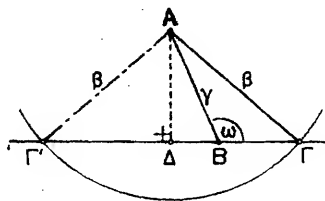
Σχ. 234



Σχ. 235

iv) Ἐάν εἶναι $\omega < 1^\circ$ καὶ $\beta > \gamma$, τότε ὑπάρχει μία μόνον λύσις, ἥτοι τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ (σχ. 235), διότι τὸ τρίγωνον $AB\Gamma'$ δὲν ἔχει τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω , ἀλλὰ τὴν παραπληρωματικὴν της.

v) Ἐάν εἶναι $\omega \geq 1^\circ$ καὶ $\beta > \gamma$, τότε ὑπάρχει μία λύσις, τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ (σχ. 236), διότι τὸ $AB\Gamma'$ δὲν ἔχει τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω . Ἐάν εἶναι $\beta < \gamma$, τότε δὲν ὑπάρχει λύσις.



Σχ. 236

Παρατήρησις. Ἐκ τῆς προηγουμένης κατασκευῆς ἐπεταὶ ὅτι ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ μίαν γωνίαν ἴσην, ἥ ὅποια δὲν περιέχεται μεταξύ τῶν ἴσων πλευρῶν, τὰ τρίγωνα δὲν εἶναι βέβαιον ὅτι εἶναι ἴσα. Διότι, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς περιπτώσεως ii τῆς διερευνήσεως, ὑπάρχουν δύο τρίγωνα ἄνισα μὲ τὰ αὐτὰ στοιχεῖα. Ἐάν ὅμως ἐπὶ πλέον ἔχομεν καὶ τὴν πληροφορίαν ὅτι ἡ πλευρὰ ἢ κειμένη ἀπέναντι τῆς δοθείσης γωνίας εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἄλλης δοθείσης πλευρᾶς (περίπτωσης iv καὶ v), αἴρεται ἡ ἀβεβαιότης καὶ τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. Διότι ἓνα μόνον τρίγωνον ὑπάρχει μὲ τὰ στοιχεῖα αὐτά.

Συμπληρωματικῶς ἐπομένως δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ ἓν ἀκόμη κριτήριον ἰσότητος δύο τριγώνων, τὸ ἐξῆς:

Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι ἴσα ἂν ἔχουν $A\Gamma = A'\Gamma' = \beta$, $AB = A'B' = \gamma$, $\widehat{B} = \widehat{B'} = \omega$ καὶ ἐπὶ πλέον ἰσχύει $\beta \geq \gamma$.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

236. Πρόβλημα 17. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ β καὶ γ .

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα 14 § 233 καὶ ἡ λύσις τοῦ θεωρεῖται γνωστή.

237. Πρόβλημα 18. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) ἐκ τῶν στοιχείων του α καὶ β .

Κατασκευή. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $A\gamma$ ὀρθῆς γωνίας $x\widehat{A}\gamma$ λαμβάνομεν τμήμα $A\Gamma = \beta$ (σχ. 237). Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν $A\chi$ εἰς σημεῖον B . Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Πράγματι τοῦτο ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Ὑπάρχει πάντοτε μία λύσις ἐφ' ὅσον εἶναι $\alpha > \beta$.

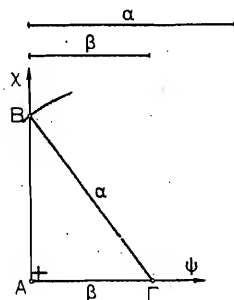
238. Πρόβλημα 19. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) ἐκ τῶν στοιχείων του β καὶ $\widehat{\Gamma} = \omega$.

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα 13 § 232 καὶ ἡ λύσις του θεωρεῖται γνωστή.

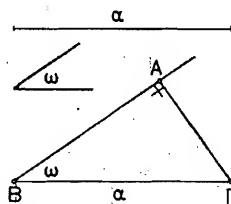
Παρατήρησις. Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἀνάγεται καὶ ἡ κατασκευὴ ὀρθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) ἐκ τῶν στοιχείων του β καὶ $\widehat{B} = \varphi$. Διότι τότε εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ γωνία $\widehat{\Gamma} = 1^\circ - \varphi$.

239. Πρόβλημα 20. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) ἐκ τῶν στοιχείων του α καὶ $\widehat{B} = \omega$.

Κατασκευή. Ἐπὶ εὐθείας τινος λαμβάνομεν τμήμα $B\Gamma = \alpha$ καὶ εἰς τὸ



Σχ. 237



Σχ. 238

ἄκρον B κατασκευάζομεν γωνίαν ω μὲ μίαν πλευράν τὴν $B\Gamma$ (σχ. 238). Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην πλευράν τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν τέμνει εἰς τὸ σημεῖον A . Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Πράγματι τοῦτο ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Διερεύνησις. Πάντοτε ὑπάρχει μία λύσις, ἐφ' ὅσον εἶναι $\omega < 1^\circ$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

333. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐκ τῶν στοιχείων του:

- i) $B\Gamma = \alpha$, $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{\Gamma} = 45^\circ$

ii) $\widehat{B\Gamma} = \alpha$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{\Gamma} = \omega$ (διερεύνησις).

334. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐκ τῶν στοιχείων του:

i) $AB = \lambda$, $B\Gamma = 2\lambda$, $\widehat{B} = 75^\circ$

ii) $AB = \frac{3\lambda}{2}$, $B\Gamma = \frac{4\lambda}{3}$, $\widehat{B} = 45^\circ$, ἔπου λ εἶναι δεδομένον τμήμα.

335. Δεδομένων τῶν τμημάτων λ καὶ μ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐκ τῶν στοιχείων του:

i) $\alpha = \frac{5\lambda}{4}$, $\beta = 2\lambda$, $\gamma = \frac{3\lambda}{2}$

ii) $\alpha = 3\lambda$, $\beta = 4\lambda$, $\gamma = \mu$ (διερεύνησις).

336. Δεδομένων τῶν τμημάτων λ καὶ μ νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον

$AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) ἐκ τῶν στοιχείων:

i) $\beta = 3\lambda$, $\gamma = \frac{5\lambda}{3}$

ii) $\alpha = 2\lambda$, $\beta = 3\mu$.

iii) $\beta = 4\lambda$, $\widehat{\Gamma} = 15^\circ$.

iv) $\alpha = 2\lambda$, $\widehat{B} = 75^\circ$

240. Ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος Κάθε γεωμετρικὴ κατασκευὴ θὰ θεωρηταὶ δυνατὴ ἐφ' ὅσον αὕτη ἀνάγεται εἰς τὰς ἐκτεθείσας προηγουμένως στοιχειώδεις γεωμετρικὰς κατασκευάς. Πολλὰς φορές ὁμοῦ συμβαίνει νὰ εἶναι δύσκολον νὰ ἀνκαλύψωμεν τὴν ἀκολουθίαν τῶν στοιχειωδῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν, διὰ τῶν ὁποίων θὰ φθάσωμεν ἀπὸ τὰ δεδομένα στοιχεῖα εἰς τὸ ζητούμενον σχῆμα. Διὰ τοῦτο θεωροῦμεν ὅτι τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται τοῦλάχιστον μίαν λύσιν καὶ κατασκευάζομεν ἓν σχῆμα, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ὅτι πληροῖ τὰ δεδομένα. Ἐν συνεχείᾳ προσπαθοῦμεν νὰ συνδέσωμεν τὰ βασικά στοιχεῖα τοῦ σχήματος μὲ τὰ δεδομένα εἰς ἡμᾶς στοιχεῖα, βάσει τῶν γνωστῶν θεωρημάτων. Ἡ ἐργασία αὕτη εἶναι συνήθως (ὅχι πάντοτε) εὐκολωτέρα καὶ καλεῖται ἀνάλυσις. Ὁ ἀντίστροφος δρόμος τῆς, ὁ ὁποῖος καλεῖται σύνθεσις, εἶναι αὐτὸς πού θὰ μᾶς ὁδηγήσῃ ἀπὸ τὰ δεδομένα στοιχεῖα εἰς τὸ ζητούμενον σχῆμα.

Διὰ εἶναι δυνατὸν ὁμοῦ νὰ συμβῇ αὐτό, θὰ πρέπει αἱ συνθῆκαι, αἱ ὁποῖαι μᾶς ὁδηγοῦν ἀπὸ τὸ ζητούμενον σχῆμα εἰς τὰ δεδομένα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος, νὰ εἶναι ἀντιστρέπται, ἥτοι νὰ εἶναι ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναὶ συνθῆκαι. Ἐάν τοῦτο διαπιστοῦται ἐκάστοτε κατὰ τὴν ἀνάλυσιν, τότε ἡ ἀπόδειξις θὰ ᾔτο λογικῶς περιττή. Ἐπειδὴ ὁμοῦ, συνήθως δὲν εἶναι εὐκόλον νὰ ἐλέγχωμεν, ἐάν αἱ συνθῆκαι, αἱ ὁποῖαι ὁδηγοῦν ἀπὸ τὸ ζητούμενον σχῆμα εἰς τὰ δεδομένα στοιχεῖα εἶναι ἱκαναί. διὰ τοῦτο ἐργαζόμεθα εἰς τὴν ἀνάλυσιν μόνον μὲ ἀναγκαίας συνθήκας καὶ ἐν συνεχείᾳ, μετὰ τὴν σύνθεσιν, εἶναι ἀπαραίτητος ἡ ἀπόδειξις.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι ἡ ἀνάλυσις εἶναι ἡ μέθοδος τῆς ἀναζητήσεως

τοῦ τρόπου ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος, ἐφαρμόζεται δὲ ἐπιτυχῶς, ὅχι μόνον εἰς τὰς γεωμετρικὰς κατασκευάς, ἀλλὰ καὶ εἰς τὰς ἀποδείξεις θεωρημάτων τῆς γεωμετρίας, γενικώτερον δὲ καὶ εἰς ἄλλους κλάδους τῶν μαθηματικῶν.

Ἡ ἀξία τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου, ὡς μεθόδου ἀναζητήσεως, θὰ φανῇ μὲ τὰ ἐπόμενα παραδείγματα.

241. Παράδειγμα 1ον. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ α , μ_α , ν_α .

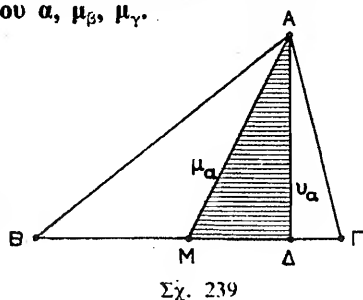
Ἀνάλυσις. Ἐστω $AB\Gamma$ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, $B\Gamma$ ἡ δοθεῖσα πλευρὰ (βάσις), AM ἡ δοθεῖσα διάμεσος καὶ AD τὸ δοθὲν ὕψος (σχ. 239). Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ADM δύναται ἐξ ἀρχῆς νὰ κατασκευασθῇ, διότι εἶναι γνωστὴ ἡ ὑποτείνουσα AM καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ τοῦ AD . Οὕτως ἐντοπίζεται ἡ κορυφὴ A τοῦ ζητουμένου τριγώνου. Αἱ κορυφαὶ B καὶ Γ θὰ ἀναζητηθοῦν ἐπὶ τῆς εὐθείας MD ἐκατέρωθεν τοῦ M εἰς ἀπόστασιν $\alpha/2$.

Σύνθεσις - Κατασκευὴ. Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ADM μὲ $AM = \mu_\alpha$ καὶ $AD = \nu_\alpha$ καὶ ἐκατέρωθεν τοῦ M ἐπὶ τῆς εὐθείας MD λαμβάνομεν τμήματα $MB = MG = \frac{\alpha}{2}$. Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

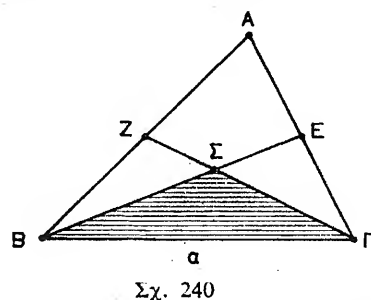
Ἀπόδειξις. Εἶναι προφανὲς ὅτι τοῦτο ἔχει τὰ δεδομένα στοιχεῖα, ἥτοι πλευρὰν $B\Gamma = BM + MG = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$, διάμεσον $AM = \mu_\alpha$ καὶ ὕψος $AD = \nu_\alpha$.

Διερεύνησις. Ὑπάρχει πάντοτε μία λύσις, ἐφ' ὅσον εἶναι $\nu_\alpha \leq \mu_\alpha$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ εἶναι $\nu_\alpha = \mu_\alpha$, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ $AB = A\Gamma$.

242. Παράδειγμα 2ον. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ α , μ_β , μ_γ .



Σχ. 239



Σχ. 240

Ἀνάλυσις. Ἐστω $AB\Gamma$ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, $B\Gamma = \alpha$ ἡ δοθεῖσα πλευρὰ, $BE = \mu_\beta$ καὶ $GZ = \mu_\gamma$ αἱ δύο διάμεσοι αὐτοῦ καὶ Σ τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῶν (σχ. 240). Εἰς τὸ τρίγωνον $\Sigma B\Gamma$ εἶναι γνωστὰ τὰ στοιχεῖα $B\Gamma = \alpha$, $\Sigma B = \frac{2}{3} BE = \frac{2}{3} \mu_\beta$ καὶ $\Sigma \Gamma = \frac{2}{3} GZ = \frac{2}{3} \mu_\gamma$. Τότε αὐτὸ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, ἐφ' ὅσον γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευρὰς του.

Σύνθεσις - Κατασκευή. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΣΒΓ μὲ πλευρὰς $BΓ = \alpha$, $\Sigma B = \frac{2}{3} \mu_\beta$, $\Sigma\Gamma = \frac{2}{3} \mu_\gamma$. Προεκτείνομεν τὴν ΣΒ ἀπὸ τὸ ἄκρον Σ καὶ εἰς τὴν προέκτασίν της λαμβάνομεν τμήμα $\Sigma E = \frac{\Sigma B}{2} = \frac{1}{3} \mu_\beta$. Φέρομεν τὴν ΓΕ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $EA = EG$. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Τοῦτο ἔχει $BΓ = \alpha$. Ἡ ΒΕ ἔχει μῆκος $BE = B\Sigma + \Sigma E = \frac{2}{3} \mu_\beta + \frac{1}{3} \mu_\beta = \mu_\beta$ καὶ εἶναι ἐκ κατασκευῆς διάμεσος, διότι ἐλήφθη $EA = EG$. Ἡ εὐθεῖα ΣΓ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Τὸ σημεῖον Σ τῆς διαμέσου ΒΕ, ποὺ ἀπέχει ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ΒΕ, εἶναι κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου (§ 162). Συνεπῶς εἶναι σημεῖον καὶ τῆς ἐκ τοῦ Γ διαμέσου. Ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι διάμεσος, ἐπὶ πλέον δὲ εἶναι $\Gamma\Sigma = \frac{2}{3} \mu_\gamma$ ἄρα $\Gamma Z = \mu_\gamma$, διότι τὸ Σ εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου.

Διερεύνησις. Διὰ νὰ ὑπάρχῃ μία λύσις πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχῃ τὸ τρίγωνον ΣΒΓ. Ἡ συνθήκη ποὺ ἐξασφαλίζει τὴν ὑπαρξιν τοῦ ΣΒΓ εἶναι (§ 115).

$$\left| \frac{2}{3} \mu_\beta - \frac{2}{3} \mu_\gamma \right| < \alpha < \frac{2}{3} \mu_\beta + \frac{2}{3} \mu_\gamma \iff$$

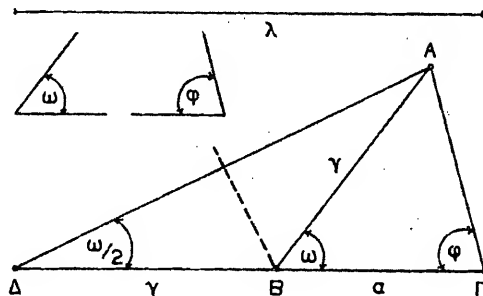
$$|\mu_\beta - \mu_\gamma| < \frac{3}{2} \alpha < \mu_\beta + \mu_\gamma$$

243. Παράδειγμα 3ον. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων του: $\widehat{B} = \omega$, $\widehat{\Gamma} = \varphi$ καὶ τοῦ ἀθροίσματος $\alpha + \gamma = \lambda$ τῶν δύο πλευρῶν του.

Ἀνάλυσις. Ἐστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον (σχ. 241). Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΓΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμήμα $B\Delta = BA = \gamma \Rightarrow \Gamma\Delta = \alpha + \gamma = \lambda$. Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἐκ κατασκευῆς ἰσοσκελὲς \Rightarrow

$$(1) \quad \widehat{B\Delta A} = \widehat{BA\Delta}$$

Ἡ γωνία $\widehat{B} = \omega$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΔ, εἶναι $\omega = \widehat{B\Delta A} + \widehat{BA\Delta}$. Ἡ τελευταία, λόγῳ τῆς σχέσεως (1)



Σχ. 241

τμ
μεν
γιν
εἰς
θὰ

244. Παράδειγμα 4ον. Ἀπὸ δοθέν σημείου νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη πρὸς δοθέντα κύκλον.

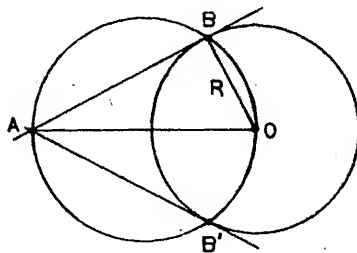
Ἀνάλυσις. Ἐστω A τὸ δοθέν σημεῖον καὶ (O, R) ὁ δοθεὶς κύκλος (σχ. 242). Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ σημείου ἐπαφῆς B . Μία συνθήκη, τὴν ὁποῖαν πρέπει νὰ πληροῖ τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸν κύκλον (O, R) . Μία δευτέρα συνθήκη, τὴν ὁποῖαν πρέπει νὰ πληροῖ τὸ σημεῖον B , εἶναι ἡ γωνία \widehat{ABO} νὰ εἶναι ὀρθή.

Ἄρα τὸ ἄγνωστὸν σημεῖον B , πρέπει νὰ εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ κύκλου διαμέτρου AO .

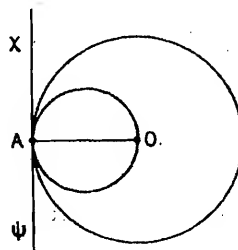
Σύνθεσις - Κατασκευή. Μὲ διάμετρον τὴν AO γράφομεν κύκλον, ὁ ὁποῖος τέμνει τὸν (O, R) εἰς τὸ σημεῖον B . Ἡ εὐθεῖα AB εἶναι ἡ ζητούμενη ἐφαπτομένη.

Ἀπόδειξις. Ἡ AB εἶναι πράγματι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (O, R) διότι εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα OB εἰς τὸ ἄκρον B αὐτῆς καὶ ἐπὶ πλέον διέρχεται διὰ τοῦ A . Ἄρα εἶναι ἡ ζητούμενη.

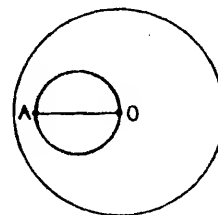
Διερεύνησις. Ἐφ' ὅσον τὸ A εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (O, R) , οἱ δύο κύκλοι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα τὰ B καὶ B' . Ἄρα ὑπάρχουν δύο λύσεις, ἥτοι αἱ ἐφαπτόμεναι AB καὶ AB' . Ἐὰν τὸ A εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (O, R) (σχ. 243) οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται εἰς τὸ A καὶ ὑπάρχει μία μόνον λύσις, ἡ



Σχ. 242



Σχ. 243



Σχ. 244

κάθετος ἐπὶ τὴν OA εἰς τὸ A . Ἐὰν τὸ A εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (O, R) δὲν ὑπάρχει λύσις, διότι οἱ δύο κύκλοι δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον (σχ. 244).

245. Παράδειγμα 5ον. Νὰ ἀχθῇ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη δύο δοθέντων κύκλων (K, R) καὶ (Λ, ρ) .

Ἀνάλυσις. Θεωροῦντες τὸ πρόβλημα λυμένον ὑποθέτομεν ὅτι ἔχει ἀχθῇ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη MN τῶν δύο δοθέντων κύκλων (σχ. 245). Ἐστω ὅτι εἶναι $R > \rho$. Φέρομεν τὰς KM καὶ ΛN , αἱ ὁποῖαι προφανῶς εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν MN καὶ ἐκ τοῦ Λ φέρομεν τὴν $\Lambda A \parallel MN$. Τότε θὰ εἶναι $\Lambda A \perp KM$ ἐνῶ ἐκ τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου $AMNA$ ἔχομεν $AM = \Lambda N = \rho$. Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $AK\Lambda$ γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσάν $K\Lambda = \delta$,

εἰ
ὅτι
εἰ
δι
π
σι

Ἐάν οἱ δύο κύκλοι ταυτίζονται, ὑπάρχουν ἄπειροι λύσεις καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

337. Νὰ κατασκευασθοῦν γωνίαι:

i) $22^\circ 30'$, ii) $67^\circ 30'$, iii) 105° , iv) 135° , v) 150° .

338. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ γωνία \widehat{A} , ἡ πλευρὰ β καὶ ἡ διχοτόμος δ τῆς γωνίας \widehat{A} . Ἐφαρμογή διὰ $\widehat{A} = 60^\circ$, $\beta = 4$ cm καὶ $\delta_a = 3$ cm.

339. Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ μία πλευρὰ α καὶ αἱ δύο διαγώνιοι δ καὶ δ' .

340. Νὰ κατασκευασθῇ ρόμβος, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ διαγώνιοι δ καὶ δ' .

341. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , μ_α , μ_β .

342. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) ἐκ τοῦ ὕψους u_α καὶ τῆς ἀκτίνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

343. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοπλευρον τρίγωνον ἐκ τῆς ἀκτίνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

344. Νὰ κατασκευασθῇ ρόμβος ἐκ τῆς μιᾶς διαγωνίου δ αὐτοῦ καὶ τῆς ἀκτίνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

345. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν \widehat{B} , $\widehat{\Gamma}$, u_α .

346. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν β , γ , u_α .

347. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν \widehat{A} , \widehat{B} καὶ $\beta + \gamma = \lambda$.

348. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , \widehat{B} καὶ $\beta + \gamma = \lambda$.

349. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A} = 1^\circ$, \widehat{B} , $\alpha + \gamma = \lambda$.

350. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A} = 1^\circ$, \widehat{B} , $\alpha + \beta = \lambda$.

351. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ μέσα K , Λ , M τῶν τριῶν πλευρῶν του.

Β'.

352. Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου δίδεται μία πλευρὰ, μία διαγώνιος καὶ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων.

353. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ περίμετρος 2λ καὶ ἡ διαγώνιος δ .

354. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος λ τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαγωνίου αὐτοῦ.

355. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ διαφορὰ λ τῆς πλευρᾶς ἀπὸ τὴν διαγώνιον.

356. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν μ_α , μ_β , μ_γ .

357. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν u_α , μ_α καὶ ἐκ τοῦ ὅτι εἶναι $\alpha = 2\beta$.

358. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν β , γ , μ_α .

359. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A} = 1^\circ$, α καὶ $\beta - \gamma = \lambda$.

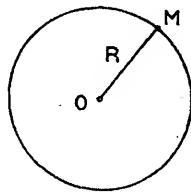
360. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ 2τ καὶ τῶν γωνιῶν \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

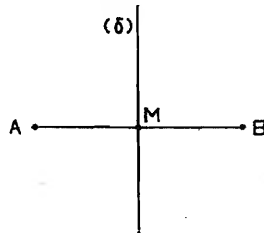
246. Την έννοιαν και τὸν ὅρισμὸν τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου τὴν ἔχομεν ἤδη συναντήσει εἰς τὴν παράγραφον 76. Οἱ γ. τόποι ποὺ ἔχομεν γνωρίσει καλοῦνται στοιχειώδεις γεωμετρικοὶ τόποι καὶ τοὺς ἔχομεν χρησιμοποιήσει καὶ εἰς τὰς γεωμετρικὰς κατασκευάς. Συνοψίζομεν αὐτοὺς κατωτέρω καὶ εἰς τὸ ἐξῆς θὰ τοὺς θεωροῦμεν ὡς πᾶσδῇποτε γνωστοὺς.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

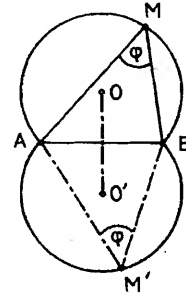
247. 1. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ὠρισμένην ἀπόστασιν R ἀπὸ σταθερὸν σημεῖον O τοῦ ἐπιπέδου, εἶναι ὁ κύκλος (O, R) , ἐξ ὁρισμοῦ (σχ. 247).



Σχ. 247



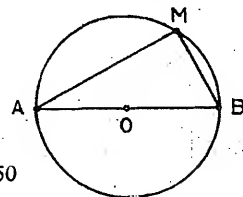
Σχ. 248



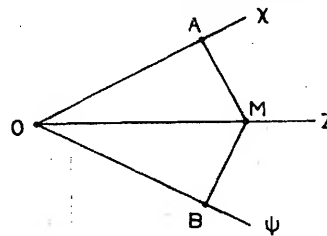
Σχ. 249

3. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθέν εὐθύγραμμον τμήμα AB φαίνεται ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ , εἶναι ἡ ἔνωσις τῶν δύο τόξων \widehat{AMB} καὶ $\widehat{AM'B}$ με κοινὰ ἄκρα τὰ A καὶ B , τὰ ὁποῖα δέχονται γωνίαν φ (§ 204 πόρ. V) (σχ. 249).

Ἰδιαίτέρως σημειώνομεν τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ γωνία φ εἶναι ὀρθή. Τότε ὁ γεωμετρικὸς τόπος εἶναι κύκλος με διάμετρον τὸ τμήμα AB (σχ. 250).



Σχ. 250



Σχ. 251

4. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ἐσωτερικῶν σημείων γωνίας \widehat{xOy} , τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰς πλευράς της, εἶναι διχοτόμος OZ αὐτῆς (§ 80) (σχ. 251).

248. Γενικός τρόπος εργασίας. Εἰς τὰ θέματα τῶν γεωμετρικῶν τόπων κατὰ κανόνα δίδεται ἡ ιδιότης, τὴν ὁποῖαν ἔχουν τὰ σημεῖα τοῦ τόπου καὶ ζητεῖται ὁ προσδιορισμὸς αὐτοῦ.

Εἰς τοὺς γεωμετρικοὺς τόπους σχεδὸν πάντοτε δυνάμεθα νὰ πιθανολογήσωμεν ἐξ ἀρχῆς τὴν μορφὴν τοῦ τόπου κατασκευάζοντες τρία σημεῖα μὲ τὴν χαρακτηριστικὴν ιδιότητα τοῦ τόπου. Ἐὰν ταῦτα συμβαίνει νὰ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας, τότε ὁ τόπος θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα αὕτη ἢ τμῆμα αὐτῆς, ἐνῶ ἐὰν ταῦτα δὲν κεῖνται ἐπὶ εὐθείας, τότε ὁ τόπος θὰ εἶναι ὁ κύκλος, τὸν ὁποῖον ὀρίζουν ἡ τόξον αὐτοῦ. Ἡ διαπίστωσις αὕτη ἀπλῶς θὰ καθοδηγήσῃ τὴν σκέψιν καὶ τὴν προσπάθειάν μας εἰς τὸν ἐντοπισμὸν τοῦ τόπου, χωρὶς νὰ ἀποτελῇ καὶ ἀπόδειξιν.

Εἰς τὴν ἀναζήτησιν ἐνὸς γεωμετρικοῦ τόπου, ἡ ἀνάλυσις εἶναι ἡ μέθοδος πὺ ἀποκλειστικὰ σχεδὸν χρησιμοποιεῖται. Ἐστω (T) ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος καὶ f ἡ χαρακτηριστικὴ ιδιότης τῶν σημείων του. Θεωροῦμεν ἓν σημεῖον M τοῦ τόπου καὶ καταλλήλως ἐπεξεργαζόμενοι τὴν ιδιότητα f αὐτοῦ συσχετίζοντες τὸ σημεῖον τοῦτο μὲ σταθερὰ δεδομένα στοιχεῖα, ἀνακαλύπτουμεν ὅτι τοῦτο ἀνήκει εἰς κάποιον σύνολον (σχῆμα) (Σ). Τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ τυχαῖον σημεῖον M τοῦ τόπου (T) ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον (Σ), μᾶς πείθει ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ (T) ἀνήκουν εἰς τὸ (Σ). Ἀρα θὰ εἶναι

$$(1) \quad (T) \subseteq (\Sigma)$$

Εἶναι ἀπαραίτητον ὁμῶς νὰ ἐξετάσωμεν ἐὰν καὶ κάθε σημεῖον τοῦ συνόλου (Σ) ἔχῃ τὴν ιδιότητα f, δηλαδὴ ἐὰν εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου (T). Πρὸς τοῦτο, λαμβάνουμεν ἓν τυχαῖον σημεῖον τοῦ συνόλου (Σ) καὶ τὸ ἐξετάζομεν ἐὰν ἔχῃ τὴν ιδιότητα f. Ἐὰν τοῦτο συμβαίνει, ἡ ἐργασία αὕτη εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς προηγουμένης καὶ μᾶς πείθει ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ (Σ) ἀνήκουν εἰς τὸν τόπον (T) δηλαδὴ θὰ εἶναι

$$(2) \quad (\Sigma) \subseteq (T)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) πλέον ἔπεται ὅτι

$$(T) \equiv (\Sigma),$$

ἥτοι ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι τὸ ἀνακαλυφθὲν σύνολον (σχῆμα) (Σ).

Τοῦτο τὸ ἀντίστροφον ὁμῶς δὲν συμβαίνει πάντοτε δι' ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ (Σ) καὶ εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ ἐπισημάνωμεν τὰς συνθήκας, ὑπὸ τὰς ὁποίας ἐν στοιχείῳ τοῦ Σ ἔχει τὴν ιδιότητα f τοῦ τόπου. Ἡ ἀνακάλυψις τῶν συνθηκῶν τούτων, ἔχει ὡς συνέπειαν τὸν περιορισμὸν τοῦ τόπου (T) εἰς ἓν ὑποσύνολον (Σ₁) τοῦ (Σ).

Συνήθως εἰς τὴν πράξιν, ἡ ἀνακάλυψις αὐτῶν τῶν συνθηκῶν, ἂν ὑπάρχουν, δὲν εἶναι πάντοτε εὐκόλος καὶ διὰ τοῦτο ἀπαιτεῖται μία κατάλληλος διερεύνησις τῶν ὁριακῶν θέσεων, ἂν ὑπάρχουν, τὰς ὁποίας δύνανται νὰ λάβουν τὰ σημεῖα τοῦ τόπου (T) μέσα εἰς τὸ σύνολον (Σ).

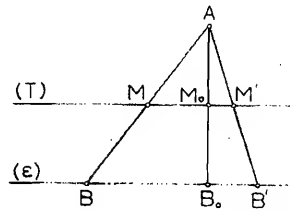
Ἡ διερεύνησις αὕτη θὰ ᾔτο λογικῶς περιττή, ἐὰν κατὰ τὴν ἀνάλυσιν

ἐκμεταλλοποιήσαμεν μόνον ἀναγκαίᾳ καὶ ἱκανᾷ συνθήκᾳ, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον συνήθως δὲν εἶναι πάντοτε εὐκόλῳ νὰ ἐλέγχεται. Δι' αὐτό, κατὰ τὴν ἀνάλυσιν χρησιμοποιοῦμεν ἀναγκαίᾳ μόνον συνθήκᾳ καὶ ἐν συνεχείᾳ διὰ τοῦ ἀντιστρόφου καὶ τῆς διερευνήσεως γίνεται ὁ ἐλεγχος τοῦ ἂν αὐταὶ εἶναι ἱκαναί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΟΠΩΝ

249. Παράδειγμα 1. Δίδεται εὐθεῖα (ϵ) καὶ σημεῖον A ἐκτὸς αὐτῆς. Ἐὰν B εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς (ϵ) , νὰ εὑρεθῇ ὁ γ . τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος AB .

Ἀνάλυσις. Ἐστω M τὸ μέσον τοῦ τμήματος AB . Ἐκ τοῦ A φέρομεν $AB_0 \perp (\epsilon)$ καὶ ἔστω M_0 τὸ μέσον τοῦ τμήματος AB_0 (σχ. 252). Ἡ εὐθεῖα MM_0 εἶναι παράλληλος τῆς (ϵ) ὥς διερχομένη ἀπὸ τὰ μέσα M καὶ M_0 τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ABB_0 , ἄρα κάθετος ἐπὶ τοῦ τμήματος AB_0 καὶ μάλιστα εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ. Ἐπειδὴ τὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας (T) , παράλλῃου πρὸς τὴν (ϵ) καὶ διερχομένης διὰ τοῦ μέσου M_0 τοῦ συγκεκριμένου καὶ γνωστοῦ τμήματος AB_0 , ἔπεται ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τόπου εὐρίσκονται ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης.



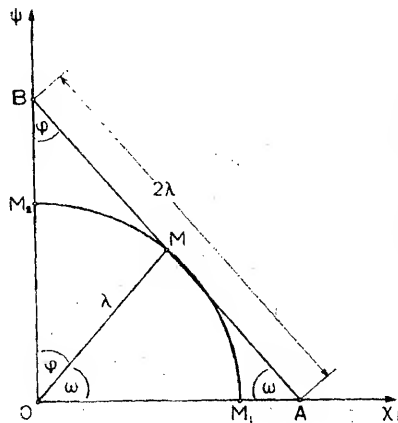
Σχ. 252

Ἀντιστρόφως. Ἐστω M' τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας (T) . Θὰ δείξωμεν ὅτι ὑπάρχει τμήμα, τοῦ ὁποῖου τὸ ἓν ἄκρον εἶναι τὸ A καὶ τὸ ἄλλο εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς (ϵ) καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει μέσον τὸ M' . Πράγματι ἡ εὐθεῖα AM' τέμνει πάντοτε τὴν (ϵ) εἰς ἓν σημεῖον B' . Εἰς τὸ τρίγωνον AB_0B' ἡ M_0M' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν B_0B' καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον M_0 τῆς πλευρᾶς AB_0 . Ἄρα θὰ διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς AB' , ἥτοι τὸ M' εἶναι μέσον τοῦ τμήματος AB' . Τότε ὁ ζητούμενος γ . τόπος εἶναι ἡ εὐθεῖα MM_0 , παράλληλος τῆς (ϵ) καὶ διερχομένη ἀπὸ τὸ μέσον M_0 τοῦ καθετοῦ ἐπὶ τὴν (ϵ) τμήματος AB_0 .

Παρατήρησις. Ἡ χρησιμοποιηθεῖσα ἀποδεικτικὴ μέθοδος κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ιδιότης τοῦ μεμονωμένου σημείου M νὰ ἀνήκῃ εἰς εὐθεῖαν (T) , ἐγενικεύθη δι' ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ γ . τόπου, καλεῖται **ἐπαγωγικὴ μέθοδος**. Ἀντιθέτως πρὸς αὐτὴν ὑπάρχει καὶ ἡ **ἀπαγωγικὴ μέθοδος** ἡ ὁποία εἶναι ἡ πλέον χρησιμοποιομένη μέθοδος τῶν θεωρημάτων. Κατ' αὐτὴν, ἐκ τῶν γενικῶν ιδιοτήτων τοῦ συνόλου τῶν σχημάτων, ἀποδεικνύονται αἱ ιδιότητες συγκεκριμένου σχήματος.

250. Παράδειγμα 2. Εὐθυγράμμου τμήματος AB μήκους 2λ τὰ ἄκρα ὀλισθαίνουν ἕκαστον ἐπὶ ἐκάστης πλευρᾶς ὀρθῆς γωνίας \widehat{xOy} . Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ . τόπος τοῦ μέσου M τοῦ τμήματος AB .

Ἀνάλυσις. Τὰ ἄκρα A καὶ B τοῦ τμήματος $AB = 2\lambda$ εὐρίσκονται ἐπὶ τῶν πλευρῶν Ox καὶ Oy ἀντιστοίχως τῆς δοθείσης ὀρθῆς γωνίας $x\hat{O}y$ (σχ. 253). Λαμβάνομεν μίαν τυχούσαν θέσιν AB τοῦ τμήματος 2λ καὶ ἔστω M τὸ μέσον του. Τοῦτο εἶναι ἐν σημεῖον τοῦ τόπου. Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου AOB ἡ ὑποτείνουσα ἔχει ὠρισμένον μῆκος $AB = 2\lambda$. Ἄρα ἡ ἐπ' αὐτὴν διάμεσος OM , ὡς ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτείνουσας, ἔχει μῆκος λ . Ἐξ αὐτοῦ ἐπεταί ὅτι τὸ μέσον M τοῦ τμήματος ἀπέχει σταθερὰν ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὸ σημεῖον O , ἥτοι εὐρίσκεται ἐπὶ κύκλου (O, λ) .



Σχ. 253

Διερεύνησις. Ἐπειδὴ τὸ τμήμα AB εὐρίσκεται ἐντὸς τῆς ὀρθῆς γωνίας $x\hat{O}y$, ἐπεταί ὅτι καὶ τὸ μέσον του εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς γωνίας. Ἄρα τὰ σημεῖα

τοῦ τόπου περιορίζονται εἰς τὸ τόξον $\widehat{M_1M_2}$ τοῦ κύκλου (O, λ) τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας $x\hat{O}y$.

Ἀντιστροφή. Ἐστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου $\widehat{M_1M_2}$ τοῦ εὐρισκόμενου ἐντὸς τῆς ὀρθῆς γωνίας $x\hat{O}y$. Μὲ κέντρον M καὶ ἀκτῖνα $MO = \lambda$ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν Ox εἰς σημεῖον A . Ἡ MA τέμνει τὴν Oy εἰς σημεῖον B . Τὸ τρίγωνον MOA εἶναι ἐκ κατασκευῆς ἰσοσκελὲς μὲ $MO = MA = \lambda$, ἄρα $\widehat{MOA} = \widehat{A} = \omega$.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου AOB ἐπεταί ὅτι εἶναι :

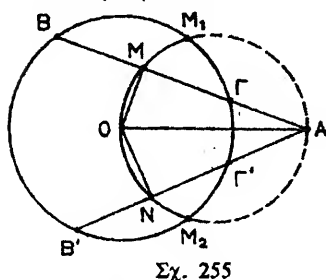
$\widehat{B} = \varphi = 1^\circ - \omega$, ἐνῶ ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας $x\hat{O}y$ ἐπεταί ὅτι $\widehat{BOM} = 1^\circ - \omega$. Ἄρα $\widehat{B} = \widehat{BOM}$, ἥτοι καὶ τὸ τρίγωνον OMB εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ $MO = MB = \lambda$.

Ἐκ τῶν δύο ἰσοσκελῶν τριγώνων ἐπεταί $MA = MO = MB = \lambda$. Ἄρα τὸ M εἶναι μέσον τοῦ τμήματος $AB = 2\lambda$, ἥτοι τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ τόξου $\widehat{M_1M_2}$ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

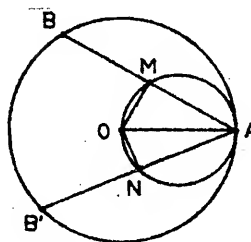
Ἐξ αὐτοῦ ἐπεταί ὅτι ὁ ζητούμενος γ . τόπος εἶναι τὸ τέταρτον $\widehat{M_1M_2}$ τοῦ κύκλου (O, λ) μὲ ὀριακὰ σημεῖα τὰ σημεῖα M_1 καὶ M_2 .

251. Παράδειγμα 3. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ σημεῖον A . Ἐὰν N εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (O, R) φέρομεν τὴν NA καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν σημεῖον M , τοιοῦτον ὥστε $NM = NA$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ . τόπος τοῦ σημείου M , ὅταν τὸ N διατρέχῃ τὸν κύκλον (O, R) .

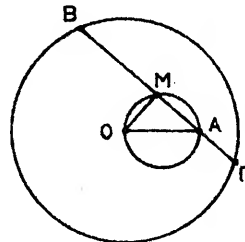
ii) Το σημείο A ανήκει εἰς τὸν κύκλον (σχ. 256) ἢ εἶναι ἐσωτερικὸν αὐτοῦ (σχ. 257). Τότε ὅλα τὰ σημεία τοῦ κύκλου μετὰ διάμετρον τὴν OA εἶναι ἐσωτερικὰ τοῦ κύκλου (O, R) ἐξαιρέσει τοῦ A εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ τοῦτο κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου (O, R) . Ἄρα τὰ σημεία τοῦ τόπου, ἀνήκουν εἰς τὸν κύκλον διαμέτρου OA .



Σχ. 255



Σχ. 256



Σχ. 257

Ἀντιστρόφως. Ἐστω N τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου μετὰ διάμετρον τὴν OA ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (O, R) . Φέρομεν τὴν NA , ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον (O, R) εἰς δύο σημεία B' καὶ Γ' . Ἡ ON εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $B'\Gamma'$, διότι τὸ τρίγωνον ONA , ὡς ἐγγεγραμμένον εἰς ἡμικύκλιον, εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ N . Τότε ὅμως τὸ N θὰ εἶναι μέσον τῆς χορδῆς $B'\Gamma'$, διότι ἡ ἐκ τοῦ κέντρου O τοῦ κύκλου κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν $B'\Gamma'$ διέρχεται ἐκ τοῦ μέσου αὐτῆς (§ 170, πόρ. II).

Ἄρα ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι τὸ τόξον $M_1\widehat{OM}_2$ τοῦ κύκλου μετὰ διάμετρον τὴν OA , τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (O, R) μετὰ ὁριακὰ σημεία τὰ M_1 καὶ M_2 (σχ. 255) ἢ δλόκληρος ὁ κύκλος διαμέτρου OA (σχ. 256 καὶ 257).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

361. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν (e) ἀπέχουν δοθεῖσαν ἀπόστασιν α .

362. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ δύο δοθεῖσας παραλλήλους εὐθείας (e_1) καὶ (e_2) .

363. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι διέρχονται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεία A καὶ B .

364. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται εὐθείας (e) εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς A .

365. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κορυφῶν A τῶν τριγώνων $AB\Gamma$, τὰ ὁποῖα ἔχουν σταθερὰν βάσιν α καὶ δοθεῖσαν διάμεσον μ_a .

366. Τῶν αὐτῶν ὡς ἄνω τριγώνων νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου βάρους αὐτῶν.

367. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων, ποὺ σχηματίζονται ἀν ἀπὸ τὸ τυχὸν σημεῖον M τῆς βάσεως $B\Gamma$ ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὰς δύο ἄλλας πλευράς του.

368. Να εύρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας.

369. Να εύρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν συμμετρικῶν δοθέντος σημείου A ὡς πρὸς τὰς εὐθείας, ποὺ διέρχονται διὰ δοθέντος σημείου O .

370. Να εύρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθεὶς κύκλος φαίνεται ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω .

371. Μεταβλητοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ διατηρεῖται σταθερὰ κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος καὶ ἡ γωνία A σταθερὰ κατὰ μέγεθος. Να εύρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου του.

372. Να εύρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τῶν χορδῶν δοθέντος κύκλου ποὺ ἔχουν δεδομένον μῆκος λ .

373. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ σημεῖον A . Ἐὰν K εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, νὰ εύρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος AK , ὅταν τὸ K διαγράφῃ τὸν κύκλον.

Β'.

374. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB καὶ $A\Gamma$ θεωροῦμεν δύο σημεῖα Δ καὶ E ἀντιστοίχως, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $A\Delta = \Gamma E$. Να εύρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΔE .

375. Δίδεται κύκλος διαμέτρου AB . Φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν $A\Gamma$ καὶ εἰς τὴν προέκτασιν τῆς λαμβάνομεν τμήμα $\Gamma M = \Gamma B$. Να εύρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ M .

376. Μεταβλητοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ ἡ πλευρὰ α παραμένει σταθερὰ κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος καὶ ἡ γωνία $\hat{A} = \omega$ παραμένει σταθερὰ κατὰ μέγεθος. Να εύρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου ἐκάστης ἐκ τῶν πλευρῶν AB καὶ $A\Gamma$.

377. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀντιστοίχως εἰς τὰ ἄκρα A καὶ B δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος AB καὶ μεταξὺ των εἰς τὸ σημεῖον M . Να εύρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ M .

378. Δίδεται κύκλος κέντρου O καὶ διάμετρος AOB αὐτοῦ. Φέρομεν τυχοῦσαν ἀκτῖνα OT καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $OM = \Gamma\Delta$, ἐνθα $\Gamma\Delta \perp AB$. Να εύρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ M .

379. Ἀπὸ σημεῖον A ἐκτὸς κύκλου φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν $AB\Gamma$, καὶ ἀπὸ τὸ μέσον I τῆς χορδῆς $B\Gamma$ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $IM = IA$. Να εύρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ M .

380. Δίδεται κύκλος καὶ σταθερὰ χορδὴ AB . Ἐὰν Γ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον $\Gamma A B \Delta$. Να εύρεθῇ ὁ γ. τόπος: α) τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλογράμμου, β) τῆς τετάρτης κορυφῆς Δ .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

Γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ

Α'.

381. Να κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν γ , \hat{B} καὶ δ_a .

382. Να κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , R καὶ \hat{B} .

383. Να κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν \hat{A} , \hat{B} καὶ ρ .

384. Να ἀχθῇ εὐθεῖα ἰσαπέχουσα ἀπὸ τρία δοθέντα σημεῖα A , B , Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας.

385. Να κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , \hat{B} καὶ ν_β .

386. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) καὶ σημεῖον M. Διὰ τοῦ M νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς παραλλήλους, οὕτως ὥστε τὸ ἀποκοπτόμενον τμήμα νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

387. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν \widehat{A} , δ_α , ν_α .

388. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A} = 1^\circ$, $\widehat{B} = \omega$, καὶ $\alpha - \gamma = \lambda$.

389. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{A} = 1^\circ$, α καὶ $\beta + \gamma = \lambda$.

390. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν \widehat{B} , ν_α καὶ $\alpha + \beta = \lambda$.

391. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , ν_β καὶ $\beta + \gamma = \lambda$.

392. Δίδεται τρίγωνον ABΓ. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, τέμνουσα τὰς πλευρὰς AB καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως εἰς τὰ Δ καὶ Ε, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $AD = GE$.

393. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , $\widehat{A} = \omega$ καὶ ν_β .

394. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , ν_β , ν_γ .

395. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , ν_α , καὶ $\widehat{B} = \varphi$.

396. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , μ_α καὶ ν_β .

397. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν $\widehat{B} = \varphi$, ν_α καὶ μ_γ .

B.

398. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , \widehat{B} καὶ $|\beta - \gamma| = \lambda$.

399. Περὶ δοθὲν τρίγωνον ABΓ νὰ περιγραφῇ τὸ μέγιστον ἰσόπλευρον τρίγωνον.

400. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον διὰ τὸ ὅποιον δίδεται ἡ εὐθεῖα (ε) ἐπὶ τῆς ὁποίας εὐρίσκεται ἡ πλευρὰ ΒΓ, ἡ διχοτόμος ΑΔ τῆς γωνίας \widehat{A} κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος καὶ τὸ μέσον M τῆς ΒΓ.

401. Ἀπὸ τὸ ἐν ἐκ τῶν κοινῶν σημείων A δύο τεμνομένων κύκλων νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα αὐτοὺς εἰς τὰ B καὶ Γ, οὕτως ὥστε τὸ τμήμα ΒΓ νὰ ἔχῃ δεδομένον μῆκος α .

402. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δίδονται μία τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν, αἱ δύο διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων.

403. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δίδονται μία γωνία, αἱ δύο διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων.

Γεωμετρικοὶ τόποι

404. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ ὀρθοκέντρου τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν δοθεῖσαν βάσιν α καὶ δοθεῖσαν γωνίαν κορυφῆς $\widehat{A} = \omega$.

405. Μεταβλητοῦ τετραπλεύρου ABΓΔ ἡ πλευρὰ AB διατηρεῖται σταθερὰ κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος ἐνῶ αἱ πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ ὡς καὶ ἡ διαγώνιος ΑΓ διατηροῦνται σταθεραὶ μόνον κατὰ μέγεθος. Ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τῆς διαγωνίου ΒΔ, ὡς καὶ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος, ποῦ ἔχει ἄκρα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων.

406. Δίδεται κύκλος (O,R) καὶ χορδὴ AB. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου ἐκείνης διαγωνίου τῶν τραπέζιων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς μεγαλύτεραν βάσιν τὴν δοθεῖσαν χορδὴν AB.

407. Δίδεται κύκλος καὶ χορδὴ AB. Μὲ κέντρον τυχὸν σημείου Γ τοῦ τόξου \widehat{AB} γράφομεν κύκλον ἐφαπτόμενον τῆς χορδῆς καὶ ἐκ τῶν A καὶ B φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ M. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου M.

408. Ὄρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) ὀλισθαίνει εἰς τὸ ἐπίπεδόν του, εἰς τρόπον ὥστε αἱ κορυφαὶ B καὶ Γ αὐτοῦ νὰ εὐρίσκωνται ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο καθέτως τεμνομένων εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς κορυφῆς A .

409. Μεταβλητὸς κύκλος ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας (ε) εἰς σταθερὸν σημεῖον A αὐτῆς. Εὐθεῖα (δ) γνωστῆς διευθύνσεως $\vec{\delta}$ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον M . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου M .

410. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ σημεῖον A αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν χορδὴν AB καὶ ἐκ τοῦ O φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν AB , ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἐκ τοῦ B ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον M . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ M .

411. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ διάμετρος AB αὐτοῦ. Φέρομεν τὴν τυχοῦσαν χορδὴν $B\Gamma$ καὶ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $\Gamma\Delta = \Gamma B$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου M τῆς τομῆς τῶν $A\Gamma$ καὶ $O\Delta$.

412. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν A καὶ τυχοῦσαν ἀκτῖνα (μικροτέραν τῆς AB) γράφομεν κύκλον καὶ ἐκ τῶν B καὶ Γ φέρομεν τὰς μὴ συμμετρικὰς ἐφαπτομένας, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον M . α) Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου M . β) Ἐπὶ τῆς MB λαμβάνομεν τὸ τμήμα $MN = M\Gamma$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου N .

413. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$). Ἐστω M τυχὸν σημεῖον τῆς ὑποτείνουσας $B\Gamma$. Ἐκ τοῦ σημείου M φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς AB καὶ $A\Gamma$ εἰς τὰ Δ καὶ E ἀντιστοίχως. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΔE .

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΜΕΤΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

253. Τὰ Γεωμετρικά μεγέθη. Μέγεθος ἐν γένει καλεῖται πᾶν ὅ,τι ἐπιδέχεται ἀύξησιν ἢ ἐλάττωσιν. Γεωμετρικά μεγέθη καλοῦνται τὰ μεγέθη, τὰ ὁποῖα ἐξετάζονται ὑπὸ τῆς γεωμετρίας. Τοιαῦτα εἶναι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, αἱ γωνίαι, τὰ κυκλικά τόξα, αἱ ἐπιφάνειαι κλειστῶν ἐπιπέδων σχημάτων, οἱ ὅγκοι τῶν στερεῶν κ.ἄ.

Τὰ γεωμετρικά μεγέθη τὰ χωρίζομεν εἰς κατηγορίας ἢ σύνολα ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν ὅπως π.χ. τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ἢ τὸ σύνολον τῶν τόξων ἴσων κύκλων κ.λ.π.

Εἰς τὰ προηγούμενα ὥρισamen τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως εἰς τὰ σύνολα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, τῶν γωνιῶν καὶ τῶν τόξων ἴσων κύκλων, ὡς ἐπίσης τὸν πολλαπλασιασμόν καὶ τὴν διαίρεσιν μὲ φυσικὸν ἀριθμόν καὶ τὸν πολλαπλασιασμόν ἐπὶ ρητόν. Ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τὸ γινόμενον γεωμετρικοῦ μεγέθους ἐπὶ ἄρρητον ἀριθμόν ὑπάρχει καὶ εἶναι ὁμοειδές μέγεθος πρὸς τὸ ἀρχικόν.

★ Πράγματι, ἐὰν α εἶναι εἰς ἄρρητος ἀριθμός, εἶναι γνωστὸν ὅτι ἔχει ἐν δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα μὲ ἀπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα δὲν ἐμφανίζουν περιοδικότητα. Ἐστω λοιπὸν $\alpha = \Psi_0, \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 \dots \Psi_n \dots$ τὸ δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα τοῦ ἀριθμοῦ α , ὅπου Ψ_0 εἶναι αἱ ἀκέραιαι μονάδες αὐτοῦ καὶ $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3 \dots$ τὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ ἀναπτύγματός του. Κατασκευάζομεν τὴν ἀκολουθίαν ρητῶν ἀριθμῶν :

$$(1) \quad \alpha_0 = \Psi_0, \quad \alpha_1 = \Psi_0, \Psi_1, \quad \alpha_2 = \Psi_0, \Psi_1 \Psi_2, \dots, \quad \alpha_n = \Psi_0, \Psi_1 \Psi_2 \dots \Psi_n, \dots$$

Ἡ ἀκολουθία (1) τῶν ρητῶν ἀριθμῶν συγκλίνει εἰς τὸν ἄρρητον ἀριθμόν α , ἥτοι εἶναι:

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha \quad (\lim \text{σημαίνει ὅριον})$$

Ἐστω τώρα ὅτι A εἶναι ἐν γεωμετρικὸν μέγεθος (π.χ. εὐθύγραμμον τμήμα). Ἐκ τῆς ἀκολουθίας (1) κατασκευάζομεν τὴν ἀκολουθίαν

$$(3) \quad A \cdot \alpha_0, \quad A \cdot \alpha_1, \quad A \cdot \alpha_2, \dots, \quad A \cdot \alpha_n, \dots$$

ἢ ὁποῖα ἔχει ἔννοιαν ἀκολουθίας ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν πρὸς τὸ A , καθ' ὅσον οἱ συντελεσταὶ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ εἶναι ρητοί.

Ἡ ἀκολουθία γεωμετρικῶν μεγεθῶν (3), λόγῳ τῆς σχέσεως (2), ἀποδεικνύεται ὅτι συγκλίνει εἰς ὁμοειδές μέγεθος πρὸς τὸ A , συμβολιζόμενον μὲ $A \cdot \alpha$ καὶ καλεῖται γινόμενον τοῦ γεωμετρικοῦ μεγέθους A ἐπὶ τὸν ἄρρητον ἀριθμόν α .

Παράδειγμα. Ἐστω A ἐν εὐθύγραμμον τμήμα καὶ $\alpha = \sqrt{2} = 1,414213 \dots$ εἰς ἄρρητος ἀριθμός. Κατασκευάζομεν τὴν ἀκολουθίαν:

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 1,4, \quad \alpha_2 = 1,41, \quad \alpha_3 = 1,414, \quad \alpha_4 = 1,4142, \quad \alpha_5 = 1,41421 \dots$$

ή όποία συγκλίνει εις τόν αριθμόν $\sqrt{2}$ και έξ αύτης την ακολουθίαν εύθυγράμμων τμημάτων.
 $A \cdot 1, A \cdot 1,4, A \cdot 1,41, A \cdot 1,414, A \cdot 1,4142, A \cdot 1,41421, \dots$

ή όποία συγκλίνει εις εύθύγραμμον τμήμα τό όποϊον γράφεται $A \cdot \sqrt{2}$.

254. Λόγος όμοειδών γεωμετρικών μεγεθών. Έστωσαν A και B δύο όμοειδῃ γεωμετρικά μεγέθη, όπου τό A δέν είναι μηδενικόν. Άποδεικνύεται ότι (βλέπε κατωτέρω απόδειξιν διά τὰ εύθύγραμμα τμήματα) πάντοτε ύπάρχει μή άρνητικός αριθμός ρ , τοιοϋτος ώστε νά είναι $A\rho = B$. Ό αριθμός ρ καλεΐται λόγος τοϋ μεγέθους B πρὸς τό όμοειδές μέγεθος A , γράφομεν δέ :

$$\rho = \frac{B}{A}$$

Είναι φανερόν ότι ό λόγος δύο γεωμετρικών μεγεθών είναι ό αριθμός, επί τό όποϊον πρέπει νά πολλαπλασιάσωμεν τό έν έξ αύτῶν, διά νά λάβωμεν τό άλλο.

★ **255. Άξίωμα τοϋ Άρχιμήδους.** Έάν A και B είναι δύο μή μηδενικά εύθύγραμματα τμήματα τοιαϋτα ώστε $A < B$, ύπάρχει φυσικός αριθμός, n τοιοϋτος ώστε $n \cdot A > B$.

Τό άνωτέρω άξίωμα διατυπώται και ως εξής:

Ή ακολουθία τῶν εύθυγράμμων τμημάτων $A, 2A, 3A, \dots, nA, \dots$ είναι αύξουσα και μή φραγμένη.

Θεώρημα. Έάν A και B είναι δύο εύθύγραμμα τμήματα όπου τό A δέν είναι μηδενικόν, ύπάρχει πάντοτε πραγματικός και μή άρνητικός αριθμός ρ , τοιοϋτος ώστε νά είναι $A \cdot \rho = B$.

Άπόδειξις. i) Έστω ότι τό τμήμα B είναι μηδενικόν, ήτοι $B = 0$. Τότε θά είναι $A \cdot 0 = 0$, άρα τό θεώρημα ισχύει διά $\rho = 0$.

ii) Έάν $A = B$ τότε θά είναι $A \cdot 1 = B$, ήτοι τό θεώρημα ισχύει διά $\rho = 1$.

iii) Έστω $A < B$. Κατασκευάζομεν την ακολουθίαν τῶν εύθυγράμμων τμημάτων

$$(1) \quad A, 2A, 3A, \dots, nA, \dots$$

ή όποία, κατά τό προηγούμενον άξίωμα, είναι αύξουσα και μή φραγμένη. Άρα ύπάρχει φυσικός αριθμός k τοιοϋτος ώστε νά είναι:

$$k \cdot A \leq B < (k+1)A$$

α) Έάν εις την προηγούμενην σχέσιν ισχύη τό $=$, τότε αύτη γράφεται $k \cdot A = B$, ήτοι τό θεώρημα ισχύει διά $\rho = k$.

β) Έάν είναι $k \cdot A < B < (k+1)A$, δηλαδή εάν τό B περιέχεται έντός τοϋ άνοιχτοϋ διαστήματος $(k \cdot A, (k+1)A)$, τό όποϊον έχει πλάτος A , τότε διχοτομούμεν τό διάστημα τοϋτο και λαμβάνομεν τὰ δύο διαστήματα:

$$(2) \quad \left(k \cdot A, k \cdot A + \frac{A}{2}\right), \quad \left(k \cdot A + \frac{A}{2}, (k+1)A\right)$$

Έκαστον έκ τῶν όποίων έχει πλάτος $\frac{A}{2}$. Δύο είναι τὰ πιθανά ένδεχόμενα, ήτοι:

$$\alpha_1) \quad \text{Τό τμήμα } B \text{ συμπίπτει μέ τό } k \cdot A + \frac{A}{2}, \text{ δηλαδή } B = k \cdot A + \frac{A}{2} \text{ ή}$$

$$B = \frac{2k+1}{2} \cdot A, \text{ όποτε τό θεώρημα ισχύει διά } \rho = \frac{2k+1}{2}.$$

β₁) Τὸ τμήμα Β περιέχεται εἰς ἓν ἐκ τῶν δύο διαστημάτων (2), ἔστω εἰς τὸ πρῶτον. Τότε διχοτομοῦμεν ἐκ νέου τοῦτο καὶ λαμβάνομεν δύο διαστήματα.

$$(3) \left(k \cdot A, k \cdot A + \frac{A}{4} \right), \quad \left(k \cdot A + \frac{A}{4}, k \cdot A + \frac{A}{2} \right)$$

Ἐκαστον ἐκ τῶν ὁποίων ἔχει πλάτος $\frac{A}{4} = \frac{A}{2^2}$.

Ὡς καὶ προηγουμένως, δύο εἶναι τὰ πιθανὰ ἐνδεχόμενα, ἦτοι:

α₂) Τὸ τμήμα Β συμπίπτει μετὰ τὸ τμήμα $k \cdot A + \frac{A}{4}$, δηλαδή

$$B = k \cdot A + \frac{A}{4} \text{ ἢ } B = \frac{4k+1}{4} \cdot A, \text{ ὁπότε τὸ θεώρημα ἰσχύει διὰ } \rho = \frac{4k+1}{4}.$$

β₂) Τὸ τμήμα Β περιέχεται εἰς ἓν ἐκ τῶν διαστημάτων (3). Διχοτομοῦμεν ἐκ νέου τὸ διάστημα εἰς τὸ ὅποιον περιέχεται τὸ τμήμα Β. Λαμβάνομεν οὕτω δύο διαστήματα πλάτους $\frac{A}{2^3}$ κ.ο.κ.

Ἡ αὕτη σκέψις ἐπαναλαμβανομένη ν φορές, θὰ περιορίσῃ τὸ τμήμα Β μετὰξὺ δύο διαστημάτων μετὰ διαφορὰν πλάτους $A/2^n$, ἐὰν ἐν τῷ μετὰξὺ τὸ Β δὲν ἔχῃ συμπίψει μετὰ ἓν ἐκ τῶν διχοτομοῦντων σημείων τὰ προηγούμενα διαστήματα. Μεταβαίνοντες εἰς τὸ ὄριον, ὅταν τὸ ν τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, διαπιστώνομεν ὅτι τὸ τμήμα Β περιορίζεται εἰς δύο διαστήματα (τμήματα) μετὰ διαφορὰν μηδενικοῦ πλάτους. Ἄρα τὸ Β, συμπίπτει μετὰ τὰ συμπίπτοντα ἄκρα τοῦ μηδενικοῦ αὐτοῦ διαστήματος, τὰ ὁποῖα ὅπωςδήποτε ἐκφράζονται ἀπὸ τὸ στοιχεῖον Α, πολλαπλασιασμένον ἐπὶ κάποιον ἀριθμητικὸν συντελεστήν. Αὐτὸς ἀκριβῶς ὁ συντελεστὴς εἶναι ὁ ἀριθμὸς ρ.

256. Μέτρον τῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν. Ἐστώσαν Α καὶ Μ δύο ὁμοειδῆ γεωμετρικὰ μεγέθη. Καλοῦμεν μέτρον τοῦ μεγέθους Α μετὰ μονάδα μετρήσεως τὸ μέγεθος Μ, τὸν λόγον.

$$\frac{A}{M} = \rho$$

τοῦ μεγέθους Α πρὸς τὸ ὁμοειδὲς μέγεθος Μ. Ἄρα τὸ μέτρον ρ ἑνὸς γεωμετρικοῦ μεγέθους εἶναι πραγματικὸς καὶ μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὴν σχέσιν τοῦ μεγέθους Α ὡς πρὸς τὴν μονάδα μετρήσεως Μ. Πράγματι, ἐκ τῆς σχέσεως (1) λαμβάνομεν

$$A = \rho \cdot M$$

ἐκ τῆς ὁποίας φαίνεται ὅτι διὰ τῆς ἐπαναλήψεως ρ φορές τῆς μονάδος μετρήσεως Μ, λαμβάνομεν τὸ Α.

Ἡ ἐκλογὴ τῆς μονάδος μετρήσεως εἶναι αὐθαίρετος.

257. Μονάδες μετρήσεως τῶν μέχρι τοῦδε ἐξετασθέντων γεωμετρικῶν μεγεθῶν. Αἱ μονάδες μετρήσεως τῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν, ὡς ἀνεφέρθη, ἔχουν ληφθῆ αὐθαίρετως, πάντως εἶναι καθωρισμέναι καὶ διεθνῶς παραδεκταί.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν μηκῶν χρησιμοποιεῖται τὸ μέτρον (σύμβολον 1 m). Τοῦτο ὀρίζεται ὡς ἡ ἀπόστασις μετὰξὺ δύο χαραγῶν ἐφ' ἑνὸς κανόνος ἐξ ἱριδιούχου λευκοχρύσου, φυλασσομένου εἰς τὸ διεθνὲς γραφεῖον μέτρων καὶ σταθμῶν εἰς Σέντρες τῆς Γαλλίας. Ἡ μονὰς αὕτη τοῦ μήκους λέγεται ὅτι εἶναι τὸ

$1/40\ 000\ 000$ του μήκους του ισημερινού της Γης. Είς την κατά το 1960 11ην διεθνή συνδιάσκεψιν. διὰ τὸ μέτρον, ἀπεφασίσθη ὅπως αὐτὸ ἀναχθῇ εἰς ἓν ὠρισμένον μήκος κύματος τοῦ φωτός. Οὕτω τὸ μέτρον ἀντιστοιχεῖ εἰς $1.650.763,73$ μήκη κύματος, ἐν κενῷ, τῆς πορτοκαλοχρόου γραμμῆς τοῦ ἰσοτόπου 86 τοῦ στοιχείου κρυπτοῦ.

Ἐκτὸς τοῦ μέτρου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ βασικὴ μονὰς μετρήσεως τῶν μη-
κῶν, χρησιμοποιοῦνται τὰ πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσια αὐτοῦ, κυριώ-
τερα τῶν ὁποίων εἶναι τὸ 1 ἑκατοστόμετρον $1\text{ cm} = \frac{1}{100}\text{ m}$ καὶ τὸ ἐν χι-
λιόμετρον $1\text{ km} = 1000\text{ m}$.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γωνιῶν χρησιμοποιοῦνται αἱ ἐξῆς μονάδες :

i) Ἡ **μοῖρα** (σύμβολον 1°). Αὕτη εἶναι τὸ $1/360$ τῆς πλήρους γωνίας (1 πλήρης γωνία = 4 ὀρθαί). Ἡ μοῖρα ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτά ($60'$) καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα ($60''$).

ii) Ὁ **βαθμός** (σύμβολον 1°). Οὗτος εἶναι τὸ $1/400$ τῆς πλήρους γωνίας καὶ ὑποδιαιρεῖται κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

iii) Τὸ **ἀκτίνιον** (σύμβολον 1 rad). Τοῦτο εἶναι γωνία, ἡ ὁποία καθι-
σταμένη ἐπίκεντρος δέχεται τόξον, τοῦ ὁποίου τὸ μήκος l εἶναι ἴσον πρὸς τὸ
μήκος R τῆς ἀκτίνος διὰ τῆς ὁποίας ἐγράφη (σχ. 258).

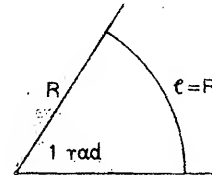
Μία πλήρης γωνία, θὰ ἀποδειχθῇ εἰς ἄλλο κεφάλαιο, ὅτι ἔχει 2π ἀκτίνια, ὅπου $\pi = 3,14159\dots$ ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. Τὸ ἀκτίνιον ὑποδιαιρεῖται κατὰ τὸ
δεκαδικὸν σύστημα. Ἐν ἀκτίνιον εἶναι ἴσον με $57^\circ 17' 44'', 8$ περίπου.

Ἀντιστοίχως πρὸς τὰς μονάδας μετρήσεως τῶν
γωνιῶν, ὀρίζονται καὶ αἱ μονάδες μετρήσεως τῶν
τόξων ἴσων κύκλων, ἥτοι :

i) Ἡ **μοῖρα**, ἴση πρὸς τὸ $1/360$ τοῦ κύκλου.

ii) Ὁ **βαθμός**, ἴσος πρὸς τὸ $1/400$ τοῦ κύ-
κλου καὶ

iii) Τὸ **ἀκτίνιον**, ἴσον πρὸς τὸ $1/2\pi$ τοῦ κύκλου.



Σχ. 258

258. Σύμμετρα γεωμετρικά μεγέθη καλοῦνται

δύο ὁμοειδῆ γεωμετρικὰ μεγέθη A καὶ B , ἂν εἶναι πολλαπλάσια ἑνὸς καὶ τοῦ
αὐτοῦ ὁμοειδοῦς πρὸς αὐτὰ μεγέθους Γ . Δηλαδή ἂν εἶναι :

$$A = k \cdot \Gamma \quad \text{καὶ} \quad B = \lambda \cdot \Gamma$$

ὅπου k καὶ λ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Τότε λέγομεν ὅτι τὰ μεγέθη A καὶ B ἔχουν **κοινὸν μέτρον**, καὶ ἐννοοῦμεν
ὅτι ὑπάρχει ὁμοειδὲς πρὸς αὐτὰ μέγεθος Γ τὸ ὁποῖον, ὡς μονὰς μετρήσεως
διὰ τὰ A καὶ B , παρέχει διὰ τὰ μέτρα αὐτῶν ἀκεραίους ἀριθμοὺς k καὶ λ .

259. Θεώρημα. Ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν εἶναι
ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν μέτρων των, ὅταν μετρηθοῦν με τὴν αὐτὴν μο-
νάδα μετρήσεως.

Ἀπόδειξις. Ὡς θεωρήσωμεν δύο ὁμοειδῆ γεωμετρικὰ μεγέθη A καὶ B καὶ ἔστωσαν α καὶ β τὰ μέτρα των ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν μονάδα μετρήσεως M . Τότε θὰ εἶναι $A = \alpha \cdot M$, $B = \beta \cdot M \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{\alpha \cdot M}{\beta \cdot M} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{M}{M} = \frac{\alpha}{\beta}$, διότι $\frac{M}{M} = 1 \Leftrightarrow M = 1 \cdot M$. Ἄρα εἶναι $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$.

260. Ἀναλογίαι καὶ ιδιότητες αὐτῶν. Ἐστωσαν

$$\Omega_1 = \{A, B, \Gamma, \dots, X, \dots\} \text{ καὶ } \Omega_2 = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \chi, \dots\}$$

δύο σύνολα, ἕκαστον μὲ στοιχεῖα ὁμοειδῆ γεωμετρικὰ μεγέθη, χωρὶς κατ' ἀνάγκην τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_1 , νὰ εἶναι ὁμοειδῆ πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_2 . Ὡς θεωρήσωμεν ὅτι μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν δύο συνόλων ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία, ἥτοι :

$$\begin{array}{cccc} A, & B, & \Gamma, \dots & X, \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \alpha, & \beta, & \gamma, \dots & \chi, \dots \end{array}$$

(π.χ. ἐπίκεντροι γωνίαι καὶ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου). Ἡ ἀντιστοιχία αὕτη θὰ καλεῖται **ἀναλογία** τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ὁ λόγος

$\frac{A}{B}$ δύο τυχόντων στοιχείων τοῦ ἑνὸς συνόλου Ω_1 εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον

$\frac{\alpha}{\beta}$ τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ ἄλλου συνόλου Ω_2 , ἥτοι ὅταν εἶναι :

$$(1) \quad \frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Εἰς τὴν προηγουμένην σχέσιν, τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα A, B, α καὶ β καλοῦνται **ὄροι** τῆς ἀναλογίας. Τὰ A καὶ β καλοῦνται **ἄκροι ὄροι** καὶ τὰ B καὶ α **μέσοι ὄροι**.

Ἡ σχέση (1) εἶναι οὐσιαστικῶς ἰσότης ἀριθμητικῶν κλασμάτων (§ 259) καὶ κατὰ συνέπειαν, ἐὰν ἀντὶ τῶν μεγεθῶν χρησιμοποιήσωμεν τὰ μέτρα των, ἰσχύουν αἱ γνωσταὶ ἐκ τῆς Ἀλγέβρας ιδιότητες τῶν ἴσων κλασμάτων. Ἀπὸ αὐτὰς ὑπενθυμίζομεν τὰς ἑξῆς σπουδαιότερας :

$$\text{i) Ἐὰν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$$

$$\text{ii) Ἐὰν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$$

$$\text{iii) Ἐὰν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$$

$$\text{iv) Ἐὰν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \dots = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha + \gamma + \dots + \kappa}{\beta + \delta + \dots + \lambda}$$

Παρατήρησις. Ἐὰν εἰς τὰς ἄνω ἀναλογίας θεωρῶμεν ἀντὶ τῶν μέτρων τῶν τὰ γεωμετρικὰ μεγέθη, ἀπαιτεῖται προσοχὴ εἰς τὰς ἰδιότητας. Ὅπου ἐμφανίζονται ἀθροίσματα (ἀντιστοίχως διαφοραὶ), πρέπει νὰ εἶναι γεωμετρικὰ στοιχεῖα τοῦ αὐτοῦ συνόλου (ὁμοειδῆ), διὰ νὰ ἔχουν νόημα αἱ πράξεις.

★ 261. Ἰδιότητες τῶν ἀναλόγων γεωμετρικῶν μεγεθῶν.

Ἐστωσαν $\Omega_1 \equiv \{A, B, \dots, X, \dots\}$ καὶ $\Omega_2 \equiv \{\alpha, \beta, \dots, \chi, \dots\}$ δύο σύνολα γεωμετρικῶν μεγεθῶν, διὰ τὰ ὁποῖα μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν ὑφίσταται μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία κατὰ τὴν ἔννοιαν $A \longleftrightarrow \alpha, B \longleftrightarrow \beta, \dots, X \longleftrightarrow \chi, \dots$

Ἐὰν ἡ ἀντιστοιχία αὕτη εἶναι ἀναλογία, ἰσχύουν αἱ τρεῖς ἰδιότητες:

i) Ἡ ἰσότης δύο στοιχείων τοῦ συνόλου Ω_1 συνεπάγεται τὴν ἰσότητα τῶν ἀντιστοιχῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Ω_2 ἥτοι:

$$\text{ἐὰν } A = B \iff \alpha = \beta.$$

ii) Τὸ ἄθροισμα δύο στοιχείων τοῦ συνόλου Ω_1 ἔχει ὡς ἀντίστοιχον τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοιχῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Ω_2 , ἥτοι:

$$\text{Ἐὰν } A + B = \Gamma \iff \alpha + \beta = \gamma, \text{ ὅπου } \Gamma \longleftrightarrow \gamma.$$

iii) Ἐὰν δύο στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_1 εἶναι ἄνισα, τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τοῦ συνόλου Ω_2 εἶναι ὁμοιοστρόφως ἄνισα ἥτοι:

$$\text{ἐὰν } A > B \iff \alpha > \beta.$$

Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἰσχύουν αἱ τρεῖς ἀνωτέρω ἰδιότητες ἡ ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν συνόλων Ω_1 καὶ Ω_2 εἶναι ἀναλογία.

Ἀπόδειξις. Ὡς ὑπόθεσιν ἔχομεν ὅτι τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_1 , εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_2 ἥτοι:

$$(1) \quad \frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$$

i) Ἐὰν $A = B$, τότε $\frac{A}{B} = 1$ καὶ ἐκ τῆς (1) ἔπεται $\frac{\alpha}{\beta} = 1$ ἢ $\alpha = \beta$.

ii) Ἐκ τῆς (1), ἐφαρμόζοντες γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν λαμβάνομεν $\frac{A+B}{B} = \frac{\alpha+\beta}{\beta}$ καὶ ἐπειδὴ $B \longleftrightarrow \beta$ ἔπεται ὅτι $A+B \longleftrightarrow \alpha+\beta$ ἢ $\Gamma \longleftrightarrow \gamma$ ὅπου ἐθέσαμεν $\Gamma = A+B$ καὶ $\gamma = \alpha+\beta$.

iii) Ἐὰν $A > B$ τότε θὰ εἶναι $\frac{A}{B} > 1$ καὶ ἐκ τῆς (1) ἔπεται ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta} > 1 \quad \text{ἄρα} \quad \alpha > \beta.$$

Ἀντιστρόφως. Ἐστωσαν A καὶ B δύο τυχόντα στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_1 . Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι ταῦτα εἶναι σύμμετρα, ἥτι ὑπάρχει στοιχεῖον $\Gamma \in \Omega_1$ τοιοῦτον ὥστε τὰ A καὶ B νὰ εἶναι πολλαπλάσια αὐτοῦ, δηλαδή:

$$(2) \quad A = k \cdot \Gamma, \quad B = \lambda \cdot \Gamma$$

Τότε θὰ εἶναι:

$$(3) \quad \frac{A}{B} = \frac{k}{\lambda}$$

Αἱ σχέσεις (2) γράφονται ἀντιστοίχως:

$$A = \underbrace{\Gamma + \Gamma + \dots + \Gamma}_k \text{ προσθετέοι}, \quad B = \underbrace{\Gamma + \Gamma + \dots + \Gamma}_\lambda \text{ προσθετέοι}.$$

Κατά την ιδιότητα ii) θα έχουμε τότε :

$$\alpha = \underbrace{\gamma + \gamma + \dots + \gamma}_{k \text{ προσθετέοι}}, \quad \beta = \underbrace{\gamma + \gamma + \dots + \gamma}_{\lambda \text{ προσθετέοι}}$$

ή $\alpha = k \cdot \gamma, \quad \beta = \lambda \cdot \gamma$

έκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν:

$$(4) \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{k}{\lambda}$$

Ἐκ τῶν (3) καὶ (4) ἔπεται ὅτι:

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Ἐὰν τὰ στοιχεῖα A καὶ B δὲν ἔχουν κοινὸν μέτρον, τότε ὁ λόγος $\frac{A}{B}$ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμὸς καὶ ἡ κατὰ προσέγγισιν τιμὴ αὐτοῦ οἰασδήποτε τάξεως, ὡς ρητὸς ἀριθμὸς, θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν κατὰ προσέγγισιν τιμὴν τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$. Μεταβαίνοντες εἰς τὸ ὄριον, ὅταν ἡ προσέγγισις γίνῃ ἀπείρου τάξεως, λαμβάνομεν:

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Ἄρα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_1 εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_2 , ἐφ' ὅσον ἰσχύουν αἱ τρεῖς ἀνωτέρω ιδιότητες.

262. Μέση ανάλογος δύο ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν A καὶ B καλεῖται ἓν ὁμοειδὲς πρὸς αὐτὰ γεωμετρικὸν μέγεθος M, διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\frac{A}{M} = \frac{M}{B} \iff M^2 = AB.$$

Τότε ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία λέγεται **συνεχῆς**.

263. Τετάρτη ανάλογος τριῶν ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν A, B, καὶ Γ, καλεῖται ἓν ὁμοειδὲς πρὸς αὐτὰ γεωμετρικὸν μέγεθος T, διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{T}$$

(τὸ T κατέχει τὴν τετάρτην θέσιν εἰς τὴν ἀναλογίαν).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

414. Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, νὰ δειχθῇ ὅτι: $\frac{3\alpha + 2\beta}{\beta} = \frac{3\gamma + 2\delta}{\delta}$. Ὁμοίως ὅτι: $\frac{k\alpha + \lambda\beta}{\beta} = \frac{k\gamma + \lambda\delta}{\delta}$ ὅπου k, λ ἀριθμητικοὶ συντελεσταί.

415. Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, νὰ δειχθῇ ὅτι: $\frac{3\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{3\gamma - \delta}{\gamma + \delta}$. Ὁμοίως ὅτι: $\frac{k\alpha + \lambda\beta}{\mu\alpha + \nu\beta} = \frac{k\gamma + \lambda\delta}{\mu\gamma + \nu\delta}$ ὅπου k, λ, μ, ν, ἀριθμητικοὶ συντελεσταί.

416. Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha\beta + \gamma\delta} = \frac{\alpha}{\beta}$.

417. Εάν οι αριθμοί α, β, γ είναι ανάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 4, δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 7.

418. Εάν εἶναι $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, δείξατε ὅτι: $\frac{5\alpha_1 - 7\beta_1 + 3\gamma_1}{5\alpha_2 - 7\beta_2 + 3\gamma_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

419. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \dots = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ τότε $\frac{k\alpha_1 + \lambda\beta_1 + \dots + \nu\rho_1}{k\alpha_2 + \lambda\beta_2 + \dots + \nu\rho_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ ὅπου k, λ, \dots, ν ἀριθμητικοὶ συντελεσταί.

420. Εάν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}$, δείξατε ὅτι: $\frac{\alpha}{\delta} = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^3$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΟΥ (*)

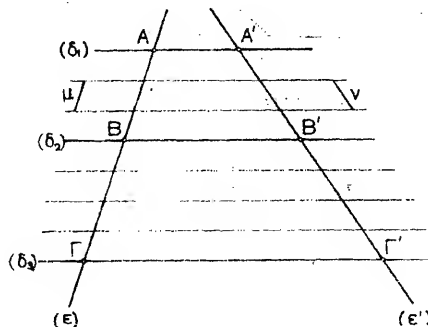
264. Θεώρημα: Εάν δύο εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε') τέμνονται ὑπὸ τριῶν τοῦλάχιστον παραλλήλων εὐθειῶν, τὰ ἀποκτόμενα τμήματα ἐπὶ τῶν (ε) καὶ (ε') ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν παραλλήλων τούτων, εἶναι ἀνάλογα.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν (ε) καὶ (ε') δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου καὶ (δ_1), (δ_2) καὶ (δ_3) τρεῖς παράλληλοι μεταξὺ των εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς (ε) καὶ (ε') ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Α', Β καὶ Β', Γ καὶ Γ' (σχ. 259). Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$$

ι) Ἐστω ὅτι τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ ἐπὶ τῆς (ε) ἐπιδέχονται ὡς κοινὸν μέτρον ἓν εὐθύγραμμον τμήμα μ , ἥτοι ἀμφότερα εἶναι πολλαπλάσια αὐτοῦ. Τότε θὰ εἶναι:

(1) $AB = k\mu$ καὶ $B\Gamma = \lambda\mu$ ὅπου k καὶ λ ἀκέραιοι ἀριθμοί. Διαιροῦμεν τὸ τμήμα ΑΒ εἰς k τμήματα ἴσα πρὸς τὸ μ καὶ τὸ ΒΓ εἰς λ τμήματα ἴσα πρὸς τὸ μ . Ἀπὸ τὰ διαιρετικὰ σημεῖα φέρομεν εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὰς δοθείσας. Αὗται τέμνουν τὴν εὐθεῖαν (ε') καὶ ὀρίζουν ἐπ' αὐτῆς $k + \lambda$ τὸ πλῆθος ἴσα τμήματα καὶ ἔστω ν τὸ μῆκος ἐκάστου. Τότε θὰ εἶναι:



Σχ. 259

* Θαλής (ἐκ Φοινίκης ΣΤ' π.Χ. αἰών). Μετέβη εἰς Αἴγυπτον καὶ ἐμέτρησε τὸ ὕψος τῶν πυραμίδων ἐκ τῆς σκιᾶς των. Φέρει τὴν γεωμετρίαν εἰς τὴν Ἑλλάδα, ἰδρύει εἰς Μίλητον τὴν Ἰωνικὴν Σχολὴν καὶ πλουτίζει τὴν ἐπιστήμην μὲν πολλὰ θεωρήματα τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας καὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων μέσῳ τοῦ σπουδαιοτέρου θεωρήματος τοῦ τρίτου βιβλίου τῆς γεωμετρίας περὶ παραλλήλων εὐθειῶν καὶ ἀναλόγων τμημάτων.

$$(2) \quad A'B' = \kappa\nu \text{ καὶ } B'\Gamma' = \lambda\nu.$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\kappa\mu}{\lambda\mu} = \frac{\kappa}{\lambda} \text{ καὶ } \frac{A'B'}{B'\Gamma'} = \frac{\kappa\nu}{\lambda\nu} = \frac{\kappa}{\lambda}$$

καὶ ἐξ αὐτῶν :

$$(3) \quad \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$$

ii) Ἐάν τὰ τμήματα AB καὶ $B\Gamma$ δὲν ἔχουν κοινὸν μέτρον, τότε ὁ λόγος $\frac{AB}{B\Gamma}$ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμὸς καὶ ἡ κατὰ προσέγγισιν τιμὴ αὐτοῦ οἰασδήποτε τάξεως, ποῦ θὰ εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς, θὰ εἶναι ἴση μετὰ τὴν κατὰ προσέγγισιν τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{A'B'}{B'\Gamma'}$ τῆς αὐτῆς τάξεως. Λαμβάνοντες τὰ ὅρια τῶν ἰσῶν λόγων, ὅταν ἡ προσέγγισις γίνῃ ἀπείρου τάξεως, ὁπότε θὰ ἔχωμεν τὴν ἀκριβῆ τιμὴν τῶν λόγων τούτων εὐρίσκομεν:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$$

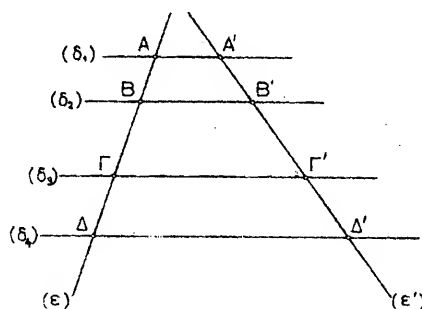
iii) Ἐστω ὅτι αἱ εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε') τέμνονται ὑπὸ τεσσάρων παραλλήλων εὐθειῶν (δ_1) , (δ_2) , (δ_3) καὶ (δ_4) , εἰς τὰ σημεῖα A καὶ A' , B καὶ B' , Γ καὶ Γ' , Δ καὶ Δ' ἀντιστοίχως (σχ. 260). Τότε θὰ εἶναι :

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'} \text{ καὶ } \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{B'\Gamma'}{\Gamma'\Delta'}.$$

Πολλαπλασιάζομεν αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν :

$$\frac{AB}{B\Gamma} \cdot \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'} \cdot \frac{B'\Gamma'}{\Gamma'\Delta'} \quad \text{Ἄρα}$$

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}.$$



Σχ. 260

Παρατήρησις : Ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν (3) λαμβάνομεν

$$\frac{AB + B\Gamma}{B\Gamma} = \frac{A'B' + B'\Gamma'}{B'\Gamma'} \quad \eta \quad \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{B'\Gamma'}$$

Ὁμοίως εὐρίσκομεν $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{A'\Gamma'}{\Gamma'\Delta'}$, $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{A'\Delta'}{A'B'}$ καὶ γενικῶς, οἰα-

δήποτε τμήματα ὀριζόμενα διὰ τῶν παραλλήλων ἐπὶ τῆς μιᾶς εὐθείας εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα αὐτῶν ἐπὶ τῆς ἄλλης.

265. Θεώρημα (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). Ἐστωσαν (δ_1) καὶ (δ_2) δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ (ε) , (ε') δύο εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλή-

λους εἰς τὰ A καὶ A' , B καὶ B' ἀντιστοίχως. Ἐὰν Γ καὶ Γ' εἶναι σημεῖα τῶν τμημάτων AB καὶ $A'B'$ ἀντιστοίχως τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{A'\Gamma'}{\Gamma'B'}$$

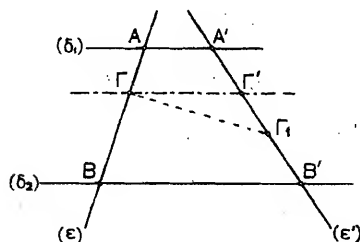
τότε ἡ εὐθεῖα $\Gamma\Gamma'$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς (δ_1) καὶ (δ_2) .

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἡ $\Gamma\Gamma'$ δὲν εἶναι παράλληλος τῶν (δ_1) καὶ (δ_2) , ἐκ τοῦ Γ φέρομεν παράλληλον πρὸς αὐτάς, ἡ ὁποία τέμνει τὸ τμήμα $A'B'$ ἔστω εἰς τὸ Γ_1 (σχ. 261). Τὸ Γ_1 εἶναι σημεῖον τοῦ τμήματος $A'B'$, διότι ἐὰν ᾗτο ἐκτὸς τοῦ $A'B'$, ἔστω πρὸς τὸ μέρος τοῦ B' , ἡ $\Gamma\Gamma_1$ θὰ ἔτεμνε τὴν BB' . Ἀλλὰ αὐτὸ δὲν δύναται νὰ συμβαίῃ διότι ἡ $\Gamma\Gamma_1$ ἐθεωρήθη παράλληλος τῆς BB' .

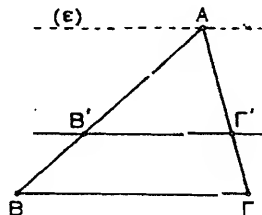
Τότε θὰ εἶναι $\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{A'\Gamma_1}{\Gamma_1 B'}$. Ἐξ αὐτῆς καὶ τῆς δοθείσης, λαμβάνομεν:

$$\frac{A'\Gamma'}{\Gamma'B'} = \frac{A'\Gamma_1}{\Gamma_1 B'} \quad \eta \quad \frac{A'\Gamma' + \Gamma'B'}{\Gamma'B'} = \frac{A'\Gamma_1 + \Gamma_1 B'}{\Gamma_1 B'} \quad \eta \quad \frac{A'B'}{\Gamma'B'} = \frac{A'B'}{\Gamma_1 B'}$$

Ἄρα $\Gamma'B' = \Gamma_1 B'$ ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται $\Gamma' \equiv \Gamma_1$, ὅπερ ἄτοπον, διότι τὰ Γ' καὶ Γ_1 ὑπετέθησαν διάφορα ἀλλήλων. Ἐπομένως πρέπει νὰ εἶναι ἡ $\Gamma\Gamma'$ παράλληλος πρὸς τὰς (δ_1) καὶ (δ_2) .



Σχ. 261



Σχ. 262

Πόρισμα. Ἐὰν εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$, τέμνῃ τὰς AB καὶ AG εἰς τὰ σημεῖα B' καὶ Γ' ἀντιστοίχως, τότε εἶναι

$$\frac{AB'}{B'B} = \frac{A\Gamma'}{\Gamma\Gamma} \quad \text{καὶ ἀντιστρόφως.}$$

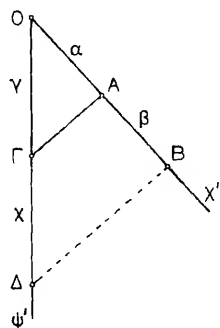
Πράγματι, ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν ἐκ τῆς κορυφῆς A εὐθεῖαν (ϵ) παράλληλον τῆς $B\Gamma$ καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ διὰ τὰς παραλλήλους $(\epsilon) \parallel B'\Gamma' \parallel B\Gamma$ τεμνομένας ὑπὸ τῶν AB καὶ AG (σχ. 262).

Ἀπὸ τὴν ἄνω ἀναλογίαν εὐρίσκομεν καὶ $\frac{AB'}{AB} = \frac{A\Gamma'}{AG}$

266. Πρόβλημα I. Κατασκευή τετάρτης αναλόγου. Δοθέντων τριῶν εὐθυγράμμων τμημάτων α , β καὶ γ , νὰ κατασκευασθῇ τμήμα x , τὸ ὁποῖον νὰ πληροῖ τὴν σχέσιν :

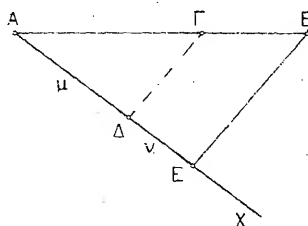
$$(1) \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$$

Λύσις. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox' τυχούσης γωνίας $x'Oy'$ λαμβάνομεν διαδοχικῶς τμήματα $OA = \alpha$, $AB = \beta$ καὶ ἐπὶ τῆς Oy' τμήμα $OG = \gamma$ (σχ. 263). Φέρομεν τὴν AG καὶ ἐκ τοῦ B παράλληλον πρὸς τὴν AG , ἡ ὁποία τέμνει τὴν Oy' εἰς τὸ σημεῖον Δ . Τὸ τμήμα $\Gamma\Delta$ εἶναι τὸ ζητούμενον x , διότι κατὰ τὸ προηγούμενον πόρισμα θὰ ἔχωμεν :



Σχ. 263

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$$



Σχ. 264

267. Πρόβλημα II. Διαίρεσις εὐθυγράμμου τμήματος εἰς δεδομένον λόγον. Ἐπὶ δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος AB νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Γ (ἐνδιάμεσον τῶν A καὶ B), οὕτως ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{\mu}{\nu}$$

Λύσις. Ἐκ τοῦ A φέρομεν τυχούσαν ἡμιευθεῖαν Ax ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν διαδοχικῶς δύο τμήματα $A\Delta = \mu$ καὶ $\Delta E = \nu$ (σχ. 264). Φέρομεν τὴν EB καὶ ἐκ τοῦ Δ παράλληλον πρὸς αὐτήν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ Γ . Τότε εἶναι προφανῶς

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{A\Delta}{\Delta E} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Παρατήρησις. Διὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ, ὁ λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων, τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δύναται νὰ μεταφερθῇ διὰ παραλλήλων εὐθειῶν, εἰς τὸν λόγον ἀντιστοίχων πρὸς αὐτὰ εὐθυγράμμων τμημάτων ἐπὶ οἰασδήποτε ἄλλης εὐθείας.

A'.

421. Τρεις παράλληλοι ευθείαι (e_1), (e_2), (e_3) διατεταγμένοι κατά την σειράν αυτήν, απέχουν αι δύο πρώται απόστασιν 2α και η δεύτερα με την τρίτην απόστασιν 5α . Εύθεϊα τέμνουσα αὐτάς εἰς τὰ Α, Β, Γ, ἀντιστοίχως ἔχει $AB = 3\alpha$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ τμήμα ΒΓ.

422. Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, ἐὰν εἶναι $AG = 21\alpha$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ τμήμα ΒΓ.

423. Τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $AB = 9\lambda$ καὶ $AG = 15\lambda$. Ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους τοῦ Κ φέρομεν εὐθεϊαν παράλληλον τῆς ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τμήματα ΑΔ καὶ ΓΕ.

424. Δίδεται τραπέζιον ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) μὲ $AD = 6\alpha$ καὶ $B\Gamma = 4\alpha$. Ἐπὶ τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ λαμβάνομεν σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $AE = \frac{3\alpha}{2}$ καὶ $BZ = \alpha$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπέζιου.

425. Εὐθύγραμμον τμήμα ΑΒ νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία τμήματα ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 1, 3, 5.

426. Νὰ εὐρεθῇ τὸ κέντρον βάρους τριγώνου ΑΒΓ χωρὶς νὰ ἀχθῇ διάμεσος.

427. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ὀρίζεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς διαμέσου ΑΔ, τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Δείξατε ὅτι $\frac{ZA}{ZF} = \frac{1}{2}$.

428. Εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν διάμεσον ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εἰς τὰ Ε, Ζ, Η ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι εἶναι $\frac{AE}{AH} = \frac{AB}{AG}$.

429. Ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεϊαν τέμνουσαν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι εἶναι $\frac{EA}{EB} = \frac{ZA}{ZF}$.

430. Ἐκ σημείου Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν $DE \parallel B\Gamma$, ἐκ τοῦ Ε φέρομεν $EZ \parallel AB$ καὶ ἐκ τοῦ Ζ φέρομεν $ZH \parallel \Gamma A$. Δείξατε ὅτι εἶναι $\frac{DA}{AB} = \frac{HB}{HA}$.

431. Εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἡ ἐκ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ τέμνει τὴν ΒΔ εἰς τὸ Ε καὶ ἡ ἐκ τοῦ Ε παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Δείξατε ὅτι εἶναι $BZ \parallel AD$.

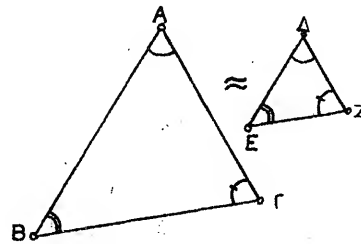
ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

268. Ὅρισμός. Δύο τρίγωνα καλοῦνται ὅμοια, ὅταν εἶναι ἰσογώνια, ἤτοι ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

Αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ καλοῦνται ὁμόλογοι πλευραί. Διὰ τὴν ὁμοιότητα δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ χρησιμοποιοῦμεν τὸν συμβολισμὸν \approx , γράφομεν δηλαδή (σχ. 265).

$$(1) \quad \triangle AB\Gamma \approx \triangle \Delta EZ.$$

Ἐφιστᾶται ἡ προσοχὴ εἰς τὴν σειράν τῆς ἀναγραφῆς τῶν γραμμάτων



Σχ. 265

A, B, Γ καὶ Δ, E, Z . Πρέπει νὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε αἱ κορυφαί, εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν ἴσαι γωνίαι διὰ τὰ δύο ὅμοια τρίγωνα, νὰ ἀναγράφονται μὲ τὴν αὐτὴν σειρὰν. (Τοῦτο δὲν εἶναι ἀναγκαῖον, ἀλλὰ ἔχει μόνον πρακτικὴν σημασίαν). Ἐκ τῆς σχέσεως (1) ἔπεται ἀμέσως τότε ὅτι εἰς τὰ δύο τρίγωνα εἶναι $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ καὶ $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$ ἐπὶ πλέον δὲ ὅτι τὰ τρία ζεύγη τῶν ὁμολόγων πλευρῶν εἶναι τὰ $(AB, \Delta E)$, $(B\Gamma, EZ)$ καὶ $(\Gamma A, Z\Delta)$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων, ἔπονται αἱ ἑξῆς ιδιότητες :

i) Πᾶν τρίγωνον $AB\Gamma$, εἶναι ὅμοιον πρὸς ἑαυτό, ἥτοι εἶναι $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{AB\Gamma}$ (ἀνακλαστική).

ii) Ἐὰν εἶναι $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\overset{\Delta}{\Delta EZ} \approx \overset{\Delta}{AB\Gamma}$ (συμμετρική).

iii) Ἐὰν εἶναι $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$ καὶ $\overset{\Delta}{\Delta EZ} \approx \overset{\Delta}{H\Theta I}$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{H\Theta I}$ (μεταβατική).

Ἄρα ἡ σχέσις τῆς ὁμοιότητος εἶναι **σχέσις ἰσοδυναμίας**.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ὁμοιότητος δύο τριγώνων ἔπονται τὰ ἑξῆς πορίσματα.

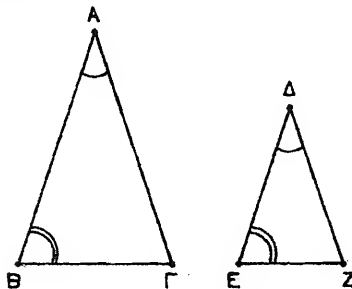
Πόρισμα I. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας τῶν ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, τότε εἶναι ὅμοια, διότι κατὰ τὴν § 105, πόρ. II ἔχουν καὶ τὴν τρίτην γωνίαν αὐτῶν ἴσην.

Πόρισμα II. Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν μίαν τῶν ὀξείων γωνιῶν τῶν ἴσην, εἶναι ὅμοια.

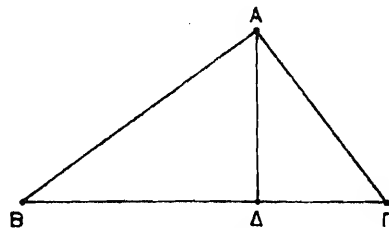
Πόρισμα III. Ἐὰν δύο ἰσοσκελεῖ τρίγωνα ἔχουν τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς τῶν ἴσων πλευρῶν ἴσην, ἢ μίαν τῶν παρὰ τὴν βάσιν τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαν ἴσην, τότε εἶναι ὅμοια (σχ. 266).

Πόρισμα IV. Τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου διαιρεῖ τοῦτο εἰς δύο ἄλλα ὀρθογώνια τρίγωνα, ὅμοια πρὸς τὸ ἀρχικὸν καὶ μεταξύ τῶν ὅμοια.

Πράγματι $\overset{\Delta}{A\Delta B} \approx \overset{\Delta}{\Gamma\Delta B}$ (σχ. 267), διότι εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουν τὴν γωνίαν \widehat{B} κοινήν.



Σχ. 266



Σχ. 267

Ὅμοιος $\triangle \hat{A}A \approx \triangle \hat{A}B$, διότι εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουν τὴν γωνίαν $\hat{\Gamma}$ κοινήν. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\triangle \hat{A}B \approx \triangle \hat{A}A$.

269. Θεώρημα. Δύο ὅμοια τρίγωνα, ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς τῶν ἀναλόγους.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $\triangle \hat{A}B\Gamma \approx \triangle \hat{A}E\Delta$ (σχ. 268). Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB λαμβάνομεν τμήμα $AE' = \Delta E$ καὶ ἐκ τοῦ E' φέρομεν παράλληλον τῆς BΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AΓ εἰς τὸ Z'. Τότε εἶναι $\triangle \hat{A}E'Z' = \triangle \hat{A}E\Delta$ ὡς ἔχοντα $\hat{A} = \hat{A}$, $\hat{E'} = \hat{B} = \hat{E}$ καὶ $AE' = \Delta E$. Ἄρα $AZ' = \Delta Z$ καὶ $E'Z' = EZ$ καὶ τότε (§ 265, πορ.) εἶναι :

$$(1) \quad \frac{AB}{AE'} = \frac{A\Gamma}{AZ'} \Rightarrow \frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}.$$

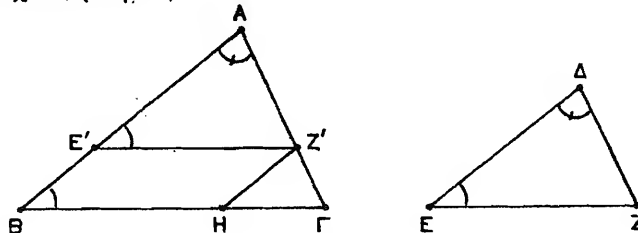
Ἐκ τοῦ Z' φέρομεν παράλληλον τῆς AB, ἡ ὁποία τέμνει τὴν BΓ εἰς τὸ H. Τότε τὸ τετράπλευρον $E'Z'HB$ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἄρα $BH = E'Z' = EZ$. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$(2) \quad \frac{A\Gamma}{AZ'} = \frac{B\Gamma}{BH} \Rightarrow \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}.$$

Ἀπὸ τὰς δευτέρας ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2), ἔπεται ὅτι :

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}.$$

Παρατήρησις. Ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα (1) εἶναι καὶ ἡ $AB \cdot AZ' = AE' \cdot A\Gamma$, ὅπου τὰ γινόμενα τῶν μελῶν τῆς ἐρμηνεύονται (πρὸς τὸ παρὸν) ὡς γινόμενα τῶν μέτρων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τὰ ὁποῖα περιέχουν (σχέσις μέτρων).



Σχ. 268

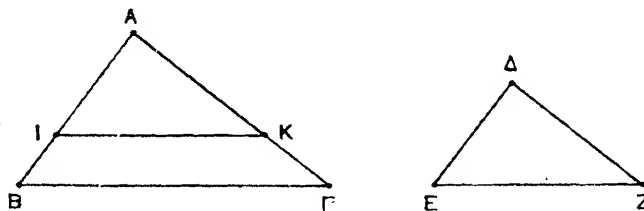
270. Θεώρημα (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευρὰς τῶν ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ ΔEZ (σχ. 269), διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει :

$$(1) \quad \frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}.$$

Ἐπὶ τῆς AB λαμβάνομεν τμήμα $AI = \Delta E$ καὶ ἐκ τοῦ I φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν $B\Gamma$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AG εἰς τὸ K . Εἶναι προφανῶς

$$(2) \quad \triangle AB\Gamma \approx \triangle AIK,$$



Σχ. 269

διότι εἶναι ἰσογώνια. Ἄρα κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ εἶναι :

$$(3) \quad \frac{AB}{AI} = \frac{AG}{AK} = \frac{B\Gamma}{IK}$$

Ἄλλὰ τὰ πρῶτα μέλη τῶν (1) καὶ (3) εἶναι ἴσα, διότι $AI = \Delta E$. Ἄρα

$$\theta\acute{\alpha} \text{ εἶναι καὶ } \frac{AG}{\Delta Z} = \frac{AG}{AK} \text{ καὶ } \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{B\Gamma}{IK} \text{ ἐκ τῶν ὁποίων ἔπεται :}$$

$$\Delta Z = AK \text{ καὶ } EZ = IK \text{ ἀντιστοίχως.}$$

Ἐπομένως εἶναι $\triangle EZ = \triangle IK$ (Π - Π - Π) καὶ λόγω τῆς σχέσεως (2) λαμβάνομεν

$$\triangle AB\Gamma \approx \triangle EZ.$$

Παρατήρησις. Ὁ λόγος δύο ὁμολόγων πλευρῶν δύο ὁμοίων τριγώνων καλεῖται λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν.

271. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν, εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ ΔEZ (σχ. 269) διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει :

$$(1) \quad \hat{A} = \hat{\Delta} \text{ καὶ } \frac{AB}{\Delta E} = \frac{AG}{\Delta Z}$$

Ἐπὶ τῆς AB λαμβάνομεν $AI = \Delta E$ καὶ φέρομεν $IK \parallel B\Gamma$. Τότε εἶναι προφανῶς :

$$(2) \quad \triangle AB\Gamma \approx \triangle AIK$$

καὶ ἐπομένως :

$$(3) \quad \frac{AB}{AI} = \frac{AG}{AK}$$

Τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (3) εἶναι ἴσα, διότι $\Delta E = AI$ ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα θὰ εἶναι καί :

$$\frac{AG}{\Delta Z} = \frac{AG}{AK}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται ὅτι $AK = \Delta Z$.

Ἐπομένως $\hat{A}\hat{I}\hat{K} = \hat{\Delta}\hat{E}\hat{Z}$ (Π - Γ - Π). Ἀρα, λόγω τῆς σχέσεως (2), ἔπεται :

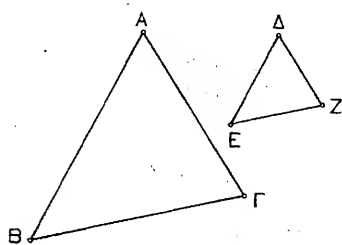
$$\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} \approx \hat{\Delta}\hat{E}\hat{Z}.$$

Πόρισμα. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν τὰς καθέτους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους.

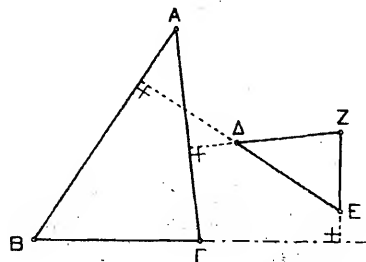
272. Θεώρημα. Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλήλους ἢ καθέτους, μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν τὰ τρίγωνα $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ καὶ $\hat{\Delta}\hat{E}\hat{Z}$, τὰ ὅποια ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλήλους (σχ. 270) ἢ καθέτους (σχ. 271), μίαν πρὸς μίαν. Τότε τὰ πιθανὰ ἐνδεχόμενα εἶναι τὰ ἐξῆς (§§ 94, 95) :

$$\begin{array}{llll} \text{i)} \quad \hat{A} + \hat{\Delta} = 2^{\circ} & \text{ii)} \quad \hat{A} = \hat{\Delta} & \text{iii)} \quad \hat{A} = \hat{\Delta} & \text{iv)} \quad \hat{A} = \hat{\Delta} \\ \hat{B} + \hat{E} = 2^{\circ} & \hat{B} + \hat{E} = 2^{\circ} & \hat{B} = \hat{E} & \hat{B} = \hat{E} \\ \hat{\Gamma} + \hat{Z} = 2^{\circ} & \hat{\Gamma} + \hat{Z} = 2^{\circ} & \hat{\Gamma} + \hat{Z} = 2^{\circ} & \hat{\Gamma} = \hat{Z} \end{array}$$



Σχ. 270



Σχ. 271

Τὸ ἐνδεχόμενον (i) δὲν δύναται νὰ συμβαίνει καθ' ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν καὶ τῶν δύο τριγώνων θὰ ἦτο $6^{\circ} > 4^{\circ}$, ὅπερ ἄτοπον (§ 105).

Τὸ ἐνδεχόμενον (ii) ὁμοίως δὲν δύναται νὰ συμβαίνει, καθ' ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν καὶ τῶν δύο τριγώνων θὰ ἦτο

$$4^{\circ} + \hat{A} + \hat{\Delta} > 4^{\circ}$$

Τὸ ἐνδεχόμενον (iii) δύναται νὰ συμβαίνει μόνον ὅταν εἶναι $\hat{\Gamma} = \hat{Z} = 1^{\circ}$, διότι αἱ δύο προηγούμεναι ἰσότητες $\hat{A} = \hat{\Delta}$ καὶ $\hat{B} = \hat{E}$ συνεπάγονται καὶ τὴν $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$. Τότε ὁμοῦς τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὡς ἰσογώνια.

Τέλος τὸ ἐνδεχόμενον (iv) δὲν ἔχομεν λόγους νὰ τὸ ἀποκλείσωμεν, συνεπῶς τοῦτο εἶναι τὸ μόνον τὸ ὅποιον δύναται νὰ συμβαίνει (ἢ περιπτώσεις iii εἶναι μερικὴ περίπτωσης τῆς iv). Ἀρα τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

273. Θεώρημα. Ἐάν εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ὁ λόγος τῶν ὑποτείνουσών εἶναι ἴσος μετὰ τὸν λόγον δύο καθέτων πλευρῶν, ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ ΔEZ (σχ. 272) διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει:

$$(1) \quad \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{AB}{\Delta E}$$

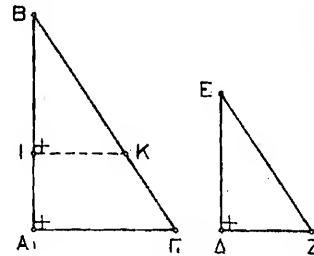
Ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας $B\Gamma$ λαμβάνομεν τμήμα

$$(2) \quad BK = EZ \text{ καὶ φέρομεν } KI \parallel \Gamma A.$$

Τότε εἶναι προφανῶς

$$(3) \quad \triangle AB\Gamma \approx \triangle IBK \text{ καὶ ἐπομένως:}$$

$$(4) \quad \frac{B\Gamma}{BK} = \frac{AB}{IB}$$



Σχ. 272

Τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (4) τὰ πρῶτα μέλη εἶναι ἴσα λόγῳ τῆς (2). Ἀρα θὰ εἶναι καὶ τὰ δευτέρα μέλη ἴσα, ἥτοι

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{AB}{IB}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται

$$(5) \quad IB = \Delta E$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (5) ἔπεται ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα IBK καὶ ΔEZ εἶναι ἴσα καὶ λόγῳ τῆς (3) ἔχομεν:

$$\triangle AB\Gamma \approx \triangle EZ$$

274. Σύνοψις τῶν περιπτώσεων ὁμοιότητος τριγώνων. Ἐξ ὅλων τῶν προηγουμένων θεωρημάτων συνάγεται ὅτι δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν :

- i) Δύο γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν
- ii) Τὰς πλευρὰς τῶν ἀναλόγους.
- iii) Μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν.
- iv) Τὰς πλευρὰς τῶν παραλλήλους, μίαν πρὸς μίαν.
- v) Τὰς πλευρὰς τῶν καθέτους, μίαν πρὸς μίαν.

Εἰδικῶς διὰ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ἰσχύει ἡ πρότασις :

Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν μίαν ὀξείαν γωνίαν ἴσην ἢ δύο πλευρὰς ἀναλόγους, μίαν πρὸς μίαν, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν καθέτου πρὸς κάθετον καὶ ὑποτείνουσας πρὸς ὑποτείνουσας.

275. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἀς θεωρήσωμεν δύο ὅμοια τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ (σχ. 273) καὶ ἔστω λ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν, ἥτοι :

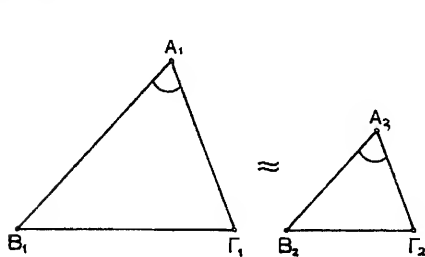
$$(1) \quad \lambda = \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1\Gamma_1}{A_2\Gamma_2} = \frac{B_1\Gamma_1}{B_2\Gamma_2} = \frac{A_1B_1 + A_1\Gamma_1 + B_1\Gamma_1}{A_2B_2 + A_2\Gamma_2 + B_2\Gamma_2} = \frac{2\tau_1}{2\tau_2}, \text{ ὅπου}$$

$2\tau_1$ καὶ $2\tau_2$ αἱ περίμετροι τῶν τριγώνων $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ ἀντιστοίχως.

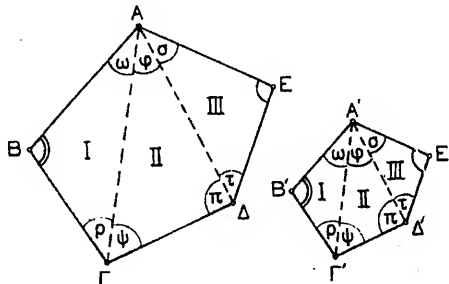
Πόρισμα. Ἐὰν τριγώνου τὰ μήκη τῶν πλευρῶν πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ ἀριθμὸν τινα λ , τότε ἡ περίμετρος αὐτοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν λ .

ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

276. Ὅρισμός. Δύο πολύγωνα καλοῦνται ὅμοια, ὅταν δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα, ὅμοια ἀνὰ δύο καὶ ὁμοίως κείμενα (σχ. 274).



Σχ. 273



Σχ. 274

Δύο ὅμοια πολύγωνα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, ὑπάρχει δὲ ἀμφοιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ κορυφῶν γωνιῶν καὶ πλευρῶν τῶν δύο πολυγώνων, ἀντίστοιχος ἐκείνης τῶν ὁμοίων τριγώνων. Ὅλα τὰ ζεύγη ἀντιστοιχῶν στοιχείων καλοῦνται **ὁμολόγα**. Διὰ τὸν συμβολισμόν δύο ὁμοίων πολυγώνων χρησιμοποιοῦμεν τὸ αὐτὸ σύμβολον \approx τῶν ὁμοίων τριγώνων.

277. Θεώρημα. Δύο ὅμοια πολύγωνα ἔχουν τὰς ὁμολόγους γωνίας τῶν ἰσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν τὰ ὅμοια πολύγωνα $AB\Gamma\Delta E$ καὶ $A'B'\Gamma'\Delta'E'$ (σχ. 274), τὰ ὁποῖα ἔχομεν χωρίσει εἰς ζεύγη ὁμοίων τριγώνων ἥτοι :

- (I) $\triangle AB\Gamma \approx \triangle A'B'\Gamma'$
- (II) $\triangle A\Gamma\Delta \approx \triangle A'\Gamma'\Delta'$
- (III) $\triangle A\Delta E \approx \triangle A'\Delta'E'$

i) Τότε, λόγῳ τῶν ὁμοίων τριγώνων, εἶναι : $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{E} = \widehat{E'}$ ἐνῷ αἱ γωνίαι \widehat{A} , $\widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Delta}$ τοῦ ἑνὸς πολυγώνου εἶναι ἰσαι ἀντιστοίχως μὲ τὰς $\widehat{A'}$, $\widehat{\Gamma'}$ καὶ $\widehat{\Delta'}$ τοῦ ἄλλου ὡς ἀθροίσματα ἰσῶν γωνιῶν.

ii) Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων (I) ἔχομεν :

$$(1) \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$

ἐνῷ ἐκ τῶν ἐπίσης ὁμοίων τριγώνων (II) καὶ (III) ἔχομεν ἀντιστοίχως :

$$(2) \quad \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{A\Delta}{A'\Delta'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

278. Θεώρημα (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). Ἐὰν δύο πολύγωνα ἔχουν τὰς γωνίας τῶν ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ ὁμοίως κειμένας καὶ τὰς πλευράς, τὰς κατὰ τὴν ἰδίαν διάταξιν περιεχούσας τὰς ἴσας γωνίας, ἀναλόγουις, εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν πάλιν τὰ πολύγωνα $AB\Gamma\Delta E$ καὶ $A'B'\Gamma'\Delta'E'$ (σχ. 274) τὰ ὅποια ὑποθέτομεν ὅτι ἔχουν

$$(1) \quad \widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}, \widehat{\Delta} = \widehat{\Delta'}, \widehat{E} = \widehat{E'} \text{ καὶ}$$

$$(2) \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ταῦτα δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς ὅμοια τρίγωνα καὶ ὁμοίως κείμενα. Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὰς διαγωνίους $A\Gamma$, $A\Delta$, $A'\Gamma'$ καὶ $A'\Delta'$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι :

$$(I) \quad \triangle AB\Gamma \approx \triangle A'B'\Gamma'$$

διότι ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξύ ἀναλόγων πλευρῶν. Τότε θὰ εἶναι :

$$(3) \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$

Ἐπὶ πλέον δὲ ἔχομεν

$$(4) \quad \widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{A'\Gamma'\Delta'}$$

ὡς διαφορὰς ἴσων γωνιῶν. Ἀρα ἐκ τῶν (2), (3) καὶ (4) ἔπεται ὅτι :

$$(II) \quad \triangle A\Gamma\Delta \approx \triangle A'\Gamma'\Delta'$$

ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξύ ἀναλόγων πλευρῶν.

Ὅμοίως λαμβάνομεν :

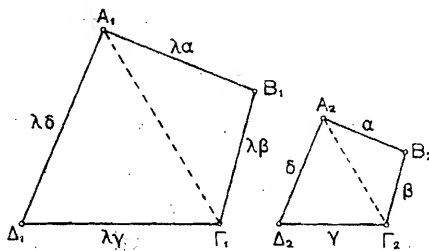
$$(III) \quad \triangle A\Delta E \approx \triangle A'\Delta'E'$$

ἄρα τὰ δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια.

Σημείωσις. Ὁ λόγος δύο ὁμολόγων πλευρῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων, καλεῖται **λόγος ὁμοιότητος** τῶν πολυγώνων.

279. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων πολυγώνων, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1 \approx A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$ (σχ. 275) καὶ λ ς καλέσωμεν



Σχ. 275

α, β, γ και δ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ $A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$. Ἄν λ εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν, τότε αἱ πλευραὶ τοῦ $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ θὰ εἶναι $\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma$ καὶ $\lambda\delta$ ἀντιστοίχως.

Ἄρα ὁ λόγος τῶν περιμέτρων τῶν δύο πολυγώνων θὰ εἶναι :

$$\begin{aligned} \frac{A_1B_1 + B_1\Gamma_1 + \Gamma_1\Delta_1 + \Delta_1A_1}{A_2B_2 + B_2\Gamma_2 + \Gamma_2\Delta_2 + \Delta_2A_2} &= \frac{\lambda\alpha + \lambda\beta + \lambda\gamma + \lambda\delta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} = \\ &= \frac{\lambda(\alpha + \beta + \gamma + \delta)}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} = \lambda \end{aligned}$$

ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

432. Δείξατε ὅτι τὰ κέντρα βάρους τῶν τεσσάρων τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα τυχὸν κυρτὸν τετράπλευρον διαιρεῖται ὑπὸ τῶν διαγωνίων του, εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

433. Δείξατε ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τραπεζίου διαιρεῖ ἐκάστην διαγώνιον εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις του.

434. Διὰ τῆς κορυφῆς B τριγώνου ABΓ ἄγομεν εὐθεῖαν ΒΔ τέμνουσαν τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς ΑΓ εἰς τὸ Δ καὶ τοιαύτην, ὥστε νὰ εἶναι $\widehat{\Gamma B \Delta} = \widehat{A}$. Δείξατε ὅτι εἶναι $B\Delta^2 = \Delta A \cdot \Delta \Gamma$.

435. Εἰς τρίγωνον ABΓ φέρομεν τὰ ὕψη ΑΔ καὶ ΒΕ. Ἐάν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον, δείξατε ὅτι α) $HA \cdot HD = HB \cdot HE$ καὶ β) $\widehat{\Gamma A \cdot \Gamma E} = \widehat{\Gamma B \cdot \Gamma \Delta}$.

436. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ABΓ ($\widehat{A} = 1^\circ$) φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ ἐκ τοῦ Δ φέρομεν $\Delta E \perp AB$. Δείξατε ὅτι εἶναι $A\Delta^2 = \Delta \Gamma \cdot \Delta E$.

437. Αἱ βάσεις ἐνὸς τραπεζίου ἔχουν μήκη α καὶ 3α καὶ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ β καὶ 2β . Ἐάν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ τέμνονται εἰς τὸ Ο, νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου μὲ κορυφὴν τὸ Ο καὶ βάσιν τὴν μεγαλυτέραν τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου.

438. Ἐστω κύκλος (Ο, R) καὶ AB μία χορδὴ αὐτοῦ. Εἰς τὸ B φέρομεν ἐφαπτομένην (ε) καὶ ἐκ τοῦ A φέρομεν τὴν $AG \perp (ε)$. Δείξατε ὅτι εἶναι $AB^2 = 2R \cdot AG$.

439. Εἰς τυχὸν τετράπλευρον ABΓΔ ἄγομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ. Ἐάν E καὶ Z εἶναι τὰ κέντρα βάρους τῶν τριγώνων ABΓ καὶ ΑΔΓ, δείξατε ὅτι εἶναι $EZ \parallel \frac{BD}{3}$.

440. Δίδεται τρίγωνον ABΓ. Δείξατε ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του εἶναι κορυφαὶ τριγώνου ὁμοίου πρὸς τὸ ABΓ.

441. Ἀπὸ τυχὸν σημείου A τῆς πλευρᾶς OX δοθείσης ὀξείας γωνίας XOY φέρομεν κάθετον AB ἐπὶ τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς. Δείξατε ὅτι ὁ λόγος $\frac{AB}{AO}$ εἶναι σταθερὸς (ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ A).

442. Τριγώνου ABΓ, ἡ διχοτόμος ΑΔ τέμνει τὸν περιγεγραμμένον κύκλον εἰς τὸ E. Δείξατε ὅτι εἶναι α) $AB \cdot AG = AD \cdot AE$, β) $EB^2 = EA \cdot ED$.

443. Διὰ τῆς κορυφῆς A ἰσοσκελοῦς τριγώνου ABΓ ($AB = AG$) φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ Δ καὶ τὸν περιγεγραμμένον κύκλον εἰς τὸ E. Δείξατε ὅτι εἶναι $AB^2 = AD \cdot AE$.

444. Δείξτε ότι δύο παραλληλόγραμμα με μίαν γωνίαν ίσην ή παραπληρωματικήν και τὰς προσκειμένας πλευράς ἀνάλογους, εἶναι ὅμοια.

445. Δείξτε ότι ἐάν δύο παραλληλόγραμμα ἔχουν τὰς διαγωνίους των ἀνάλογους καὶ αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν ἴσας γωνίας, εἶναι ὅμοια.

446. Ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου ἐνὸς κύκλου ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μιᾶς ἐφαπτομένης εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην.

447. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἐάν Δ καὶ E εἶναι σημεῖα τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$, τοιαῦτα ὥστε $\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Gamma AE}$ καὶ Z εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς $A\Delta$ μετὰ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ $AB\Gamma$ κύκλου, δείξτε ότι εἶναι $\beta \cdot \gamma = AZ \cdot AE$.

B'.

448. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = 1^\circ$. Ἐάν $A\Delta$ εἶναι τὸ ὕψος του, δείξτε ότι εἶναι $A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta \Gamma$.

449. Ἐστω E τυχὸν σημεῖον τῆς διαγωνίου BD παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Φέρομεν τὴν AE , ἡ ὁποία τέμνει τὰς $B\Gamma$ καὶ $\Gamma\Delta$ εἰς τὰ Z καὶ H ἀντιστοίχως. Δείξτε ότι εἶναι $AE^2 = EZ \cdot EH$.

450. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος. Φέρομεν τὴν διάμετρον $A\Delta$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ E καὶ ἐκ τοῦ E φέρομεν τὰς $EZ \perp AB$ καὶ $EH \perp A\Gamma$. Δείξτε ότι εἶναι $ZH \parallel B\Gamma$.

451. Δείξτε ότι εἰς πᾶν τρίγωνον ἐκάστη κορυφή καὶ τὰ ἔχνη τῶν δύο ἄλλων ὕψων εἶναι κορυφαὶ τριγώνου ὁμοίου πρὸς αὐτό.

452. Δείξτε ότι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τραπέζιου διχοτομεῖ τὸ τμήμα πού ἄγεται ἀπὸ αὐτὸ παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπέζιου καὶ ἔχει τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

453. Δείξτε ότι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τραπέζιου διχοτομεῖ τὸ τμήμα πού ἄγεται ἀπὸ αὐτὸ παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπέζιου καὶ ἔχει τὰ ἄκρα του εἰς τὰς προεκτάσεις τῶν διαγωνίων.

454. Ἀπὸ σημείων Σ κείμενον ἐκτὸς δοθέντος κύκλου φέρομεν τὰ ἐφαπτόμενα τμήματα ΣA καὶ ΣB καὶ μίαν τυχοῦσαν τέμνουσαν $\Sigma \Gamma\Delta$. Δείξτε ότι εἶναι $A\Gamma \cdot B\Delta = A\Delta \cdot B\Gamma$.

455. Ἐάν α καὶ β εἶναι αἱ βάσεις τραπέζιου, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος πού ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἔχει τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

456. Ἐστω τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ $A\Delta$, BE , ΓZ τὰ τρία ὕψη του. Δείξτε ότι εἶναι $\Delta B \cdot \Delta \Gamma = \Delta E \cdot \Delta Z$.

457. Ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου ἐνὸς κύκλου ἀπὸ χορδὴν εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας πού ἄγονται εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς.

ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑ

280. Ὅρισμοί. Δοθέντος σταθεροῦ σημείου O καὶ θετικοῦ ἀριθμοῦ k , ὀρίζομεν :

i) Ὅμόρροπον ὁμοιοθεσίαν τὴν ἀπεικόνισιν τυχόντος σημείου A εἰς σημεῖον A' τῆς ἡμιευθείας OA , οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $OA' = k \cdot OA$.

ii) Ἀντίρροπον ὁμοιοθεσίαν τὴν ἀπεικόνισιν τυχόντος σημείου A εἰς σημεῖον A' τῆς ἀντιθέτου ἡμιευθείας πρὸς τὴν OA , οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $OA' = k \cdot OA$.

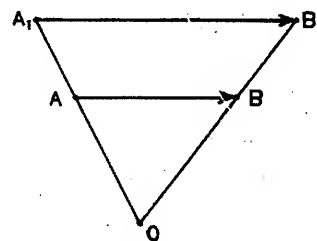
Τὸ σημεῖον O καλεῖται κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας καὶ ὁ ἀριθμὸς k λόγος αὐτῆς. Μία ὁμοιοθεσία μὲ κέντρον σημεῖον O καὶ λόγον k , συμβολίζεται μὲ $F(O, k)$. Ἐὰν μέσῳ αὐτῆς, σημεῖον A ἀπεικονίζεται εἰς σημεῖον A' , συμβολίζομεν :

$$A \xrightarrow{F(O, k)} A'$$

281. Θεώρημα. Ἐν προσανατολισμένον εὐθύγραμμον τμήμα \vec{AB} ἀπεικονίζεται μέσῳ μιᾶς ὁμορρόπου ὁμοιοθεσίας $F(O, k)$ εἰς προσανατολισμένον τμήμα $\vec{A_1B_1}$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\vec{A_1B_1} = k \cdot \vec{AB}$ (ὁμόρροπον), ἐνῶ μέσῳ μιᾶς ἀντιρρόπου ὁμοιοθεσίας $F(O, k)$ εἰς προσανατολισμένον τμήμα $\vec{A_2B_2}$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\vec{A_2B_2} = -k \cdot \vec{AB}$ (ἀντίρροπον).

Ἀπόδειξις. i) Ἐπειδὴ ἡ ὁμοιοθεσία εἰς ναι ὁμόρροπος, ἔχομεν (σχ. 276) :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{OA_1} = k \cdot \vec{OA} \\ \vec{OB_1} = k \cdot \vec{OB} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{\vec{OA_1}}{\vec{OA}} = k \\ \frac{\vec{OB_1}}{\vec{OB}} = k \end{array} \right\} \quad (1)$$



Σχ. 276

Τὰ δεύτερα μέλη τῶν σχέσεων (1) εἶναι ἴσα, ἄρα θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{\vec{OA_1}}{\vec{OA}} = \frac{\vec{OB_1}}{\vec{OB}}$$

Τότε $\triangle OA_1B_1 \approx \triangle OAB$, διότι ἐπὶ πλέον ἔχουν καὶ τὴν γωνίαν των εἰς τὸ O

κοινήν. Ἀρα $\frac{\vec{A_1B_1}}{\vec{AB}} = \frac{\vec{OA_1}}{\vec{OA}}$ καὶ λόγῳ τῆς (1) $\Rightarrow \frac{\vec{A_1B_1}}{\vec{AB}} = k \Rightarrow$

$$\vec{A_1B_1} = k \cdot \vec{AB} \Rightarrow \vec{A_1B_1} \uparrow \uparrow \vec{AB} \quad (\text{διότι εἶναι } k > 0).$$

ii) Εἰς τὴν ἀντίρροπον ὁμοιοθεσίαν, ἐπειδὴ τὰ \vec{OA} καὶ \vec{OA}_2 εἶναι ἀντίρροπα ἐξ ὁρισμοῦ, ἔχομεν (σχ. 277).

$$\left. \begin{aligned} \vec{OA}_2 &= -k \cdot \vec{OA} \\ \vec{OB}_2 &= -k \cdot \vec{OB} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{\vec{OA}_2}{\vec{OA}} &= -k \\ \frac{\vec{OB}_2}{\vec{OB}} &= -k \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

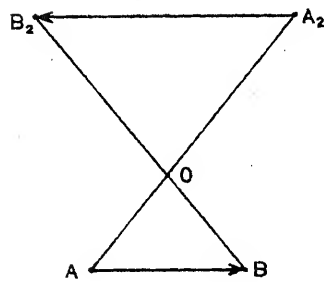
Τὰ δεύτερα μέλη τῶν σχέσεων (2) εἶναι

$$\text{ἴσα, ἄρα θὰ εἶναι καὶ } \frac{\vec{OA}_2}{\vec{OA}} = \frac{\vec{OB}_2}{\vec{OB}} \Rightarrow$$

$\triangle OA_2B_2 \approx \triangle OAB$, διότι ἔχουν καὶ τὰς γωνίας των εἰς τὸ O ἴσας

ὡς κατὰ κορυφήν. Ἀρα $\frac{A_2B_2}{AB} = \frac{OA_2}{OA}$ καὶ λόγῳ τῆς (2) $\Rightarrow \frac{A_2B_2}{AB} = -k$

$$\Rightarrow \vec{A_2B_2} = -k \cdot \vec{AB} \Rightarrow \vec{A_2B_2} \uparrow \downarrow \vec{AB} \quad (\text{διότι εἶναι } -k < 0).$$



Σχ. 277

282. Θεώρημα. Ἐὰν δύο προσανατολισμένα τμήματα εἶναι παράλληλα (ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα), ὑπάρχει ὁμοιοθεσία μέσῳ τῆς ὁποίας τὸ ἓν ἀπεικονίζεται ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Ἀπόδειξις. Ἀς θεωρήσωμεν τὰ ὁμόρροπα τμήματα \vec{AB} καὶ $\vec{A_1B_1}$ (σχ. 276). Φέρομεν τὰς AA_1 καὶ BB_1 , αἱ ὁποῖαι ἐν γένει τέμνονται εἰς σημεῖον O . Τότε εἶναι προφανῶς $\triangle OAB \approx \triangle OA_1B_1 \Rightarrow \frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = \frac{A_1B_1}{AB}$ καὶ ἐὰν θέσωμεν $\frac{A_1B_1}{AB} = k \Rightarrow OA_1 = k \cdot OA$ καὶ $OB_1 = k \cdot OB$, αἱ ὁποῖαι εἶναι χαρακτηριστικαὶ σχέσεις ὁμοιοθεσίας $F(O, k)$.

Ἐξαιρέσιν ἀποτελεῖ τὸ ἐνδεχόμενον $AB = A_1B_1$, διότι τότε αἱ AA_1 καὶ BB_1 θὰ εἶναι παράλληλοι. Συμβατικῶς δεχόμεθα ὅτι θὰ τέμνονται εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν καὶ ὁ λόγος ὁμοιοθεσίας θὰ εἶναι $k = 1$.

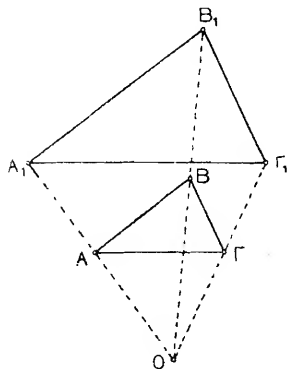
Ὁμοίως διὰ τὰ ἀντίρροπα τμήματα \vec{AB} καὶ $\vec{A_2B_2}$ (σχ. 277) ἔχομεν

$$\triangle OAB \approx \triangle OA_2B_2 \Rightarrow \frac{\vec{OA}_2}{\vec{OA}} = \frac{\vec{OB}_2}{\vec{OB}} = \frac{\vec{A_2B_2}}{\vec{AB}} = -k \Rightarrow \vec{OA}_2 = -k \cdot \vec{OA} \quad \text{καὶ}$$

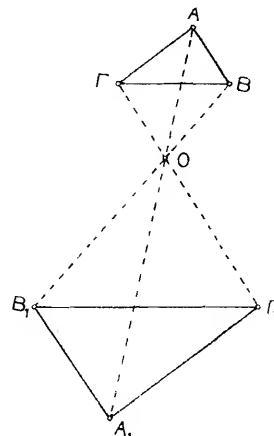
$$\vec{OB}_2 = -k \cdot \vec{OB} \Rightarrow A \xrightarrow{F(O, -k)} A_2 \quad \text{καὶ} \quad B \xrightarrow{F(O, -k)} B_2.$$

283. Θεώρημα. Κάθε τρίγωνον $AB\Gamma$ ἀπεικονίζεται μέσῳ ὁμοιοθεσίας $F(O, k)$ εἰς τρίγωνον $A_1B_1\Gamma_1$ ὅμοιον πρὸς τὸ $AB\Gamma$ μὲ λόγον ὁμοιότητος k .

Ἀπόδειξις. Τὸ θεώρημα ἰσχύει καὶ δι' ὁμόρροπον καὶ δι' ἀντίρροπον ὁμοιοθεσίαν (σχ. 278 καὶ 279), διότι (§ 280) καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εἶναι :



Σχ. 278

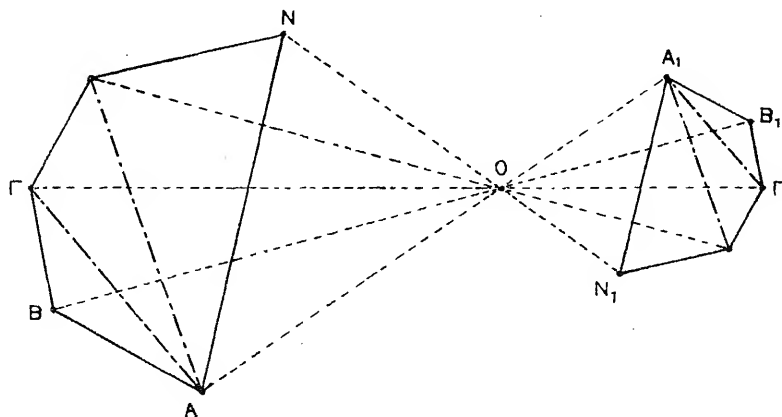


Σχ. 279

$$A_1B_1 = k \cdot AB, \quad B_1\Gamma_1 = k \cdot B\Gamma, \quad \Gamma_1A_1 = k \cdot \Gamma A \Rightarrow$$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1\Gamma_1}{B\Gamma} = \frac{\Gamma_1A_1}{\Gamma A} = k \Rightarrow \triangle A_1B_1\Gamma_1 \approx \triangle AB\Gamma.$$

Τὸ θεώρημα ἐπεκτείνεται καὶ διὰ τυχὸν πολύγωνον $AB\Gamma\dots N$ τὸ ὁποῖον, μέσῳ ὁμοιοθεσίας $F(O, k)$, ἀπεικονίζεται εἰς ὅμοιον πολύγωνον $A_1B_1\Gamma_1\dots N_1$



Σχ. 280

(σχ. 280) μὲ λόγον ὁμοιότητος k . Ἡ ἀπόδειξις γίνεται διὰ διαιρέσεως τοῦ πολυγώνου $AB\Gamma\dots N$ εἰς τρίγωνα, μὲ διαγωνίους ἐκ τῆς κορυφῆς A .

★ 284. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν, ὑπάρχει ὁμοιοθεσία ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Ἀπόδειξις 1₂) Ἐστω ὅτι δύο ὅμοια τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A_1B_1\Gamma_1$ ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλήλους, μίαν πρὸς μίαν καὶ ὁμορρόπους. (σχ. 281). Ἐάν εἶναι $\lambda \neq 1$ ὁ λόγος ὁμοιότητος, αἱ εὐθεῖαι AA_1 καὶ BB_1 τέμνονται εἰς σημεῖον O τοιοῦτον, ὥστε:

$$\triangle OAB \approx \triangle OA_1B_1.$$

Ἀρα:

$$(1) \quad \frac{OB}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \lambda.$$

Ὀμοίως αἱ εὐθεῖαι BB_1 καὶ $\Gamma\Gamma_1$ τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον O_1 τοιοῦτον ὥστε:

$$\triangle O_1B\Gamma \approx \triangle O_1B_1\Gamma_1.$$

Ἀρα:

$$(2) \quad \frac{O_1B}{O_1B_1} = \frac{B\Gamma}{B_1\Gamma_1} = \lambda.$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι:

$$\frac{OB}{OB_1} = \frac{O_1B}{O_1B_1} \Rightarrow \frac{OB}{OB_1 - OB} = \frac{O_1B}{O_1B_1 - O_1B} \Rightarrow \frac{OB}{BB_1} = \frac{O_1B}{BB_1} \quad \text{ἄρα } OB = O_1B$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται ὅτι $O \equiv O_1$, ἤτοι τὰ σημεῖα O καὶ O_1 ταυτίζονται ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ B . Τότε θὰ εἶναι καὶ

$$OA = \lambda \cdot OA_1, \quad OB = \lambda \cdot OB_1, \quad O\Gamma = \lambda \cdot O\Gamma_1,$$

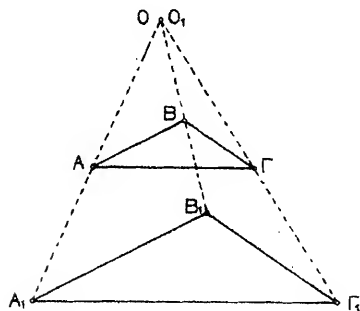
ἤτοι ὑπάρχει ὁμοιοθεσία $F(O, \lambda)$, ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τὸ $A_1B_1\Gamma_1$ ἐπὶ τοῦ $AB\Gamma$.

Ἐάν $\lambda = 1$, τὰ τετράπλευρα ABB_1A_1 καὶ $B\Gamma\Gamma_1B_1$ θὰ εἶναι παραλληλόγραμμα, ὁπότε

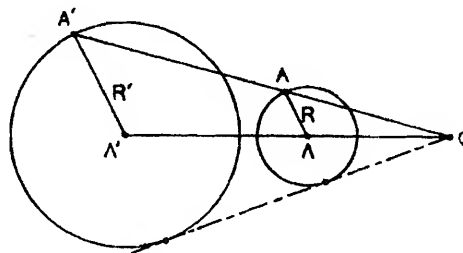
$$AA_1 \parallel BB_1 \parallel \Gamma\Gamma_1.$$

Τότε πάλιν ὑπάρχει ὁμοιοθεσία, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον ἔχει ἀπομακρυνθῇ εἰς τὸ ἄπειρον.

1₃) Ὀμοίως ἀποδεικνύεται τὸ θεώρημα καὶ ὅταν αἱ πλευραὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων εἶναι ἀντίρροποι.



Σχ. 281



Σχ. 282

ii) Τὸ θεώρημα ὁμοίως δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ διὰ δύο ὅμοια πολύγωνα ἔχοντα τὰς πλευρὰς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν, διότι ταῦτα δύνανται νὰ χωρισθοῦν, διὰ διαγωνίων ἐκ δύο ὁμολόγων κορυφῶν των, εἰς ὅμοια τρίγωνα καὶ ὁμοίως κείμενα, μὲ τὰς πλευρὰς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν (σχ. 280). Ἡ ἀπόδειξις παραλείπεται.

★ 285. Θεώρημα. Τὸ ὁμοιόθετον ἐνὸς κύκλου εἶναι κύκλος.

Ἀπόδειξις. Ἐστω (Λ, R) κύκλος καὶ $F(O, k)$ μία ὁμοιοθεσία (σχ. 282). Ἐάν Λ' εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ Λ κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν $F(O, k)$, τὸ Λ' εἶναι σταθερὸν σημεῖον ὡς εἰκὼν σταθεροῦ σημείου. Ἐστω A τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου. Τότε (§ 280) εἶναι

$$\Lambda A \xrightarrow{F(O, k)} \Lambda' A'$$

τοιούτον, ὥστε $\Lambda'A' = k \cdot \Lambda A = k \cdot R$. Ἄρα τὸ σημεῖον A' ἀνήκει εἰς κύκλον ἀκτίνου $R' = k \cdot R$, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁμοιόθετος τοῦ κύκλου (Λ, R) .

★ 286. Θεώρημα. Δύο κύκλοι (Λ_1, R_1) καὶ (Λ_2, R_2) ἔχουν δύο κέντρα ὁμοιοθεσίας.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τυχούσαν διάμετρον AB (σχ. 283) τοῦ κύκλου (Λ_2, R_2) καὶ τὴν ἀκτὶνα $\Lambda_1\Gamma$ τοῦ κύκλου (Λ_1, R_1) παράλληλον τῆς διαμέτρου AB . Ἐστω ὅτι αἱ ἀκτίνες $\Lambda_2 A$ καὶ $\Lambda_1 \Gamma$ εἶναι καὶ ὁμόρροποι. Τότε ἐφ' ὅσον $R_1 \neq R_2$, ἡ $A\Gamma$ τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς διακέντρου $\Lambda_1 \Lambda_2$ εἰς σημεῖον O_1 , τοιούτον ὥστε:

$$(1) \quad \frac{O_1 \Lambda_1}{O_1 \Lambda_2} = \frac{O_1 \Gamma}{O_1 A} = \frac{\Lambda_1 \Gamma}{\Lambda_2 A} = \frac{R_1}{R_2} = k.$$

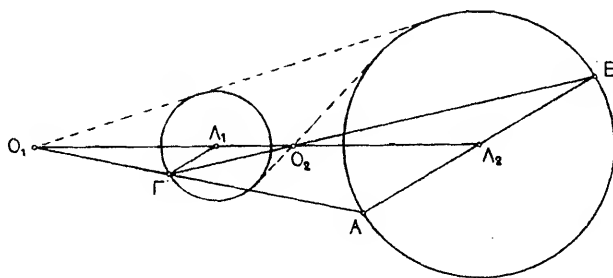
Ἐκ τῆς (1) ἔπεται ὅτι τὸ σημεῖον O_1 εἶναι σταθερόν, διότι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ ἀπὸ τὰ Λ_1 καὶ Λ_2 εἶναι σταθερός, καὶ τέλος εἶναι κέντρον ὁμοιοθεσίας, διότι:

$$(2) \quad O_1 \Gamma = k \cdot O_1 A,$$

ἥτοι ἀπεικονίζει τὸ τυχόν σημεῖον A τοῦ κύκλου (Λ_2, R_2) , ὅπως φαίνεται ἐκ τῆς σχέσεως (2), εἰς σημεῖον Γ τοῦ κύκλου (Λ_1, R_1) .

Ἐὰν φέρωμεν τὴν $B\Gamma$, αὕτη τέμνει τὴν διάκεντρον εἰς σημεῖον O_2 τοιούτον, ὥστε:

$$(3) \quad \frac{O_2 \Lambda_1}{O_2 \Lambda_2} = \frac{O_2 \Gamma}{O_2 B} = \frac{\Lambda_1 \Gamma}{\Lambda_2 B} = \frac{R_1}{R_2} = k.$$



Σχ. 283

Ἐξ αὐτῆς ἔπεται ὅτι τὸ σημεῖον O_2 εἶναι σταθερόν, διότι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ ἀπὸ τὰ Λ_1 καὶ Λ_2 εἶναι σταθερός καὶ τέλος εἶναι κέντρον ὁμοιοθεσίας διότι:

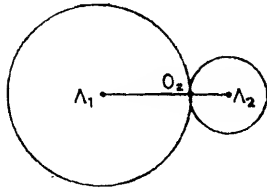
$$(4) \quad O_2 \Gamma = k \cdot O_2 B$$

ἥτοι ἀπεικονίζει διὰ τῆς σχέσεως (4), τὸ τυχόν σημεῖον B τοῦ κύκλου (Λ_2, R_2) εἰς σημεῖον Γ τοῦ κύκλου (Λ_1, R_1) .

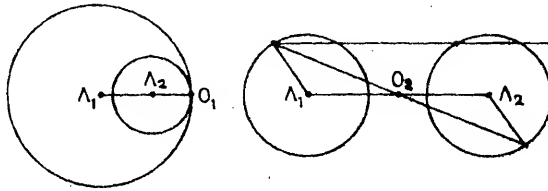
Συμπέρασμα. Δύο τυχόντες κύκλοι ἔχουν δύο κέντρα ὁμοιοθεσίας εὐρισκόμενα ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ διάκεντρος. Τὸ ἐν ἐξ αὐτῶν εὐρίσκεται μεταξύ τῶν δύο κέντρων τῶν κύκλων καὶ καλεῖται ἐσωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας, ἐνῶ τὸ ἄλλο εὐρίσκεται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς διακέντρου καὶ καλεῖται ἐξωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας.

Παρατηρήσεις. 1) Ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων, (ἐφ' ὅσον ὑπάρχει), διέρχεται ἀπὸ τὸ ἐξωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας, καὶ ἡ κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη (ἐφ' ὅσον ὑπάρχει), διέρχεται ἀπὸ τὸ ἐσωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας.

ii) Ἐάν οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται, τὸ σημεῖον ἐπαφῆς εἶναι τὸ ἐκ τῶν δύο κέντρων ὁμοιοθεσίας (σχ. 284).



Σχ. 284



Σχ. 285

iii) Ἐάν εἶναι $R_1 = R_2$, τὸ ἐξωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας ἀπομακρύνεται εἰς τὸ ἄπειρον καὶ τὸ ἐσωτερικὸν εὐρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς διακέντρου (σχ. 285).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΜΕ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

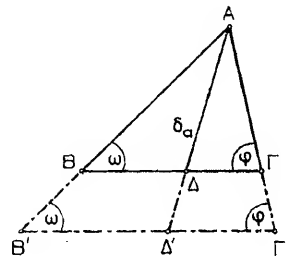
287. Παράδειγμα 1. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον $AB\Gamma$, τοῦ ὁποῖου δίδονται αἱ γωνίαι $\widehat{B} = \omega$, καὶ $\widehat{\Gamma} = \varphi$ καὶ ἡ διχοτόμος δ_α .

Λύσις. Ἐφ' ὅσον γνωρίζομεν δύο γωνίας τοῦ ζητούμενου τριγώνου, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τρίγωνον $AB'\Gamma'$ ὅμοιον πρὸς τὸ ζητούμενον (σχ. 286), δηλαδή μὲ $\widehat{B'} = \omega$ καὶ $\widehat{\Gamma'} = \varphi$. Φέρομεν τὴν διχοτόμον AD' αὐτοῦ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $AD = \delta_\alpha$. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον τῆς $B'\Gamma'$, ἡ ὁποία τέμνει τὰς AB' καὶ $A\Gamma'$ εἰς τὰ B καὶ Γ ἀντιστοίχως. Εἶναι φανερόν ὅτι τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἔχει $\widehat{B} = \widehat{B'} = \omega$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'} = \varphi$ καὶ διχοτόμον τὴν $AD = \delta_\alpha$.

Λύσις ὑπάρχει πάντοτε μία, ἐφ' ὅσον εἶναι $\omega + \varphi < 2\pi$.

288. Παράδειγμα 2. Εἰς δοθὲν τρίγωνον $AB\Gamma$, νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποῖου ἡ μία πλευρὰ νὰ εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς $B\Gamma$.

Ἀνάλυσις. Ἐστω ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἔχει ἐγγραφῇ τὸ τετράγωνον ΔEZH (σχ. 287) μὲ τὴν πλευρὰν ΔE ἐπὶ τῆς $B\Gamma$. Ἡ ὁμοιοθεσία



Σχ. 286

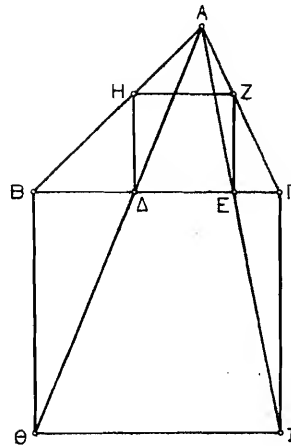
μὲ κέντρον τὸ A καὶ λόγον $k = \frac{AB}{AH}$, ἀπεικονίζει τὴν HZ ἐπὶ τῆς $B\Gamma$ καὶ τὸ τετράγωνον $HZE\Delta$ εἰς τετράγωνον $B\Gamma\Theta$, τὸ ὁποῖον δύναται ἐξ ἀρχῆς νὰ κατασκευασθῇ.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ καὶ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου,

τὸ τετράγωνον ΒΓΙΘ καὶ φέρομεν τὰς ΑΘ καὶ ΑΙ, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Ἐκ τῶν Δ καὶ Ε φέρομεν καθετοὺς ἐπὶ τὴν ΒΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Τὸ τετράπλευρον ΔΕΖΗ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ΔΗ // ΒΘ, ΔΕ // ΘΙ, ΕΖ // ΓΙ, ἔπεται ὅτι ἡ ὁμοιοθεσία κέντρου Α καὶ λόγου $k' = \frac{1}{k} = \frac{AH}{AB}$ ἀπεικονίζει τὰ σημεῖα Β, Θ, Ι, Γ εἰς τὰ Η, Δ, Ε, Ζ ἀντιστοίχως. Ἄρα :

$ΒΘΙΓ \xrightarrow{F(A, k')} ΗΔΕΖ \Rightarrow ΒΘΙΓ \approx ΗΔΕΖ$
καὶ ἐπειδὴ τὸ ΒΘΙΓ εἶναι ἐκ κατασκευῆς τετράγωνον, ἔπεται ὅτι καὶ τὸ ΗΔΕΖ εἶναι τετράγωνον.



Σχ. 287

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β.

458. Ἀντίστροφος ὁμοιοθεσία. Ἐάν σημεῖον Α ἀπεικονίζεται μέσῳ μιᾶς ὁμοιοθεσίας $F(O, k)$ εἰς σημεῖον Α', δείξατε ὅτι ὑπάρχει ὁμοιοθεσία $F(O, k')$ τοῦ αὐτοῦ κέντρου (καλούμενη ἀντίστροφος τῆς πρώτης), ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τὸ Α' εἰς τὸ Α.

459. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ γωνίαι \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$ καὶ ἡ διάμεσος μ_a .

460. Ὅμοιως ὅταν δίδονται αἱ γωνίαι \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$ καὶ τὸ ὕψος u_a .

461. Δίδεται γωνία \widehat{xOy} καὶ σημεῖον Α ἐσωτερικὸν αὐτῆς. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Α εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ Β καὶ Γ, εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι $\frac{AB}{\Gamma\Gamma} = \frac{\mu}{v}$.

462. Δίδεται γωνία \widehat{xOy} καὶ σημεῖον Σ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Σ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ Α καὶ Β, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $\Sigma B = 3 \cdot \Sigma A$.

463. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ὁμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ ἀκτίς ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

464. Ὅμοιως ὅταν δίδεται ἡ ἀκτίς R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

465. Δίδεται κύκλος (Κ, R) καὶ σημεῖον Σ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Σ εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον εἰς τὰ Α καὶ Β, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $\Sigma B = 2 \cdot \Sigma A$.

466. Δίδεται κύκλος (Ο, R), εὐθεῖα (ε) καὶ σημεῖον Σ. Διὰ τοῦ Σ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὴν (ε) εἰς τὸ Α καὶ τὸν (Ο, R) εἰς τὸ Β, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $\Sigma B = 3 \cdot \Sigma A$.

467. Ἀπὸ τὸ ἐν τῶν κοινῶν σημείων Α δύο τεμνομένων κύκλων (Κ, R) καὶ (Λ, ρ) νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα αὐτοὺς εἰς τὰ Β καὶ Γ ἀντιστοίχως, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $AB = 2 \cdot \Lambda\Gamma$.

468. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ παραλληλόγραμμον ὁμοιον πρὸς δοθὲν.

469. Μεταβλητὸν τρίγωνον $AB\Gamma$ διατηρεῖ σταθερὰν τὴν πλευρὰν $B\Gamma = \alpha$ κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος καὶ τὴν διάμεσον $BA = \mu_B$ κατὰ μέγεθος. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς κορυφῆς A .

ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ

289. Ὅρισμός. Ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν καλεῖται τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου O .

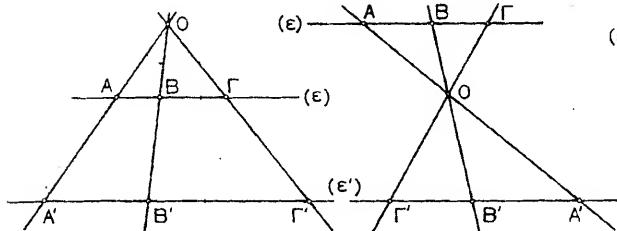
Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται κέντρον τῆς δέσμης. Αἱ εὐθεῖαι τῆς δέσμης καλοῦνται ἀκτίνες αὐτῆς.

Ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ τὸ σύνολον τῶν παραλλήλων πρὸς ὠρισμένην διεύθυνσιν εὐθειῶν. Τότε τὸ κέντρον τῆς δέσμης ἔχει ἀπομακρυνθῇ εἰς τὸ ἄπειρον.

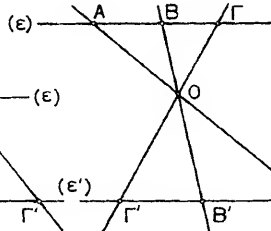
290. Θεώρημα τῆς δέσμης. Τρεῖς ἢ περισσότεραι ἀκτίνες μιᾶς δέσμης ἀποκόπτουν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν τμήματα ἀνάλογα.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν κέντρου O καὶ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ϵ) καὶ (ϵ') , τεμνόμεναι ὑπὸ τριῶν ἀκτίνων τῆς δέσμης εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ καὶ A', B', Γ' ἀντιστοίχως. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι :

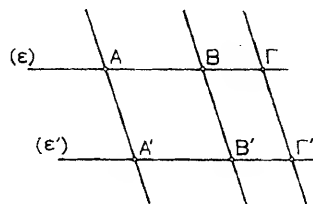
$$(1) \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}.$$



Σχ. 288



Σχ. 289



Σχ. 290

Ἀπὸ τὰ δύο ζεύγη ὁμοίων τριγώνων (σχ. 288, 289) $\triangle OAB \approx \triangle OA'B'$ καὶ $\triangle OB\Gamma \approx \triangle OB'\Gamma'$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{OB}{OB'}.$$

Αὗται ἔχουν τὰ δεύτερα μέλη των ἴσα.

Ἄρα θὰ εἶναι καί :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$$

Ὅμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ δέσμη περισοτέρων ἀκτίνων.

291. Θεώρημα. Ἐὰν τρεῖς (ἢ περισσότεραι) εὐθεῖαι τέμνουν δύο παραλλήλους εὐθείας (ε) καὶ (ε') εἰς τὰ σημεία A, B, Γ καὶ A', B', Γ' ἀντιστοίχως, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$, τότε αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι ἀκτῖνες μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς δέσμης, ἥτοι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἐστω O τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν AA' καὶ BB' (σχ. 288).

Τότε εἶναι $\overset{\Delta}{OAB} \approx \overset{\Delta}{OA'B'}$, ἄρα :

$$(2) \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}$$

Ἐὰν O' εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν BB' καὶ ΓΓ', τότε εἶναι $\overset{\Delta}{O'B\Gamma} \approx \overset{\Delta}{O'B'\Gamma'}$, ἄρα :

$$(3) \quad \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{O'B}{O'B'}$$

Ἐκ τῆς ὑποθέσεως $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$ καὶ τῶν (2) καὶ (3) ἔπεται :

$$\frac{OB}{OB'} = \frac{O'B}{O'B'} \quad \eta$$

$$\frac{OB}{OB' - OB} = \frac{O'B}{O'B' - O'B} \Rightarrow \frac{OB}{BB'} = \frac{O'B}{BB'}$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἀναλογίας ἔπεται ὅτι $OB = O'B$, δηλαδή τὰ σημεία O καὶ O' συμπίπτουν. Ἀρα αἱ AA', BB', ΓΓ' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου O, ἥτοι εἶναι ἀκτῖνες μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς δέσμης.

Ἐὰν εἶναι $AA' // BB'$, τὸ τετράπλευρον ABB'A' εἶναι παραλληλόγραμμον (σχ. 290), ἐπομένως $AB = A'B'$. Τότε ἡ ὑπόθεσις (1) γράφεται :

$$1 = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$$

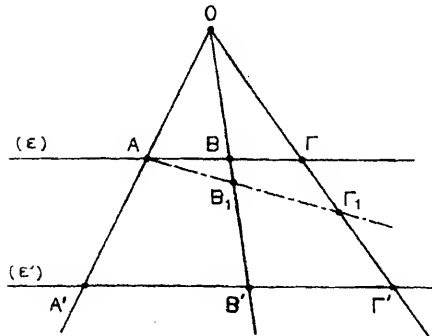
ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται ὅτι $B\Gamma = B'\Gamma'$. Ἀρα καὶ τὸ BΓΓ'B' εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐπομένως $BB' // \Gamma\Gamma'$, ἥτοι $AA' // BB' // \Gamma\Gamma'$.

292. Θεώρημα. Ἐὰν τρεῖς ἀκτῖνες μιᾶς δέσμης κέντρου O τέμνονται ὑπὸ δύο εὐθειῶν (ε) καὶ (ε') εἰς τὰ σημεία A, B, Γ καὶ A', B', Γ' ἀντιστοίχως καὶ εἶναι $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$, αἱ εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε') εἶναι παράλληλοι.

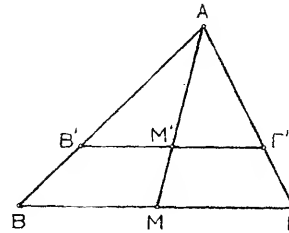
Ἀπόδειξις. Ἐὰν αἱ (ε) καὶ (ε') δὲν εἶναι παράλληλοι (σχ. 291), φέρομεν ἐκ τοῦ A τὴν $AB_1\Gamma_1 // A'B'\Gamma'$ καὶ τότε, κατὰ τὸ θεώρημα 291, θὰ εἶναι :

$$\frac{AB_1}{A'B'} = \frac{B_1\Gamma_1}{B'\Gamma'} \Leftrightarrow \frac{AB_1}{B_1\Gamma_1} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'} \quad (1). \quad \text{Ἐξ ὑποθέσεως ὅμως ἔχομεν}$$

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \iff \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$ (2). Έκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2), αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰ δεύτερα μέλη των ἴσα, ἔπεται ὅτι $\frac{AB_1}{B_1\Gamma_1} = \frac{AB}{B\Gamma}$. Ἐξ αὐτῆς ἔπεται ὅτι (Θ. Θαλοῦ) $BB_1 // \Gamma\Gamma_1$, ὅπερ ἤτοπον, διότι αἱ BB_1 καὶ $\Gamma\Gamma_1$, ἐξ



Σχ. 291



Σχ. 292

ὑποθέσεως, τέμνονται εἰς τὸ Ο. Ἄρα κατ' ἀνάγκην πρέπει νὰ εἶναι $AB\Gamma // A'B'\Gamma'$ ἢ $(\varepsilon) // (\varepsilon')$.

Πόρισμα. Ἐὰν τριγώνου $AB\Gamma$ ἡ AM εἶναι διάμεσος, πᾶν εὐθύγραμμον τμήμα $B'\Gamma' // B\Gamma$, ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB καὶ AG , διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς διαμέσου.

Πράγματι, εἶναι : $\frac{BM}{B'M'} = \frac{\Gamma M}{\Gamma'M'}$ καί, ἐπειδὴ $BM = \Gamma M$, ἔπεται καὶ $B'M' = \Gamma'M'$ (σχ. 292).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

B'.

470. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ἐνοῦσα τὰ μέσα K καὶ Λ τῶν βάσεων τραπεζίου, διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου E τῶν διαγωνίων καὶ διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Z τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

471. Ἐὰν αἱ ἀκτῖνες μιᾶς δέσμης κέντρου O τέμνουν δύο παραλλήλους εὐθείας (ε) καὶ (ε') εἰς τὰ A καὶ A' , B καὶ B' , Γ καὶ Γ' , ... ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι αἱ διαγώνιοι τῶν τραπεζίων $AA'B'B$, $BB'\Gamma'\Gamma$, $\Gamma\Gamma'\Delta'\Delta$, ... τέμνονται εἰς σημεῖα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς (ε) καὶ (ε') .

472. Φέρομεν δύο παραλλήλους πρὸς τὴν διαγώνιον AG κυρτοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς πλευράς του εἰς τὰ E , Θ καὶ H, Z ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι EZ καὶ $H\Theta$ τέμνονται ἐπὶ τῆς BD .

473. Ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς βάσεως $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν διάμεσον AM , ἡ ὁποία τέμνει τὰς AB καὶ AG εἰς τὰ E καὶ Z . Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα $\Delta E + \Delta Z$ εἶναι σταθερόν.

474. Δίδεται παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$ καὶ ἔστω E τυχὸν σημεῖον τῆς διαγωνίου $B\Delta$. Διὰ τοῦ E φέρομεν ἀνὰ μίαν παράλληλον πρὸς τὰς πλευράς του, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἰς τὰ Z καὶ H ἀντιστοίχως καὶ τὰς $A\Delta$ καὶ $B\Gamma$ εἰς τὰ I καὶ Θ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι εἶναι : α) $Z\Theta // HI$, καὶ β) αἱ $I\tilde{Z}$ καὶ $H\Theta$ τέμνονται ἐπὶ τῆς $B\Delta$.

475. Δίδεται κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ καὶ ἔστω E τυχὸν σημεῖον τῆς AB . Διὰ τοῦ E φέρομεν παράλληλον τῆς $B\Gamma$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ Z καὶ ἐκ τοῦ Z φέρομεν παράλληλον τῆς $\Gamma\Delta$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν $A\Delta$ εἰς τὸ H . Δείξατε ὅτι εἶναι :

$$\alpha) AE \cdot \Delta H = BE \cdot AH, \text{ καὶ } EH // B\Delta.$$

476. Δίδονται δύο εὐθεῖαι (ε_1) , (ε_2) καὶ σημεῖον A . Αἱ (ε_1) καὶ (ε_2) τέμνονται, ἀλλὰ τὸ σημεῖον τομῆς των δὲν εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ πεδίου σχεδιάσεως. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ A διερχομένη καὶ ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν (ε_1) καὶ (ε_2) .

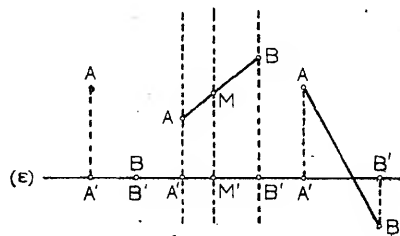
ΠΕΡΙ ΟΡΘΩΝ ΠΡΟΒΟΛΩΝ

293. Ὅρισμοί. Ἐστω σημεῖον A καὶ εὐθεῖα (ε) (σχ. 293). Φέρομεν τὴν $AA' \perp (\varepsilon)$. Τὸ σημεῖον A' ἐπὶ τῆς (ε) καλεῖται (ὀρθή) **προβολὴ** τοῦ σημείου A ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) . Ἡ εὐθεῖα (ε) καλεῖται **προβολικὸς ἄξων** καὶ τὸ τμήμα AA' καλεῖται **προβάλλουσα** τοῦ σημείου A .

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἔπεται ὅτι, ἐὰν ἓν σημεῖον B εὐρίσκεται ἐπὶ τοῦ προβολικοῦ ἄξονος, τότε ταυτίζεται μετὰ τῆς προβολῆς του.

Προβολὴ ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος AB ἐπὶ ἄξονα (ε) , καλεῖται τὸ σύνολον τῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ τμήματος AB , ἐπὶ τὸν ἄξονα (ε) .

294. Θεώρημα. Ἡ προβολὴ εὐθυγράμμου τμήματος AB ἐπὶ εὐθεῖαν (ε) , εἶναι τμήμα $A'B'$ μετὰ ἄκρα τὰς προβολὰς τῶν ἄκρων τοῦ AB ἐπὶ τὴν (ε) .



Σχ. 293

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν A' καὶ B' αἱ προβολαὶ τῶν ἄκρων A καὶ B

τοῦ τμήματος AB ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) (σχ. 293). Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ τμήματος AB , προβάλλεται εἰς σημεῖον M' τοῦ τμήματος $A'B'$ καὶ ἀντιστρόφως, ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον M' τοῦ τμήματος $A'B'$, εἶναι ἡ προβολὴ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) , ἑνὸς σημείου M τοῦ τμήματος AB .

Ἐστω M' ἡ προβολὴ τυχόντος σημείου M τοῦ τμήματος AB ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) . Αἱ εὐθεῖαι AA' , BB' καὶ MM' εἶναι παράλληλοι, ὥς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (ε) . Τὸ σημεῖον M , ὥς ἀνήκον εἰς τὸ τμήμα AB , εὐρίσκεται ἐντὸς τῆς ζώνης τῶν παραλλήλων AA' καὶ BB' . Ἀρα καὶ ἡ MM' θὰ εὐρίσκεται ἐντὸς τῆς ζώνης τῶν παραλλήλων AA' καὶ BB' . Ἐπομένως ἡ MM' θὰ τέμνῃ τὸ τμήμα $A'B'$ εἰς σημεῖον M' , ἥτοι ἡ προβολὴ M' τοῦ M ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) εἶναι σημεῖον τοῦ τμήματος $A'B'$.

Ὅμοίως ἀποδεικνύεται τὸ ἀντίστροφον, ἥτοι, ἐὰν M' εἶναι σημεῖον τοῦ τμήματος $A'B'$, ἡ ἐξ αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ϵ), ὡς παράλληλος πρὸς τὰς AA' καὶ BB' , θὰ τέμνῃ τὸ τμήμα AB εἰς σημεῖον M . Ἄρα τὸ σημεῖον M' εἶναι ἡ προβολὴ ἐνὸς σημείου M τοῦ τμήματος AB .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

477. Δείξατε ὅτι αἱ προβολαὶ δύο ἴσων καὶ παραλλήλων τμημάτων ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, εἶναι ἴσαι.

478. Ἐὰν $A'B'$ εἶναι ἡ προβολὴ τμήματος AB ἐπὶ εὐθεῖαν (ϵ), δείξατε ὅτι εἶναι $AB \geq A'B' \geq 0$. Πότε ἰσχύει τὸ πρῶτον ἴσον; καὶ πότε τὸ δεύτερον;

479. Δείξατε ὅτι τὸ μέσον ἐνὸς εὐθυγράμμου τμήματος προβάλλεται εἰς τὸ μέσον τῆς προβολῆς του ἐπὶ τυχούσαν εὐθεῖαν.

480. Ἐὰν εὐθύγραμμον τμήμα AB προβάλλεται ἐπὶ τρεῖς εὐθείας (ϵ_1), (ϵ_2), (ϵ_3) εἰς τὰ A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι αἱ μεσοκάθετοι τῶν τμημάτων A_1B_1 , A_2B_2 καὶ A_3B_3 διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

B'.

481. Ἐὰν τὰ μέσα K καὶ Λ τῶν πλευρῶν AB καὶ AG τριγώνου ABG , προβάλλωνται ἐπὶ εὐθεῖαν (ϵ) εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ τῆς πλευρᾶς BG ἐπὶ τὴν (ϵ) εἶναι μηδενική.

482. Ἐὰν τὰ μέσα δύο διαδοχικῶν πλευρῶν τετραπλεύρου, προβάλλωνται ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, δείξατε ὅτι καὶ τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου προβάλλονται εἰς ἓν σημεῖον. Ἐὰν τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου προβάλλωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, δείξατε ὅτι τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου προβάλλονται ἐκατέρωθεν τοῦ προηγουμένου σημείου εἰς ἴσας ἀποστάσεις.

483. Διὰ δοθέντος σημείου Σ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα (ϵ), ἐπὶ τὴν ὅποιαν αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν δοθέντος τριγώνου ABG νὰ ὀρίζουν δύο ἴσα τμήματα.

484. Διὰ δοθέντος σημείου Σ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ὅποιαν αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν τριγώνου ABG νὰ ὀρίζουν δύο διαδοχικὰ τμήματα ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἄλλου.

ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

295. Μετρικὴ σχέσις γενικῶς εἰς τὴν γεωμετρίαν καλεῖται πᾶσα σχέσις συνδέουσα τὰ μέτρα εὐθυγράμμων τμημάτων, ὅταν ταῦτα μετρῶνται μετὰ τὴν αὐτὴν μονάδα μετρήσεως. Ἐπειδὴ ἡ μονὰς μετρήσεως εἶναι αὐθαίρετος, ἔπεται ὅτι πᾶσα μετρικὴ σχέσις εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς μονάδος μετρήσεως καὶ εἶναι καθαρῶς σχέσις λόγων.

Πᾶσα γεωμετρικὴ σχέσις εἶναι μετρικὴ σχέσις, ἥτοι σχέσις ἀληθεύουσα δι' οἵανδήποτε μονάδα μετρήσεως, εἶναι δὲ ὁμογενὴς ὡς πρὸς τὰ μήκη τὰ ὅποια περιέχει. Οὐδὲν γεωμετρικὸν θεώρημα καταλήγει εἰς μὴ ὁμογενῆ σχέσιν.

Ἐὰν α, β, γ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα, ἡ σχέσις $2(\alpha)(\beta) = (\gamma)^2$ ἀναφερομένη εἰς τὰ μέτρα $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ τῶν τμημάτων, εἶναι μετρικὴ σχέσις ὁμογενῆς δευτέρου βαθμοῦ καὶ διὰ τὴν ἀπλούστεσιν θὰ γράφεται $2\alpha\beta = \gamma^2$. Ἡ σχέσις $3\alpha^2 + \beta = \gamma^3$ δὲν εἶναι μετρικὴ σχέσις, διότι δὲν εἶναι ὁμογενῆς.

ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

296. Θεώρημα. Εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκάστη ἐκ τῶν καθέτων πλευρῶν του, εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτείνουσας καὶ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) μὲ πλευρὰς α, β, γ (σχ. 294). Φέρομεν $AD \perp B\Gamma$. Τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $\Delta A\Gamma$ εἶναι ὅμοια, διότι εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουν τὴν $\widehat{\Gamma}$ κοινήν.

Ἄρα :

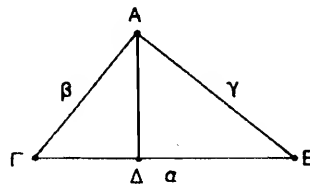
$$\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} \iff \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\Delta\Gamma}{\beta} \iff$$

$$(1) \quad \beta^2 = \alpha \cdot \Delta\Gamma,$$

ὅπου $\Delta\Gamma$ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς πλευρᾶς β ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

$$\text{Ὁμοίως εἶναι } AB\Gamma \approx \Delta B A \Rightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\Delta B}{\gamma} \iff$$

$$(2) \quad \gamma^2 = \alpha \cdot \Delta B$$



Σχ. 294

Πόρισμα. Ὁ λόγος τῶν τετραγώνων τῶν δύο καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

Πράγματι, ἐὰν τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) τοῦ προηγουμένου θεωρήματος τὰς διαιρέσωμεν κατὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta B}.$$

297. Πυθαγόρειον Θεώρημα*. Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο καθέτων πλευρῶν του, ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας.

Ἀπόδειξις. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ (σχ. 294), ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔχομεν :

$$\beta^2 = \alpha \cdot \Delta\Gamma \quad \text{καὶ} \quad \gamma^2 = \alpha \cdot \Delta B.$$

(*) Πυθαγόρας (γεννηθεὶς εἰς Σάμον περὶ τὸ 580 π.Χ.), εἶναι ὁ πλέον ἐνδοξος ὁπαδὸς τοῦ Θαλῶ. Ἐταξίδευσεν εἰς Αἴγυπτον καὶ Ἰνδίας καὶ κατόπιν ἀπεσύρθη εἰς Ἰταλίαν, ὅπου ἱδρυσε τὴν περίφημον Σχολὴν του.

Διὰ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη λαμβάνομεν : $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha(\Delta\Gamma + \Delta B)$.
 Ἀλλὰ $\Delta\Gamma + \Delta B = \Gamma B = \alpha$. Ἄρα ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται :

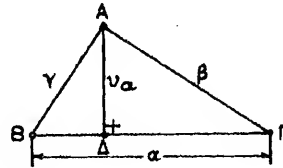
$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$$

298. Θεώρημα. Εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος, εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα τοῦτο διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$) καὶ $A\Delta = u_\alpha$ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος (σχ. 295). Τὸ ὕψος διαιρεῖ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἰς δύο ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα $\triangle A\Delta B \approx \triangle A\Delta \Gamma$, διότι ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν :

$$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{\Gamma\Delta}{A\Delta} \Leftrightarrow A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma \quad \eta$$

$$u_\alpha^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma.$$



Σχ. 295

299. Θεώρημα. Εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$), ἰσχύει ἡ μετρικὴ σχέσις $\beta\gamma = \alpha u_\alpha$.

Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὸ ὕψος $A\Delta = u_\alpha$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι $\triangle A\Delta B \approx \triangle A\Delta \Gamma$, διότι εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουν τὴν γωνίαν \widehat{B} κοινήν.

$$\text{Ἄρα } \frac{AB}{A\Delta} = \frac{\Gamma B}{\Gamma A} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{u_\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow$$

$$\beta\gamma = \alpha u_\alpha$$

300. Θεώρημα. Εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 1^\circ$), ἰσχύει ἡ μετρικὴ σχέσις $\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{u_\alpha^2}$.

Ἀπόδειξις.

$$\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta^2 \gamma^2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{(\beta\gamma)^2} =$$

$$= \frac{\alpha^2}{(\alpha u_\alpha)^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 \cdot u_\alpha^2} = \frac{1}{u_\alpha^2}$$

301. Ἀνακεφαλαίωσις τῶν μετρικῶν σχέσεων διὰ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα.

Ἐὰν $AB\Gamma$ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ πλευρὰς α, β, γ καὶ $A\Delta = u_\alpha$ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος του, ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$1) \quad \beta^2 = \alpha \cdot \Delta\Gamma, \quad \gamma^2 = \alpha \cdot \Delta B$$

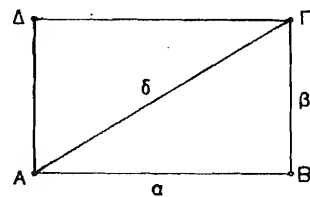
- ii) $\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta B}$
- iii) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ καὶ ἐξ αὐτῆς αἱ :
 $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ καὶ $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$
- iv) $u_\alpha^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$
- v) $\beta\gamma = \alpha u_\alpha$
- vi) $\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{u_\alpha^2}$

Σημείωσις. Πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, καλεῖται **πυθαγόρειον τρίγωνον**. Πυθαγόρειον τρίγωνον εἶναι π.χ. τὸ ἔχον μέτρα πλευρῶν 3, 4, 5, διότι $3^2 + 4^2 = 5^2 \Leftrightarrow 9 + 16 = 25$.

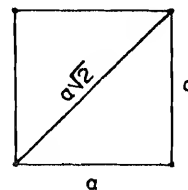
Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὅποιοι παριστοῦν τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, καλοῦνται **πυθαγόρειοι ἀριθμοί**. Οἱ ἀπλούστεροι πυθαγόρειοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 3, 4, 5.

Ὑπάρχουν ἄπειροι πυθαγόρειοι ἀριθμοὶ συνδεόμενοι διὰ τῆς σχέσεως $(\mu^2 - \nu^2)^2 + (2\mu\nu)^2 = (\mu^2 + \nu^2)^2$, ὅπου μ καὶ ν τυχόντες ἀκέραιοι ἀριθμοί. Ἐὰν π.χ. εἰς τὴν προηγουμένην σχέσιν θέσωμεν $\mu = 5$ καὶ $\nu = 2$, εὐρίσκωμεν τοὺς πυθαγορείους ἀριθμοὺς $5^2 - 2^2 = 21$, $2 \cdot 5 \cdot 2 = 20$ καὶ $5^2 + 2^2 = 29$, δηλαδὴ τοὺς 21, 20, 29. Πράγματι εἶναι $21^2 + 20^2 = 29^2 \Leftrightarrow 441 + 400 = 841$.

302. Διαγώνιος ὀρθογωνίου διαστάσεων α καὶ β . Ἐστω ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ μὲ διαστάσεις α καὶ β (σχ. 296). Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ = δ



Σχ. 296



Σχ. 297

καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν : $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$
 $\Rightarrow \delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow \delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Πόρισμα. Ἡ διαγώνιος τετραγώνου πλευρᾶς α ἰσοῦται πρὸς $\alpha\sqrt{2}$ (σχ. 297).

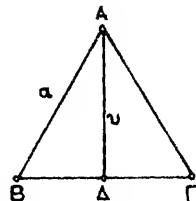
303. Ὑψος ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α . Ἐστω $AB\Gamma$ ἰσοπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α (σχ. 298). Φέρομεν τὸ ὕψος $AD = \upsilon$ αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ μέσον της

$$\Rightarrow BD = \frac{\alpha}{2}.$$

Τότε, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Delta$ λαμβάνομεν: $AD^2 = AB^2 - BD^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \upsilon^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{4\alpha^2 - \alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4}. \text{ Ἄρα}$$

$$\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$



Σχ. 298

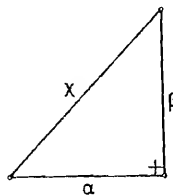
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ Τῆς ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ

304. i) Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμήμα x , ἱκανοποιῶν τὴν σχέσιν $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, ὅπου a καὶ b εἶναι δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα.

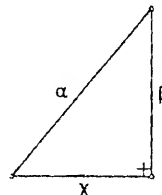
Ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται $x^2 = a^2 + b^2$, ἐκ τῆς ὁποίας φαίνεται ὅτι τὸ x δύναται νὰ εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, μὲ καθέτους πλευρὰς τὰ τμήματα a καὶ b . Τὸ τρίγωνον κατασκευάζεται (σχ. 299).

ii) Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμήμα x , ἱκανοποιῶν τὴν σχέσιν $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, $a > b$.

Ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται $x^2 = a^2 - b^2$, ἐκ τῆς ὁποίας φαίνεται ὅτι τὸ x δύναται νὰ εἶναι κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ὑποτείνουσαν a καὶ τὴν ἄλλην κάθετον b . Τὸ τρίγωνον κατασκευάζεται (σχ. 300).



Σχ. 299



Σχ. 300

iii) Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμήμα x , ἱκανοποιῶν τὴν σχέσιν $x = \sqrt{a^2 + b^2 + \gamma^2 + \delta^2}$, ὅπου a, b, γ καὶ δ εἶναι δεδομένα εὐθύγραμμα τμήματα.

Ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται

$$x^2 = a^2 + b^2 + \gamma^2 + \delta^2.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα $a^2 + b^2$ δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ AG^2 (σχ. 301), ὅπου AG εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ καθε-

τους πλευρὰς τὰς α καὶ β . Ἐν συνεχείᾳ δὲ κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + \gamma^2$ μὲ τὸ $ΑΔ^2$ καὶ ἀκολουθῶς τὸ $ΑΔ^2 + \delta^2$ μὲ τὸ $ΑΕ^2$. Ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται τότε ὅτι εἶναι

$$x^2 = AE^2 = AD^2 + \delta^2 = AG^2 + \gamma^2 + \delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2.$$

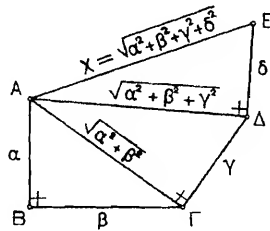
Σημείωσις. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τμήμα x ἱκανοποιῶν τὴν σχέσιν $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \dots + \varepsilon^2 + \zeta^2}$, ὅταν δίδεται πεπερασμένον πλῆθος εὐθύγραμμων τμημάτων $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon, \zeta$.

iv) **Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα x , ἱκανοποιῶν τὴν σχέσιν $x = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2}$ ὅπου α, β, γ καὶ δ δοθέντα τμήματα, τοιαῦτα ὥστε $\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 > 0$.**

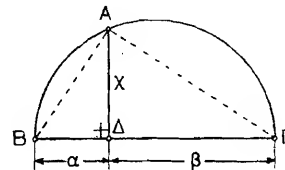
Ἡ δοθεῖσα σχέσις δύναται νὰ γραφῇ

$$x^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - (\beta^2 + \delta^2) \quad \eta \quad x^2 = \lambda^2 - \mu^2,$$

ὅπου τὰ εὐθύγραμμα τμήματα λ καὶ μ ἱκανοποιῶν τὰς σχέσεις $\lambda^2 = \alpha^2 + \gamma^2$



Σχ. 301



Σχ. 302

καὶ $\mu^2 = \beta^2 + \delta^2$ καὶ κατασκευάζονται ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν (i). Τότε πλέον δύναται νὰ κατασκευασθῇ καὶ τὸ x ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν (ii).

v) **Κατασκευὴ μέσης ἀναλόγου.**

Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμήμα x , ἱκανοποιῶν τὴν σχέσιν $x^2 = \alpha\beta$, ὅπου α καὶ β δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα.

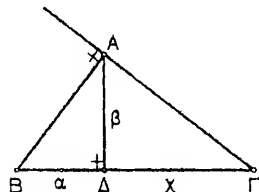
Παρατηροῦμεν ὅτι (§ 298) τὸ x δύναται νὰ εἶναι τὸ ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας ὕψος τριγώνου, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσιν εἰς δύο τμήματα μὲ μήκη α καὶ β . Διὰ τὴν κατασκευὴν λαμβάνομεν ἐπ' εὐθείας διαδοχικὰ τμήματα $BD = \alpha$ καὶ $D\Gamma = \beta$ (σχ. 302) καὶ μὲ διάμετρον τὴν $B\Gamma$, γράφομεν ἡμικύκλιον. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν $B\Gamma$, ἥ ὁποία τέμνει τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ A . Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι προφανῶς ὀρθογώνιον ($\hat{A} = 1^\circ$). Ἐπομένως τὸ ζητούμενον τμήμα εἶναι τὸ $x = AD$, τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ τὴν σχέσιν $x^2 = \alpha\beta$.

vi) **Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμήμα x , ἱκανοποιῶν τὴν σχέσιν $\alpha x = \beta^2$, ὅπου α καὶ β δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα.**

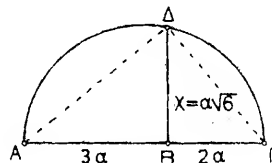
Ἄν β εἶναι τὸ ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ α τὸ

ἐν ἐκ τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα τοῦτο διαίρει τὴν ὑποτείνουσιν (σχ. 303), τότε τὸ x θὰ εἶναι τὸ ἕτερον.

Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Delta$ ($\hat{\Delta} = 1^\circ$) μὲ καθετοὺς πλευρὰς τὰς α καὶ β . Ἐκ τῆς κορυφῆς A φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσιν αὐτοῦ AB , ἥ ὁποία τέμνει τὴν $B\Delta$ εἰς τὸ σημεῖον Γ . Τὸ τμήμα $\Gamma\Delta$ εἶναι τὸ ζητούμενον, ἥτοι $\Gamma\Delta = x$, διότι κατὰ τὴν § 298 ικανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν σχέσιν $\alpha \cdot \Gamma\Delta = \beta^2$.



Σχ. 303



Σχ. 304

vii) Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμήμα x , ικανοποιούν τὴν σχέσιν $x = \alpha\sqrt{6}$, ὅπου α δοθέν τμήμα.

Ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται $x^2 = 6\alpha^2$ ἢ $x^2 = 3\alpha \cdot 2\alpha$. Ἡ κατασκευὴ εἶναι ὁμοία μὲ τὴν τῆς περιπτώσεως (v) καὶ φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 304.

305. Πρόβλημα. Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα x τοιοῦτον, ὥστε :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{\mu}{\nu}$$

ὅπου α δοθέν τμήμα καὶ $\frac{\mu}{\nu}$ δεδομένος ἀριθμητικὸς λόγος.

Κατασκευή. Μὲ διάμετρον $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma = \mu + \nu$ γράφομεν ἡμικύκλιον καὶ ἐκ τοῦ Δ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν $B\Gamma$, ἥ ὁποία τέμνει τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ A . Ἐπὶ τῆς $A\Gamma$ λαμβάνομεν τμήμα $AH = \alpha$ καὶ φέρομεν τὴν $HZE \parallel \Gamma\Delta B$ (σχ. 305). Τὸ τμήμα $AE = x$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν ὅτι (§ 296, πορ.) :

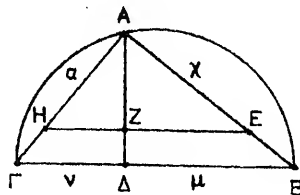
$$(1) \quad \frac{AE^2}{AH^2} = \frac{EZ}{ZH} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{EZ}{ZH}$$

Ἀλλὰ, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς δέσμης, εἶναι :

$$(2) \quad \frac{EZ}{ZH} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{\mu}{\nu}.$$



Σχ. 305

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

485. Ὁρθογωνίου τριγώνου αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι 15m καὶ 20m. Νὰ εὑρεθοῦν ἡ ὑποτείνουσα, αἱ προβολαὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ τὸ ὕψος, ποὺ ἄγεται ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

486. Ὁρθογωνίου τριγώνου αἱ προβολαὶ τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν εἶναι 2m καὶ 8m. Νὰ εὑρεθοῦν τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος καὶ αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ τριγώνου.

487. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποῦ τοῦ ἡ περίμετρος εἶναι 84m καὶ ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 37m.

488. Δείξατε ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν τρίτην πλευράν.

489. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1^\circ$) φέρομεν ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς AB κάθετον ΔE ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν. Δείξατε ὅτι $E\Gamma^2 - EB^2 = A\Gamma^2$.

490. Τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ αἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετοι. Δείξατε ὅτι $AB^2 + \Gamma\Delta^2 = B\Gamma^2 + A\Delta^2$.

491. Δίδεται γωνία $\chi\hat{O}y = 45^\circ$ καὶ σημεῖον M ἐσωτερικὸν αὐτῆς. Ἐκ τοῦ M φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν Ox , ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ox εἰς τὸ A καὶ τὴν Oy εἰς τὸ B . Δείξατε ὅτι $AB^2 + AM^2 = OM^2$.

492. Δίδεται ὀρθογώνιον $AB\Gamma\Delta$ καὶ σημεῖον E ἐσωτερικὸν αὐτοῦ. Ἐὰν συνδέσωμεν τὸ E μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ ὀρθογωνίου, δείξατε ὅτι εἶναι

$$EA^2 + E\Gamma^2 = EB^2 + E\Delta^2$$

493. Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα x ἱκανοποιῶν τὴν σχέσιν $x^2 = a^2 + \beta^2 + \gamma^2$, ὅπου a, β, γ εἶναι δεδομένα τμήματα.

494. Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα $x = a\sqrt{30}$, ἔνθα a δεδομένον τμήμα.

495. Δίδεται τεταρτοκύκλιον AOB . Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Γ τοῦ τόξου \widehat{AB} φέρομεν $\Gamma E \perp OA$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν διχοτόμον τῆς ὀρθῆς γωνίας $A\hat{O}B$ εἰς τὸ Δ . Δείξατε ὅτι εἶναι $\Gamma E^2 + \Delta E^2 = OA^2$.

496. Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα $x = a\sqrt{3} + \beta\sqrt{5}$ ἔνθα καὶ β, α δεδομένα τμήματα.

Β'.

497. Δείξατε ὅτι ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη δύο κύκλων ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο διαμέτρων αὐτῶν.

498. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος τῆς κοινῆς ἐξωτερικῆς ὡς καὶ τῆς κοινῆς ἐσωτερικῆς ἐφαπτομένης δύο κύκλων ἀκτίνων a καὶ $4a$, ἐὰν ἡ διάκεντρος αὐτῶν εἶναι $6a$.

499. Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα $x = \sqrt{a^2 - \beta\gamma}$, ἔνθα a, β, γ δεδομένα τμήματα.

500. Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα $x = \sqrt{a^2 + \beta^2 - \gamma\delta}$, ἔνθα a, β, γ, δ δεδομένα τμήματα.

501. Δίδεται τετράγωνον $AB\Gamma\Delta$ πλευρᾶς a . Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ καὶ ἐκτὸς τοῦ τετραγώνου κατασκευάζομεν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα $ABE, B\Gamma Z, \Gamma\Delta H, \Delta A\Theta$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον $EZH\Theta$ εἶναι τετράγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του.

502. Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα $x = \sqrt{a\beta} - \sqrt{\gamma\delta}$ ἔνθα a, β, γ, δ δεδομένα τμήματα.

503. Δίδονται δύο εὐθεῖαι $(e_1), (e_2)$ τεμνόμεναι καθέτως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ τόπος

τῶν σημείων M , τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) παραμένει σταθερόν.

504. Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα $x = \sqrt{\alpha^2 + 2\beta^2 + 3\gamma^2}$ ἔνθα α, β, γ δοθέντα τμήματα.

505. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ δύο χορδαὶ αὐτοῦ, τεμνόμεναι καθέτως εἰς τὸ σημεῖον M . Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι τὰ τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα αὗται διαιροῦνται ὑπὸ τοῦ M , δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ εἶναι σταθερόν.

506. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ σημεῖον Σ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ. Διὰ τοῦ Σ φέρομεν δύο χορδὰς $ΑΣΒ$ καὶ $ΓΣΔ$, τεμνομένας καθέτως. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα $ΑΒ^2 + ΓΔ^2$ εἶναι σταθερόν.

507. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθύγραμμα τμήματα x καὶ y , τὰ ὁποῖα ικανοποιοῦν τὰς συνθήκας $x^2 + y^2 = \alpha^2$ καὶ $xy = \beta^2$, ὅπου τὰ α καὶ β εἶναι δεδομένα εὐθύγραμμα τμήματα.

ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ Εἰς ΤΥΧΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

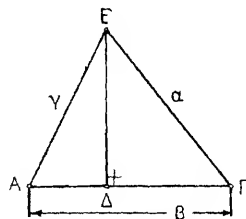
306. Θεώρημα. Εἰς πᾶν τρίγωνον, τὸ τετράγωνον πλευρᾶς, κειμένης ἀπέναντι ὀξείας γωνίας, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἡλαττωμένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ ταύτην.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τρίγωνον $ΑΒΓ$, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $\widehat{Α} < 90^\circ$ (σχ. 306). Φέρομεν τὴν $ΒΔ \perp ΑΓ$ καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι

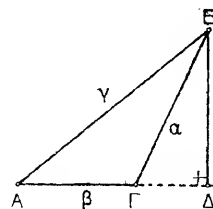
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot ΑΔ.$$

Θὰ διακρίνωμεν δύο περιπτώσεις, ἥτοι :

i) Τὸ σημεῖον Δ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $ΑΓ$. Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν εἶναι $\widehat{\Gamma} < 90^\circ$ καὶ



Σχ. 306



Σχ. 307

ii) Τὸ σημεῖον Δ κεῖται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς $ΑΓ$ (σχ. 307). Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν εἶναι $\widehat{\Gamma} > 90^\circ$.

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΒΓΔ$ λαμβάνομεν :

$$(1) \quad \alpha^2 = \Gamma\Delta^2 + \Delta B^2$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν (i) εἶναι $\Gamma\Delta = \beta - ΑΔ$, ἐνῶ εἰς τὴν περίπτωσιν (ii) εἶναι $\Gamma\Delta = ΑΔ - \beta$. Καὶ εἰς τὰς δύο ὁμοῦς περιπτώσεις εἶναι :

$$\Gamma\Delta^2 = (\beta - ΑΔ)^2 = (ΑΔ - \beta)^2 = \beta^2 + ΑΔ^2 - 2\beta \cdot ΑΔ.$$

Τότε η σχέση (1) γράφεται :

$$(2) \quad \alpha^2 = \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta + \Delta B^2$$

Αλλά επειδή $A\Delta^2 + \Delta B^2 = \gamma^2$, η (2) γράφεται :

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$$

307. Θεώρημα. Εἰς πᾶν ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς, τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἠὺξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ ταύτην.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ μὲ $\widehat{A} > 90^\circ$ (σχ. 308). Φέρομεν τὴν $BD \perp A\Gamma$ καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta.$$

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $B\Gamma\Delta$ λαμβάνομεν

$$(1) \quad \alpha^2 = \Gamma\Delta^2 + \Delta B^2$$

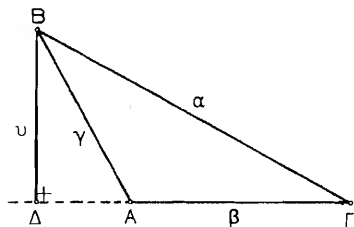
Ἀλλὰ $\Gamma\Delta = \beta + A\Delta \Rightarrow \Gamma\Delta^2 = (\beta + A\Delta)^2 = \beta^2 + 2\beta \cdot A\Delta + A\Delta^2$.

Τότε η σχέση (1) γράφεται :

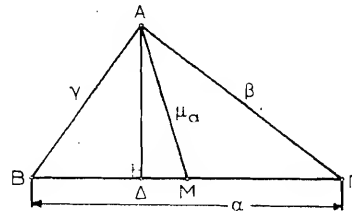
$$(2) \quad \alpha^2 = \beta^2 + 2\beta \cdot A\Delta + A\Delta^2 + \Delta B^2$$

καὶ ἐπειδὴ $A\Delta^2 + \Delta B^2 = \gamma^2$, η (2) γράφεται :

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$$



Σχ. 308



Σχ. 309

308. Πρώτον θεώρημα της διαμέσου. Εἰς πᾶν τρίγωνον $AB\Gamma$ ἰσχύει ἡ σχέση

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

ὅπου μ_α ἡ ἐκ τοῦ A διάμεσος.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ (σχ. 309) καὶ AD τὸ ὕψος αὐτοῦ. Διὰ τῆς διαμέσου AM τὸ τρίγωνον χωρίζεται εἰς δύο ἄλλα τρίγωνα AMB καὶ $AM\Gamma$. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι $\widehat{AM\Gamma} > 90^\circ$. Τότε θὰ εἶναι $\widehat{AMB} < 90^\circ$ καὶ ἐκ τῶν δύο προηγουμένων θεωρημάτων θὰ ἔχωμεν :

$$(1) \quad \beta^2 = \mu_\alpha^2 + M\Gamma^2 + 2M\Gamma \cdot M\Delta$$

$$(2) \quad \gamma^2 = \mu_\alpha^2 + MB^2 - 2MB \cdot M\Delta.$$

Διὰ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι εἶναι $MB = MG = \frac{\alpha}{2}$, ἔχομεν :

$$\begin{aligned} (3) \quad & \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + 2MB^2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \end{aligned}$$

Σημείωσις. Εἰς πολλὰς περιπτώσεις χρησιμοποιοῦμεν καὶ τὴν μορφήν (3).

Παρατήρησις i) Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου τοῦ θεωρήματος τῆς διαμέσου, διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν γραμμάτων α , β καὶ γ , δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀντιστοίχως τοὺς τύπους :

$$\gamma^2 + \alpha^2 = 2\mu_\beta^2 + \frac{\beta^2}{2} \quad \text{καὶ} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 2\mu_\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{2}$$

Παρατήρησις ii) Ἐκ τῶν τριῶν ἀνωτέρω τύπων λαμβάνομεν τοὺς τύπους :

$$\begin{aligned} 4\mu_\alpha^2 &= 2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2, & 4\mu_\beta^2 &= 2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \beta^2, \\ 4\mu_\gamma^2 &= 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2 \end{aligned}$$

ἐκ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ μήκη τῶν διαμέσων τριγώνου, ὅταν γνωρίζωμεν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του.

309. Δεύτερον θεώρημα τῆς διαμέσου. Εἰς πᾶν τρίγωνον $AB\Gamma$ ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot M\Delta$$

(ὑποτιθεμένου ὅτι $\beta \geq \gamma$), ὅπου M τὸ μέσον τῆς $B\Gamma$ καὶ Δ ἡ προβολὴ τοῦ A ἐπὶ τὴν $B\Gamma$.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ μὲ $\beta \geq \gamma$ (σχ. 309) Τότε θὰ εἶναι (§ 307 καὶ § 306) :

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \mu_\alpha^2 + M\Gamma^2 + 2M\Gamma \cdot M\Delta \\ \gamma^2 &= \mu_\alpha^2 + MB^2 - 2MB \cdot M\Delta \end{aligned}$$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ταύτας κατὰ μέλη, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $MB = M\Gamma = \frac{\alpha}{2}$, ἔχομεν :

$$\beta^2 - \gamma^2 = 4MB \cdot M\Delta = 4 \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot M\Delta \quad \eta$$

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot M\Delta$$

310. Βασικὸν κριτήριον διὰ τὸ εἶδος γωνίας τριγώνου. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα θεωρήματα καὶ ἀπὸ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα ἔπεται ὅτι εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$

$$i) \quad \widehat{A} < 1^L \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$$

$$ii) \quad \widehat{A} = 1^L \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

$$iii) \quad \widehat{A} > 1^L \Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2.$$

Τὰ ἀντίστροφα ἀποδεικνύονται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ἦτοι :
 "Αν $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, ἀποκλείονται τὰ ἐνδεχόμενα $\widehat{A} = 1^\circ$ ἢ $\widehat{A} > 1^\circ$, διότι ἐξ αὐ-
 τῶν ἔπεται $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ ἢ $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ ἀντιστοίχως. Ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{A} < 1^\circ$.
 Ὅμοίως καὶ διὰ τὰς (ii) καὶ (iii).

Εὐνόητον εἶναι ὅτι εἰς τρίγωνον μὲ γνωστὰς πλευρὰς τὸ κριτήριο ἐφαρ-
 μόζεται μόνον διὰ τὴν μεγαλυτέραν πλευρὰν, διότι, ἂν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθο-
 γώνιον ἢ ἀμβλυγώνιον, αὐτὸ θὰ συμβαίνει εἰς τὴν γωνίαν ἐναντι τῆς μεγαλυ-
 τέρας πλευρᾶς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

508. Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν τραπέζιον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων
 τοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ σὺν τῷ
 διπλασίῳ γινομένῳ τῶν δύο βάσεων.

509. Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρομεν παράλληλον τῆς $B\Gamma$, ἢ
 ὅποια τέμνει τὰς AB καὶ $A\Gamma$ εἰς τὰ Δ καὶ E ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι $BE^2 = E\Gamma^2 +$
 $B\Gamma \cdot \Delta E$.

510. Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) συνδέομεν τὴν κορυφὴν A μὲ τυχόν
 σημεῖον Δ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$. Δείξατε ὅτι $AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B \cdot \Delta\Gamma$.

511. Τρίγωνον ἔχει πλευρὰς α, β, γ καὶ γωνίαν $\widehat{A} = 120^\circ$. Δείξατε ὅτι εἶναι $\alpha^2 =$
 $\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$.

512. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν παραλληλο-
 γράμμου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων τοῦ.

513. Τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ αἱ διαγώνιοι τέμνονται καθέτως. Δείξατε ὅτι
 $|AB^2 - A\Delta^2| = |\Gamma B^2 - \Gamma\Delta^2|$.

514. Νὰ εὐρεθῇ τὸ εἶδος τῶν γωνιῶν τριγώνου $AB\Gamma$, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς

i) $\alpha = 3\lambda, \beta = 4\lambda, \gamma = 6\lambda$

ii) $\alpha = \lambda, \beta = \frac{\lambda}{2}, \gamma = \frac{2\lambda}{3}$

iii) $\alpha = 8\lambda, \beta = 15\lambda, \gamma = 17\lambda$

iv) $\alpha = 7\lambda, \beta = 6\lambda, \gamma = 8\lambda$.

Β'.

515. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου ἰσοῦ-
 ται μὲ τὰ $3/4$ τοῦ ἁθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ.

516. Ἐὰν M εἶναι τὸ κέντρον βάρους τριγώνου $AB\Gamma$, δείξατε ὅτι :

$$MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{3}.$$

517. Μὲ πλευρὰν $AB = \gamma$ κατασκευάζομεν δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta, ABE$
 ἐκατέρωθεν αὐτῆς. Ἐὰν Γ εἶναι τυχόν σημεῖον, δείξατε ὅτι $\Gamma\Delta^2 + \Gamma E^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$,
 ἔνθα α, β, γ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

518. Δίδεται κύκλος, διάμετρος AB αὐτοῦ καὶ χορδὴ $\Gamma\Delta$ παράλληλος τῆς AB . Ἐὰν
 M εἶναι τυχόν σημεῖον τῆς διαμέτρου AB , δείξατε ὅτι εἶναι $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = MA^2 + MB^2$.

519. Δίδεται ισόπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$ πλευρᾶς α . Ἐάν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2$ εἶναι σταθερόν.

520. Διαιροῦμεν τὴν ὑποτείνουσαν $B\Gamma = \alpha$ ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ εἰς τρία ἴσα τμήματα $BD = DE = E\Gamma$ καὶ φέρομεν τὰς AD καὶ AE . Δείξατε ὅτι εἶναι $AD^2 + AE^2 + DE^2 = \frac{2\alpha^2}{3}$.

521. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ . τόπος τῶν σημείων M , διὰ τὰ ὅποια ἰσχύει ἡ σχέσις $MA^2 + MB^2 = k^2$, ἔνθα A, B εἶναι σταθερὰ σημεῖα καὶ k δεδομένον τμήμα.

522. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν κυρτὸν τετράπλευρον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν τοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του, ἡὺξημένον κατὰ τὸ τετραπλάσιον τετράγωνον τοῦ τμήματος μετὰ ἄκρα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του.

523. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποῖου δίδονται ἡ πλευρὰ α , τὸ ὕψος u_α καὶ τὸ ἄθροισμα $\beta^2 + \gamma^2 = k^2$, ἔνθα k δεδομένον τμήμα.

524. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, u_β καὶ $\beta^2 + \gamma^2 = k^2$, ἔνθα k δεδομένον τμήμα.

525. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ . τόπος τῶν σημείων M , διὰ τὰ ὅποια ἰσχύει $MA^2 - MB^2 = k^2$, ἔνθα A, B εἶναι σταθερὰ σημεῖα καὶ k δεδομένον τμήμα.

526. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, u_α καὶ $\beta^2 - \gamma^2 = k^2$, ἔνθα k δεδομένον τμήμα.

527. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, m_α καὶ $\beta^2 - \gamma^2 = k^2$, ἔνθα k δεδομένον τμήμα.

ΕΜΒΑΔΑ ΚΛΕΙΣΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

311. Ὅρισμός. Μία θεμελιώδης ἔννοια, ἡ ὁποία συνδέεται ἄμεσα μετ' οἰονδήποτε κλειστὸν ἐπίπεδον σχῆμα, εἶναι ἡ ἔννοια τῆς ἐκτάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του. Ἡ ἔκτασις ἀκριβῶς αὕτη καλεῖται ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος.

312. Ἰσεμβαδικὰ ἢ ἰσοδύναμα καλοῦνται δύο σχήματα, ὅταν ἔχουν ἴσα ἐμβάδα.

Ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος τῶν ἐμβαδῶν τῶν σχημάτων εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας, ἥτοι εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική καὶ μεταβατική.

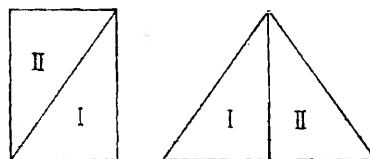
Διὰ τὸν συμβολισμόν τοῦ ἐμβαδοῦ ἐνὸς πολυγώνου $AB\Gamma\dots N$, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ σύμβολον $(AB\Gamma\dots N)$ ἢ ἀπλῶς E , ὅταν εἶναι γνωστὸν ποῦ ἀναφέρεται αὐτό.

313. Ἀξιώματα διὰ τὰ ἐμβάδα τῶν σχημάτων.

i) Δύο ἴσα σχήματα εἶναι ἰσεμβαδικά.

ii) Ἐάν δύο σχήματα ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἴσα ἢ ἰσεμβαδικὰ τμήματα ἐν πρὸς ἓν, τότε εἶναι ἰσεμβαδικὰ (σχ. 310).

iii) Ἄν εἰς ἰσεμβαδικὰ σχήματα προσθέσωμεν ἰσεμβαδικὰ σχήματα, προκύπτουν ἰσεμβαδικὰ σχήματα.



Σχ. 310

ΕΜΒΑΔΟΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ

314. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὀρθογωνίων, μὲ μίαν τῶν διαστάσεων τῶν ἴσην, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἄλλων διαστάσεων τῶν.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ὀρθογώνια $AB\Gamma\Delta$ καὶ $EZH\Theta$ μὲ διαστάσεις $AB = \alpha$, $A\Delta = \beta$ καὶ $EZ = \alpha$, $E\Theta = \gamma$ (σχ. 311). Ἐὰν συμβολίσωμεν μὲ $E(\alpha, \beta)$ καὶ $E(\alpha, \gamma)$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἀντιστοίχως, θὰ δείξωμεν ὅτι

$$\frac{E(\alpha, \beta)}{E(\alpha, \gamma)} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Ἐστω ὅτι ὁ λόγος τῶν διαστάσεων β καὶ γ ἰσοῦται πρὸς ἀριθμητικὸν τι κλάσμα μ/ν , ἥτοι

$$(1) \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὴν πλευρὰν $A\Delta = \beta$ εἰς μ τὸ πλῆθος ἴσα πρὸς ρ τμήματα, ἥτοι $\beta = \mu\rho$ καὶ τὴν πλευρὰν $E\Theta = \gamma$ νὰ τὴν διαιρέσωμεν εἰς ν τὸ πλῆθος ἴσα πρὸς ρ τμήματα, ἥτοι $\gamma = \nu\rho$ καὶ τότε

θὰ εἶναι πράγματι $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\mu\rho}{\nu\rho} = \frac{\mu}{\nu}$. Ἀπὸ τὰ διαιρετικὰ σημεῖα ἐπὶ τῶν

πλευρῶν $A\Delta$ καὶ $E\Theta$ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς βάσεις AB καὶ EZ ἀντιστοίχως τῶν ὀρθογωνίων. Τότε τὰ δύο ὀρθογώνια διαιροῦνται εἰς μ καὶ ν ἀντιστοίχως στοιχειώδη ἴσα ὀρθογώνια, μὲ διαστάσεις (α, ρ) ἕκαστον, καὶ ἔστω $E(\alpha, \rho)$ τὸ στοιχειῶδες ἐμβαδὸν ἑκάστου ἐξ αὐτῶν. Προφανῶς θὰ ἔχωμεν διὰ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἀρχικῶν ὀρθογωνίων :

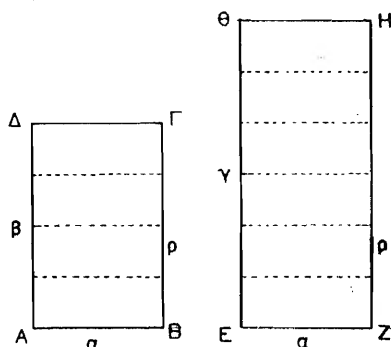
$$E(\alpha, \beta) = \mu \cdot E(\alpha, \rho) \quad \text{καὶ} \quad E(\alpha, \gamma) = \nu \cdot E(\alpha, \rho) \Rightarrow \frac{E(\alpha, \beta)}{E(\alpha, \gamma)} = \frac{\mu \cdot E(\alpha, \rho)}{\nu \cdot E(\alpha, \rho)} = \frac{\mu}{\nu}$$

καί, λόγῳ τῆς σχέσεως (1), ἡ τελευταία γράφεται

$$\frac{E(\alpha, \beta)}{E(\alpha, \gamma)} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ δταν τὰ τμήματα $A\Delta$ καὶ $E\Theta$ εἶναι ἀσύμμετρα. Ἡ ἀπόδειξις παραλείπεται, ὡς ἐκφεύγουσα τῶν πλαισίων τοῦ βιβλίου.

315. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὀρθογωνίων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν διαστάσεων αὐτῶν.

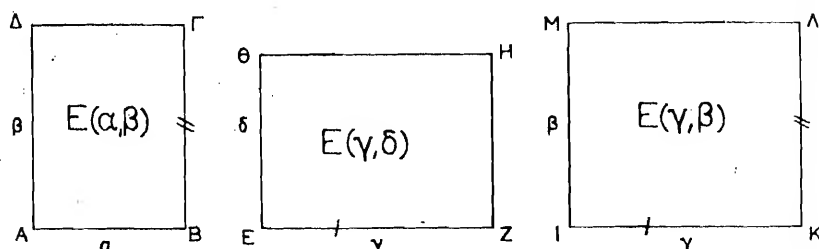


Σχ. 311

Ἀπόδειξις. Ἀς θεωρήσωμεν δύο ὀρθογώνια $AB\Gamma\Delta$ καὶ $EZH\Theta$ με διαστάσεις (α, β) καὶ (γ, δ) ἀντιστοίχως (σχ. 312).

Ἐὰν συμβολίσωμεν μὲ $E(\alpha, \beta)$ καὶ $E(\gamma, \delta)$ τὰ ἔμβαδά των, θὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{E(\alpha, \beta)}{E(\gamma, \delta)} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$.

Κατασκευάζομεν βοηθητικὸν ὀρθογώνιον $IK\Lambda M$, λαμβάνοντες ὡς διαστάσεις του ἀνὰ μίαν ἐξ ἐκάστου τῶν δύο πρώτων, ἥτοι με διαστάσεις β καὶ γ .



Σχ. 312

Ἐπομένως μὲ $E(\gamma, \beta)$ θὰ συμβολίσωμεν τὸ ἔμβαδόν του. Τότε, ἐκ τοῦ προηγούμενου θεωρήματος, ἔπεται ὅτι :

$$\frac{E(\alpha, \beta)}{E(\gamma, \beta)} = \frac{\alpha}{\gamma} \quad \text{καὶ} \quad \frac{E(\gamma, \beta)}{E(\gamma, \delta)} = \frac{\beta}{\delta}.$$

Πολλαπλασιάζομεν αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν :

$$\frac{E(\alpha, \beta)}{E(\gamma, \beta)} \cdot \frac{E(\gamma, \beta)}{E(\gamma, \delta)} = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\beta}{\delta} \iff \frac{E(\alpha, \beta)}{E(\gamma, \delta)} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}.$$

316. Μονάδες μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν. Ἡ θεωρία καὶ ἡ πράξις ἀπέδειξαν ὅτι αἱ πλέον κατάλληλοι καὶ αἱ πλέον εὐχρηστοὶ μονάδες μετρήσεως τῶν ἐμβαδῶν εἶναι αἱ τετραγωνικαὶ μονάδες, ἥτοι τὰ ἔμβαδά τετραγώνων, τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν. Κατ' ἀναλογίαν τῶν μονάδων μετρήσεως τῶν μηκῶν, θὰ ἔχωμεν ὡς βασικὴν μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ($1m^2$) καὶ ἐξ αὐτοῦ τὰ πολλαπλάσια καὶ ὑποποπλάσιά του.

317. Θεώρημα. Τὸ ἔμβαδόν ὀρθογωνίου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν διαστάσεών του.

Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν ἐμβαδῶν τετράγωνον πλευρᾶς 1. Τότε θὰ εἶναι $E(1, 1) = 1$ τετραγωνικὴ μονάς. Κατὰ τὸ θεώρημα 315 θὰ εἶναι :

$$\frac{E(\alpha, \beta)}{E(1, 1)} = \frac{\alpha\beta}{1 \cdot 1} = \alpha\beta.$$

Ἄρα : $E(\alpha, \beta) = \alpha\beta \cdot E(1, 1)$ ἢ $E(\alpha, \beta) = \alpha\beta$ τετραγωνικαὶ μονάδες, ὅπου $E(\alpha, \beta)$ εἶναι τὸ ἔμβαδὸν ὀρθογωνίου μετὰ διαστάσεις α καὶ β καὶ $E(1, 1)$ τὸ ἔμβαδὸν τῆς τετραγωνικῆς μονάδος.

Γενικῶς διὰ τὸ ἔμβαδὸν E ὀρθογωνίου διαστάσεων α καὶ β , ἔχομεν τὸν τύπον :

$$E = \alpha\beta$$

Πόρισμα. Τὸ ἔμβαδὸν τετραγώνου πλευρᾶς a , ἰσοῦται πρὸς a^2 .

Παρατήρησις : Ἀπὸ τὸν προηγούμενον τύπον $E = \alpha\beta$ τοῦ ἔμβαδοῦ ὀρθογωνίου, ἔπεται ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἔμβαδοῦ εἰς τετραγωνικὰς μονάδας ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν τμημάτων α καὶ β , ὅταν αὐτὰ μετρηθοῦν μετὰ τὴν αὐτὴν μονάδα μετρήσεως.

318. Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου. Θεώρημα. Τὸ ἔμβαδὸν παραλληλογράμμου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ἐπ' αὐτὴν ὕψος.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 313). Φέρομεν τὰς $AE \perp \Gamma\Delta$ καὶ $BZ \perp \Gamma\Delta$. Τότε εἶναι τριγ. $AE\Delta =$ τριγ. $BZ\Gamma$, διότι εἶναι ὀρθογώνια, ἔχουν τὰς $A\Delta = B\Gamma$, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς παραλληλογράμμου καὶ τὰς $AE = BZ$, ὡς παράλληλα τμήματα μεταξὺ παραλλήλων. Ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ἔμβαδὰ ἴσα, ἥτοι

$$(AE\Delta) = (BZ\Gamma).$$

Τότε θὰ εἶναι :

$$(AB\Gamma\Delta) = (ABZ\Delta) + (BZ\Gamma) = (ABZ\Delta) + (AE\Delta) = (ABZE).$$

Ἀλλὰ τὸ $ABZE$ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἐπομένως εἶναι $(ABZE) = AB \cdot AE$. Τότε ἡ τελευταία σχέσηις γράφεται :

$$(AB\Gamma\Delta) = AB \cdot AE$$

Θέτομεν $(AB\Gamma\Delta) = E$, $AB = \beta$, $AE = \upsilon$ καὶ λαμβάνομεν τὸν τύπον

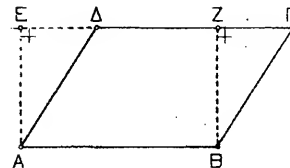
$$E = \beta\upsilon$$

ἥτοι τὸ ἔμβαδὸν παραλληλογράμμου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἐπ' αὐτὴν ὕψος.

Πόρισμα I. Δύο παραλληλόγραμμα μετὰ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσεμβαδικά.

Πόρισμα II. Ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα ἔχουν ἴσας βάσεις, ὁ λόγος τῶν ἔμβαδῶν τῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοιχοῦντων εἰς τὰς βάσεις ὕψων. Καὶ ἂν ἔχουν ἴσα ὕψη, ὁ λόγος τῶν ἔμβαδῶν τῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων βάσεων.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν, ἂς θεωρήσωμεν δύο παραλληλόγραμμα μετὰ ἴσας βάσεις



Σχ. 313

β και ύψη u_1 και u_2 . Τότε τὰ ἔμβαδά των θὰ εἶναι $E_1 = \beta u_1$ και $E_2 = \beta u_2 \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{\beta u_1}{\beta u_2} = \frac{u_1}{u_2}$. Ὀμοίως ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις και εἰς τὴν περιπτώσιν τῶν ἴσων ὑψῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

528. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἔμβαδὸν ὀρθογωνίου τοῦ ὁποίου ἡ μὲν διάστασις εἶναι 4m και ὁ λόγος τῆς πρὸς τὴν ἄλλην διάστασιν εἶναι 0,5.

529. Ὁρθογώνιον ἔχει βάσιν 8m και ἔμβαδὸν 36m^2 . Νὰ εὐρεθῇ τὸ ὕψος του.

530. Ποῖον εἶναι τὸ ἔμβαδὸν τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 44m ;

531. Ὁρθογώνιον και τετράγωνον εἶναι ἰσεμβαδικά. Ἄν ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 45m, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶναι τὰ $\frac{4}{9}$ τῆς βάσεώς του, νὰ εὐρεθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου.

532. Παραλληλογράμμου αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ ἔχουν μήκη 6m και 8m και σχηματίζουν γωνίαν 60° . Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἔμβαδὸν του.

319. Ἐμβαδὸν τριγώνου. Θεώρημα. Τὸ ἔμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον μιᾶς τῶν πλευρῶν του ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς ὕψος.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ (σχ. 314) και $AD = u_\alpha$ τὸ ὕψος του, ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πλευρὰν $B\Gamma = \alpha$. Ἐκ τῶν A και Γ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς $B\Gamma$ και BA ἀντιστοίχως, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς σημεῖον Z και οὕτω σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον $AB\Gamma Z$. Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον χωρίζεται δι' ἐκάστης τῶν διαγωνίων του εἰς δύο ἴσα τρίγωνα. Τότε θὰ εἶναι $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{\Gamma ZA}$ και ἐὰν θέσωμεν $(AB\Gamma) = E$ τότε θὰ εἶναι :

$$(1) \quad (AB\Gamma Z) = 2E$$

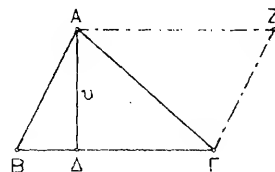
Ἀλλά, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, εἶναι :

$$(2) \quad (AB\Gamma Z) = B\Gamma \cdot AD = \alpha \cdot u_\alpha.$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) και (2) ἔπεται :

$$2E = \alpha \cdot u_\alpha \quad \eta$$

$$E = \frac{1}{2} \alpha \cdot u_\alpha$$



Σχ. 314

Ὀμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι : $E = \frac{1}{2} \beta \cdot u_\beta = \frac{1}{2} \gamma \cdot u_\gamma$.

Πόρισμα I. Τὸ ἔμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον τῶν καθέτων πλευρῶν του.

Πόρισμα II. Δύο τρίγωνα μὲ ἴσας βάσεις και ἴσα ὕψη εἶναι ἰσεμβαδικά.

Πόρισμα III. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσας βάσεις, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοιχῶν πρὸς τὰς βάσεις ὑψῶν. Ἐὰν ἔχουν ἴσα ὑψη, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοιχῶν πρὸς αὐτὰ βάσεων.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν, ἂς θεωρήσωμεν δύο τρίγωνα μὲ ἴσας βάσεις β καὶ ἕστωσαν υ_1 καὶ υ_2 τὰ ὕψη αὐτῶν. Ἐὰν E_1 καὶ E_2 εἶναι τὰ ἐμβαδὰ των, θὰ ἔχωμεν :

$$E_1 = \frac{1}{2} \beta \upsilon_1, \quad E_2 = \frac{1}{2} \beta \upsilon_2. \quad \text{Διὰ διαίρεσεως αὐτῶν κατὰ μέλη λαμβάνομεν :}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}. \quad \text{Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις μὲ τὰ ἴσα ὕψη.}$$

320. Ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α . Τὸ ὕψος ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α , ἰσοῦται πρὸς $\frac{\alpha \sqrt{3}}{2}$ (§ 303). Ἀρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ εἶναι :

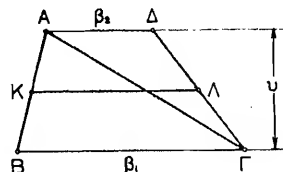
$$E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \frac{\alpha \sqrt{3}}{2} \Rightarrow E = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4}$$

321. Ἐμβαδὸν κυρτοῦ τραπεζίου. **Θεώρημα.** Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κυρτοῦ τραπεζίου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν βάσεων τοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἀπόδειξις. Ἐστω κυρτὸν τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$, τοῦ ὁποῦ αἱ βάσεις εἶναι $B\Gamma = \beta_1$ καὶ $A\Delta = \beta_2$ καὶ υ τὸ ὕψος αὐτοῦ (σχ. 315). Φέρομεν τὴν διαγώνιον AG , διὰ τῆς ὁποίας τὸ τραπέζιον χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα. Ἐὰν καλέσωμεν E τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, ἔχομεν :

$$(1) \quad E = (AB\Gamma) + (A\Delta\Gamma)$$

Ἀλλὰ τὰ δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A\Delta\Gamma$ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος υ καὶ βάσεις τὰς β_1 καὶ β_2 ἀντιστοίχως, ἐπομένως :



Σχ. 315

$$(2) \quad (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \beta_1 \cdot \upsilon \quad \text{καὶ} \quad (A\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} \beta_2 \cdot \upsilon$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται :

$$3) \quad E = \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2) \cdot \upsilon$$

Πόρισμα. Τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς διαμέσου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Πράγματι, ἐὰν εἶναι $K\Lambda = \delta$ ἡ διάμεσος τοῦ τραπεζίου, γνωρίζομεν (§ 156) ὅτι εἶναι $K\Lambda = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$. Τότε ὁ τύπος (3) γράφεται :

$$E = K\Lambda \cdot \upsilon \quad \text{ἢ} \quad E = \delta \upsilon.$$

322. Θεώρημα. Ο λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο τριγώνων, τὰ ὅποια ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην ἢ παραπληρωματικὴν, εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν ἴσην ἢ τὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A\Delta E$, τὰ ὅποια ἔχουν τὴν γωνίαν τῶν \widehat{A} ἴσην (σχ. 316 α) ἢ παραπληρωματικὴν (σχ. 316 β). Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι :

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{A\Delta \cdot AE}.$$

Φέρομεν τὴν BE . Τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ ABE ἔχουν ἀπὸ τὴν κορυφὴν B τὸ αὐτὸ ὕψος BZ . Ἄρα (§ 319 πόρ. III) θὰ εἶναι :

$$(1) \quad \frac{(AB\Gamma)}{(ABE)} = \frac{A\Gamma}{AE}$$

Ὁμοίως τὰ τρίγωνα ABE καὶ $A\Delta E$ ἔχουν ἀπὸ τὴν κορυφὴν E τὸ αὐτὸ ὕψος EH . Ἄρα θὰ εἶναι :

$$(2) \quad \frac{(ABE)}{(A\Delta E)} = \frac{AB}{A\Delta}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned} \frac{(AB\Gamma)}{(ABE)} \cdot \frac{(ABE)}{(A\Delta E)} &= \frac{A\Gamma}{AE} \cdot \frac{AB}{A\Delta} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{A\Delta \cdot AE}. \end{aligned}$$

ΕΜΒΑΔΑ ΤΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

323. Θεώρημα. Τὸ ἐμβαδὸν πολυγώνου, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον τῆς περιμέτρου αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $AB\Gamma\Delta E$ τυχὸν πολύγωνον, περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (O, ρ) (σχ. 317). Φέρομεν τὰς OA, OB, \dots, OE . Τότε θὰ εἶναι :

$$\begin{aligned} (AB\Gamma\Delta E) &= (OAB) + (OB\Gamma) + \dots + (OEA) = \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot \rho + \frac{1}{2} B\Gamma \cdot \rho + \dots + \frac{1}{2} EA \cdot \rho = \\ &= \frac{AB + B\Gamma + \dots + EA}{2} \cdot \rho. \end{aligned}$$

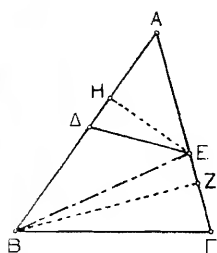
$$\text{Ἄρα } (AB\Gamma\Delta E) = \frac{1}{2} (AB + B\Gamma + \dots + EA) \cdot \rho.$$

Πόρισμα. Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον :

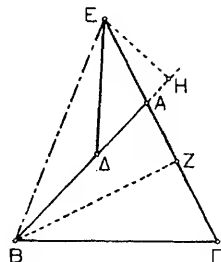
$$E = \tau \rho$$

ὅπου 2τ , εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ καὶ ρ ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

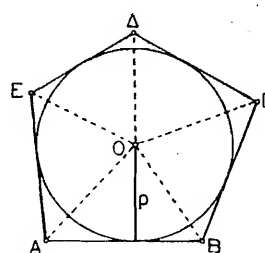
324. Ἐμβαδὸν οἰοῦδήποτε πολυγώνου. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἔμ-
βαδοῦ ἐνὸς τυχόντος πολυγώνου, ἀναλύομεν αὐτὸ ἐν γένει εἰς ἄθροισμα ἢ



Σχ. 316α



Σχ. 316β



Σχ. 317

διαφορὰν ἄλλων γνωστῶν ἔμβαδῶν, ἀναλόγως τῶν ἐκάστοτε γνωστῶν στοι-
χείων. Εἰς τὰ ἐπόμενα ὑποδεικνύομεν μερικοὺς τρόπους ἐργασίας :

i) Διὰ τριγωνισμοῦ μὲ διαγωνίους ἐκ μιᾶς κορυφῆς (σχ. 318).

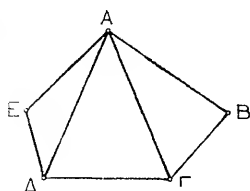
$$(ABΓΔΕ) = (ABΓ) + (AΓΔ) + (AΔΕ).$$

ii) Διὰ τριγωνισμοῦ, διαιροῦντες τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα μὲ κοινὴν
κορυφὴν γνωστὸν σημεῖον O (σχ. 319).

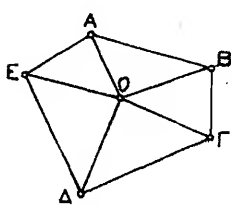
$$(ABΓΔΕ) = (OAB) + (OBΓ) + \dots + (OEA).$$

iii) Διαιροῦντες τὸ πολύγωνον εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ τραπέζια
(σχ. 320).

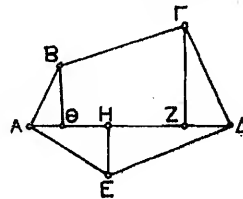
$$(ABΓΔΕ) = (ABΘ) + (BΓΖΘ) + (ΓΔΖ) + (ΔΕΗ) + (ΕΑΗ)$$



Σχ. 318



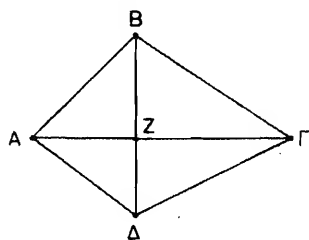
Σχ. 319



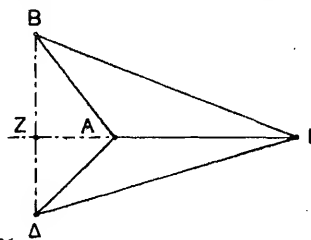
Σχ. 320

325. Θεώρημα. Τὸ ἔμβαδὸν παντὸς τετραπλεύρου, τοῦ ὁποῖου αἱ διαγῶ-
νιοι εἶναι κάθετοι, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τυχὸν τετράπλευρον ABΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς δια-
γωνίους του κάθετους, ἥτοι $AF \perp BD$ (σχ. 321). Διὰ τῆς διαγωνίου AF



Σχ. 321



τοῦτο χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A\Delta\Gamma$ καὶ συνεπῶς εἶναι :

$$(1) \quad (AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Delta\Gamma).$$

Τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουν κοινὴν τὴν βάσιν $A\Gamma$ καὶ ὕψη τὰ BZ καὶ ΔZ ἀντιστοίχως, ὅπου Z εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων.

Τότε ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned} (AB\Gamma\Delta) &= \frac{1}{2} A\Gamma \cdot BZ + \frac{1}{2} A\Gamma \cdot \Delta Z = \\ &= \frac{1}{2} A\Gamma \cdot (BZ + \Delta Z) = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot B\Delta \quad \eta \\ (AB\Gamma\Delta) &= \frac{1}{2} A\Gamma \cdot B\Delta \end{aligned}$$

Παρατήρησις. Ὡς ἀπεδείχθη, τὸ προηγούμενον θεώρημα ἰσχύει καὶ διὰ τὸ μὴ κυρτὸν τετράπλευρον τοῦ σχήματος 315 μὲ καθετοὺς τὰς διαγωνίους του. Δὲν ἰσχύει ὅμως τὸ θεώρημα διὰ τὰ μὴ κυρτὰ διασταυρούμενα τετράπλευρα.

Πόρισμα. Ἐὰν ρόμβος ἔχῃ διαγωνίους δ_1 καὶ δ_2 , τὸ ἐμβαδὸν του δίδεται ἐκ τοῦ τύπου.

$$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}.$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

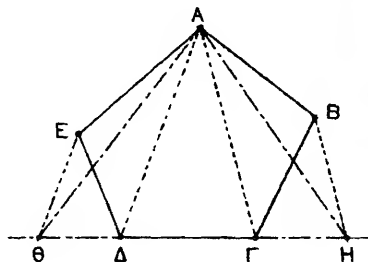
326. Πρόβλημα. Δοθὲν κυρτὸν πολύγωνον νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἄλλο ἰσεμβαδικόν, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ μίαν πλευρὰν ὀλιγωτέραν.

Λύσις. Ἐστω τὸ κυρτὸν πεντάγωνον $AB\Gamma\Delta E$ (σχ. 322). Δυνάμεθα νὰ τὸ μετασχηματίσωμεν εἰς ἄλλο ἰσεμβαδικόν, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τέσσαρας πλευράς, ὡς ἐξῆς: Φέρομεν τὴν διαγώνιον $A\Gamma$ καὶ ἀπὸ τὴν κορυφὴν B φέρομεν τὴν $BH \parallel A\Gamma$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς $\Delta\Gamma$ εἰς τὸ H . Τέλος φέρομεν τὴν AH . Τὸ πεντάγωνον $AB\Gamma\Delta E$ εἶναι ἰσεμβαδικόν μὲ τὸ τετράπλευρον $AH\Delta E$. Πράγματι εἶναι :

$$(1) \quad (AB\Gamma) = (AH\Gamma),$$

διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν $A\Gamma$ καὶ ἴσα ὕψη, ἀφοῦ εἶναι $BH \parallel A\Gamma$. Εἰς τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (1) προσθέτομεν τὸ τετράπλευρον $(A\Gamma\Delta E)$, ἥτοι :

$$\begin{aligned} (AB\Gamma) + (A\Gamma\Delta E) &= (AH\Gamma) + (A\Gamma\Delta E) \quad \eta \\ (AB\Gamma\Delta E) &= (AH\Delta E). \end{aligned}$$



Σχ. 322

Παρατήρησης. "Αν φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΑΔ καὶ τὴν ΕΘ // ΑΔ καὶ τὴν ΑΘ, εὐρίσκομεν ὁμοίως (ΑΗΔΕ) = (ΑΗΘ). Ὡστε :

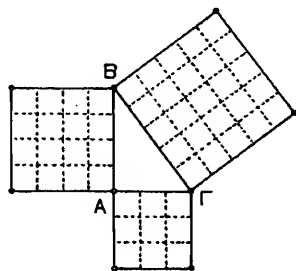
$$(ΑΒΓΔΕ) = (ΑΗΔΕ) = (ΑΗΘ),$$

Τελικῶς τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ μετεσχηματίσθη εἰς τὸ ἰσεμβαδικὸν τρίγωνον ΑΗΘ.

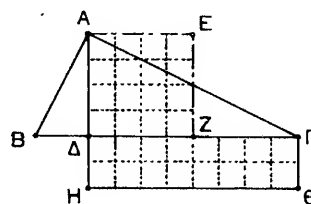
327. Τὸ γινόμενον δύο εὐθυγράμμων τμημάτων ὡς γεωμετρικὸν μέγεθος.

Μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῆς ἐννοίας τοῦ ἔμβαδοῦ, τὸ γινόμενον δύο εὐθυγράμμων τμημάτων, τὸ ὁποῖον μέχρι πρὸ τῶν ἔμβαδῶν εἶχε ἀπλῶς τὴν ἐννοιαν τοῦ γινομένου τῶν μέτρων των, λαμβάνει ὑπόστασιν γεωμετρικοῦ μεγέθους καὶ συγκεκριμένως ὑπόστασιν ἔμβαδοῦ.

Οὕτως, ἡ βασικὴ σχέσις $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος, ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα, δύναται νὰ ἐρμηνευθῇ ὡς ἐκφράζουσα σχέσιν ἔμβαδῶν τῶν τετραγώνων, ποὺ κατασκευάζονται ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου (σχ. 323) μὲ πλευρὰς τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς τοῦ τριγώνου.



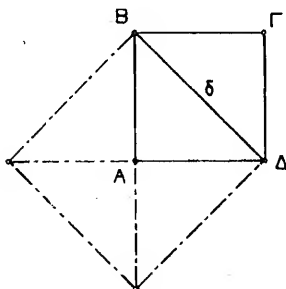
Σχ. 323



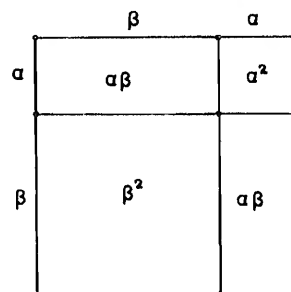
Σχ. 324

Ἡ γνωστὴ σχέσις ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $\alpha^2 = \Delta B \cdot \Delta \Gamma$ (σχ. 324), ἐκφράζει ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΔΖΕ ἔχει ἔμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ ἔμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΔΓΘΗ μὲ διαστάσεις ΓΔ καὶ ΔΗ = ΔΒ.

Ἐπίσης ἡ γνωστὴ σχέσις $\delta = \alpha\sqrt{2}$, ποὺ συνδέει τὴν διαγώνιον δ τετρα-



Σχ. 325



Σχ. 326

γώνου με την πλευράν του α και ή οποία γράφεται και $\delta^2 = 2\alpha^2$, εκφράζει ότι τὸ τετράγωνον, ποὺ κατασκευάζεται ἐπὶ τῆς διαγωνίου τετραγώνου με πλευράν τὴν διαγώνιον, εἶναι διπλάσιον ἀπὸ τὸ τετράγωνον (βλ. καὶ σχῆμα 325).

Γενικῶς κάθε ὁμογενὴς σχέσις δευτέρου βαθμοῦ, ὡς πρὸς τὸ μῆκος, ἐρμηνεύεται ὡς σχέσις ἐμβαδῶν. Ἐν ἀκόμῃ παράδειγμα, ἡ γνωστὴ ταυτότης $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, ὅπου τὰ α καὶ β παριστοῦν εὐθύγραμμα τμήματα, παριστᾷ σχέσιν ἐμβαδῶν ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 326.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

533. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἐπὶ πλευρᾶς 5 m, ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι 10 m².

534. Ὁρθογωνίου τριγώνου αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι 3 m καὶ 4 m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καὶ τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

535. Τρίγωνον καὶ ὀρθογώνιον ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ εἶναι ἰσεμβαδικά. Νὰ εὑρεθῇ σχέσις συνδέουσα τὰ ἀντίστοιχα ὕψη των.

536. Δείξατε ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων, ποὺ ἔχουν κορυφὴν τυχὸν σημεῖον τῆς περιμέτρου παραλληλογράμμου καὶ βάσεις τὰς διαγωνίους αὐτοῦ, ἔχουν σταθερὸν ἄθροισμα.

537. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τοῦ ὁποῖου αἱ δύο πλευραὶ εἶναι 12 m καὶ 8 m, ἡ δὲ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία εἶναι 30° ἢ 150°. Συγκρίνατε καὶ αἰτιολογήσατε τὰ ἀποτελέσματα εἰς τὰς δύο περιπτώσεις.

538. Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον μία διάμεσος τὸ διαιρεῖ εἰς δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα.

539. Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς του.

540. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, τοῦ ὁποῖου αἱ βάσεις εἶναι 4 m καὶ 6 m ἡ δὲ ἀπόστασις των εἶναι 3 m.

541. Τραπεζίου ἡ μία βάσις εἶναι τριπλασία τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθοῦν αὗται, ἐὰν τὸ ὕψος του εἶναι 3 m καὶ τὸ ἐμβαδὸν του εἶναι 12 m².

542. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς μιᾶς διαγωνίου παραλληλογράμμου φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς του. Δείξατε ὅτι ἐκ τῶν τεσσάρων σχηματιζομένων παραλληλογράμμων τὰ δύο, ποὺ δὲν περιέχουν τμήματα τῆς διαγωνίου αὐτῆς, εἶναι ἰσοδύναμα.

543. Ἐὰν συνδέσωμεν δι' εὐθυγράμμων τμημάτων τυχὸν σημεῖον Σ ἐσωτερικὸν παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ μετὰ τὰς κορυφάς του, δείξατε ὅτι :

$$(\Sigma AB) + (\Sigma \Gamma D) = (\Sigma A \Delta) + (\Sigma B \Gamma)$$

544. Ἐὰν συνδέσωμεν τυχὸν σημεῖον Σ τῆς διαγωνίου ΒΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ μετὰ τὰς κορυφάς Α καὶ Γ, δείξατε ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον διαιρεῖται εἰς δύο ζεύγη ἰσοδυνάμων τριγώνων.

545. Ἀπὸ τὰς κορυφάς τυχόντος τετραπλεύρου φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους του. Δείξατε ὅτι τὸ σχηματισθὲν περιγεγραμμένον περὶ τὸ τετράπλευρον παραλληλόγραμμον, ἔχει ἐμβαδὸν διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραπλεύρου.

546. Δείξατε ὅτι τὰ δύο τρίγωνα, τὰ ὅποια ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τραπεζίου καὶ βάσεις τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς αὐτοῦ, εἶναι ἰσοδύναμα.

547. Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ και $\widehat{B} + \widehat{E} = 2\angle$. Δείξτε ότι είναι :

$$\frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$

548. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$. Έκ τυχόντος σημείου M ἄγομεν καθέτους ἐπὶ τὰς AB καὶ $A\Gamma$ καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα $MA = AB$ καὶ $ME = A\Gamma$. Δείξτε ὅτι εἶναι $(AB\Gamma) = (M\Delta E)$.

549. Τρίγωνον $AB\Gamma$ ἔχει $AB = 48$ m καὶ $A\Gamma = 12$ m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μήκος ἐκάστης τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἰσοδύναμου πρὸς αὐτό, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοῦται μετὰ τὴν γωνίαν \widehat{A} τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

550. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$. Έκ σημείου O ἐσωτερικοῦ τοῦ $AB\Gamma$ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευράς AB , $B\Gamma$, ΓA καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα $OA = AB$, $OE = B\Gamma$, $OZ = \Gamma A$ ἀντιστοίχως. Δείξτε ὅτι εἶναι $(\Delta EZ) = 3(AB\Gamma)$.

B.

551. Νὰ διαιρεθῇ τετράγωνον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς του.

552. Νὰ διαιρεθῇ παραλληλόγραμμον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς του.

553. Νὰ διαιρεθῇ παραλληλόγραμμον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθείας, διερχομένης ἐκ σημείου Σ αὐτοῦ.

554. Έάν συνδέσωμεν τὸ κέντρον βάρους τριγώνου μετὰ τὰς κορυφάς του, δείξτε ὅτι τοῦτο διαιρεῖται εἰς τρία ἰσοδύναμα τρίγωνα.

555. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον, μετὰ κορυφάς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τυχόντος τετραπλεύρου, ἔχει ἔμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἔμβαδου τοῦ τετραπλεύρου.

556. Δείξτε ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τραπεζίου ἰσοῦται μετὰ τὸ γινόμενον τῆς μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ μέσου τῆς ἄλλης ἀπ' αὐτήν.

557. Δίδεται παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$ καὶ σημεῖον O , μὴ κείμενον ἐντὸς τῆς γωνίας \widehat{A} οὔτε ἐντὸς τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς. Δείξτε ὅτι εἶναι $(OAG) = (OAB) + (OAD)$.

558. Τριγώνου $AB\Gamma$ προεκτείνομεν τὰς πλευράς του κατὰ κυκλικὴν σειρὰν καὶ ἐφ' ἐκάστης προεκτάσεως λαμβάνομεν τμήματα $AG' = A\Gamma$, $BA' = BA$, $\Gamma B' = \Gamma B$. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου $A'B'\Gamma'$ συναρτήσει τοῦ ἔμβαδου E τοῦ $AB\Gamma$.

559. Παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνομεν τὰς πλευράς του κατὰ κυκλικὴν σειρὰν καὶ ἐφ' ἐκάστης προεκτάσεως λαμβάνομεν τμήματα $AD' = AD$, $BA' = BA$, $\Gamma B' = \Gamma B$, $\Delta\Gamma' = \Delta\Gamma$. α) Δείξτε ὅτι τὸ $A'B'\Gamma'\Delta'$ εἶναι παραλληλόγραμμον. β) Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ $A'B'\Gamma'\Delta'$ συναρτήσει τοῦ ἔμβαδου E τοῦ $AB\Gamma\Delta$.

560. Τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον κέντρου O . Δείξτε ὅτι εἶναι $(OAB) + (O\Gamma\Delta) = (OAD) + (OB\Gamma)$.

561. Δοθὲν κυρτὸν πεντάγωνον νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ὀρθογώνιον.

562. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ σημεῖον Σ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$. Έκ τῆς κορυφῆς A φέρομεν εὐθεῖαν $(\epsilon) \perp A\Sigma$ καὶ ἐκ τῶν B καὶ Γ φέρομεν τὰς BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$ καθέτους ἐπὶ τὴν (ϵ) . Δείξτε ὅτι εἶναι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} A\Sigma \cdot B'\Gamma'$$

563. Δίδεται ὀξυγώνιον τρίγωνον καὶ ὁ περιγεγραμμένος αὐτοῦ κύκλος. Δείξτε ὅτι

τὸ κυρτὸν ἐξάγωνον, μὲ κορυφὰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου καὶ τὰ ἀντιδιαμετρικὰ αὐτῶν σημεία, ἔχει ἐμβαδὸν διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου.

564. Ἀπὸ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου φέρομεν ἀνὰ μίαν παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην διαγώνιον καὶ ἔστω ὅτι αὗται τέμνονται εἰς τὸ Ο. Ἐὰν συνδέσωμεν τὸ Ο μὲ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον διαιρεῖται εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα τετράπλευρα.

565. Ἐὰν Ο εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος μὲ ἄκρα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ συνδέσωμεν αὐτὸ μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ τετραπλεύρου, δείξατε ὅτι εἶναι : $(OAB) + (OD\Gamma) = (OAD) + (OB\Gamma)$.

566. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἐκατέρωθεν τοῦ μέσου Μ αὐτῆς λαμβάνομεν τμήματα ΜΔ = ΜΕ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἥ ὅποια τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Ἐὰν ἡ ΒΖ τέμνῃ τὴν ΑΕ εἰς τὸ Η, δείξατε ὅτι εἶναι $(ABH) = (HZ\Gamma E)$.

567. Ἀπὸ σημείου Σ τῆς πλευρᾶς ΑΒ δοθέντος τετραπλεύρου ΑΒΓΔ νὰ ἀχθῇ εὐθεΐα, ἥ ὅποια νὰ διαιρῇ τὸ τετράπλευρον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

568. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ὁ κύκλος μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ τέμνει τὸ ὕψος ΑΔ εἰς τὸ Ε. Ἐὰν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου, δείξατε ὅτι εἶναι

$$\alpha) \Delta E^2 = \Delta A \cdot \Delta H \text{ καὶ } \beta) \frac{(EB\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{(HB\Gamma)}{(EB\Gamma)}.$$

569. Τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $AB = \gamma$, $AG = \beta$ καὶ $\hat{A} = 30^\circ$. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ καὶ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου κατασκευάζομεν τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ καὶ φέρομεν τὴν ΕΗ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν (ΒΓΖΗΕΔΒ).

328. Ἐμβαδὸν τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν του. Πρόβλημα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν Ε τριγώνου ΑΒΓ, ἐκ τῶν πλευρῶν α, β, γ αὐτοῦ.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ μὲ $\hat{B} < 1^\circ$ (σχ. 327). Φέρομεν τὸ ὕψος $AD = u_\alpha$ καὶ ἔχομεν :

$$(1) \quad E = \frac{1}{2} \alpha \cdot u_\alpha$$

Ἀρκεῖ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος u_α ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ ἔχομεν

$$(2) \quad u_\alpha^2 = \gamma^2 - B\Delta^2$$

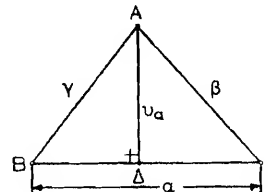
Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ΒΔ ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Ἐκ τοῦ θεωρήματος 306 λαμβάνομεν :

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot B\Delta. \text{ Ἄρα } B\Delta = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha} \quad \eta$$

$$(3) \quad B\Delta^2 = \frac{(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2}.$$

Δυνάμει τῆς (3) ἡ (2) γράφεται :

$$u_\alpha^2 = \gamma^2 - \frac{(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha^2\gamma^2 - (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2} =$$



Σχ. 327

τὸ
ἀν
τὸ
με
τὰ
ὀρθ
καὶ
ξον

Ἄρ

σω

15

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2\alpha\gamma + \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2) \cdot (2\alpha\gamma - \alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2)}{4\alpha^2} = \\
 &= \frac{[(\alpha + \gamma)^2 - \beta^2] \cdot [\beta^2 - (\alpha - \gamma)^2]}{4\alpha^2} = \\
 &= \frac{(\alpha + \gamma + \beta)(\alpha + \gamma - \beta)(\beta + \alpha - \gamma)(\beta - \alpha + \gamma)}{4\alpha^2}
 \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ ὁμῶς εἶναι :

$$\begin{aligned}
 \alpha + \beta + \gamma &= 2\tau, \quad \text{ἔπεται } \alpha + \beta - \gamma = 2(\tau - \gamma), \\
 \alpha - \beta + \gamma &= 2(\tau - \beta) \quad \text{καὶ } \beta - \alpha + \gamma = 2(\tau - \alpha).
 \end{aligned}$$

Τότε ἡ τελευταία σχέσηις γράφεται :

$$u_\alpha^2 = \frac{2\tau \cdot 2(\tau - \alpha) \cdot 2(\tau - \beta) \cdot 2(\tau - \gamma)}{4\alpha^2} \quad \eta$$

$$(4) \quad u_\alpha = \frac{2\sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}}{\alpha}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (4) ἔπεται ὅτι :

$$E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος τοῦ ἔμβαδου ἑνὸς τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι γνωστὸς ὡς τύπος τοῦ Ἡρώωνος.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΚΤΙΝΩΝ ΤΩΝ ΚΥΚΛΩΝ ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ ΑΥΤΟΥ

★ 329. Θεώρημα. Εἰς κάθε τρίγωνον τὸ γινόμενον τῶν δύο πλευρῶν τοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸ κύκλου ἐπὶ τὸ ὕψος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ΑΔ = u_α , τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ὕψος τοῦ καὶ ΑΚΕ = 2R ἡ διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸ κύκλου (σχ. 328). Τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΒΕ εἶναι ὁμοία, διότι εἶναι ὀρθογώνια ($\widehat{ABE} = 1^\circ$ ὡς βαίνουσα εἰς ἡμικύκλιον) καὶ ἔχουν $\widehat{\Gamma} = \widehat{E}$, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τόξον. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος λαμβάνομεν

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AG} \quad \eta \quad \frac{\gamma}{u_\alpha} = \frac{2R}{\beta}$$

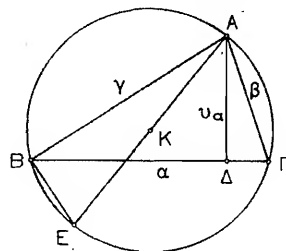
Ἄρα

$$\beta\gamma = 2Ru_\alpha$$

Πόρισμα I. Τὸ ἔμβαδὸν παντὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$

Πράγματι, ἐὰν τὴν ἀποδειχθεῖσαν σχέσιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ α, λαμβάνομεν :

$$\alpha\beta\gamma = 2Ru_\alpha \quad \eta \quad \alpha\beta\gamma = 2R \cdot 2E. \quad \text{Ἄρα } E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$$



Σχ. 328

Πόρισμα II. Ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περί τριγώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $R = \frac{αβγ}{4 \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}}$.

Πράγματι, ἐκ τοῦ προηγουμένου τύπου λαμβάνομεν $R = \frac{αβγ}{4E}$ καί, ἐπειδὴ εἶναι (§ 328) $E = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$, ἔπεται ὅτι

$$R = \frac{αβγ}{4 \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}}$$

★ 330. Ὑπολογισμός τῆς ἀκτίνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τρίγωνον. Γνωρίζομεν ὅτι (§ 323, πόρ.) τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου εἶναι $E = τ \cdot ρ$. Ἐξ αὐτοῦ λαμβάνομεν

$$ρ = \frac{E}{τ} \quad \text{ἢ} \quad ρ = \frac{\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}}{τ}$$

$$\text{ἢ} \quad ρ = \sqrt{\frac{(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}{τ}}$$

★ 331. Ὑπολογισμός τῶν ἀκτίνων τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων. Ἐστω τρίγωνον $ABΓ$, K τὸ κέντρον τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὴν πλευρὰν $α$ καὶ $R_α$ ἡ ἀκτίς αὐτοῦ (σχ. 329). Τὸ ἐμβαδὸν E τοῦ τριγώνου $ABΓ$ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ, ὡς ἐξῆς :

$$E = (KAB) + (KAT) - (KBΓ) =$$

$$= \frac{1}{2} γR_α + \frac{1}{2} βR_α - \frac{1}{2} αR_α = \frac{1}{2} (γ + β - α) R_α = \frac{1}{2} 2(τ - α)R_α =$$

$$= (τ - α)R_α \quad \text{ἢ} \quad E = (τ - α)R_α \quad \text{ἄρα}$$

$$R_α = \frac{E}{τ - α} \quad \text{ἢ}$$

$$R_α = \frac{\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}}{τ - α} = \sqrt{\frac{τ(τ-β)(τ-γ)}{τ - α}}$$

$$\text{ἄρα} \quad R_α = \sqrt{\frac{τ(τ-β)(τ-γ)}{τ - α}}$$

Ὁμοίως λαμβάνομεν.

$$R_β = \frac{E}{τ - β} = \sqrt{\frac{τ(τ-α)(τ-γ)}{τ - β}}$$

$$\text{καὶ} \quad R_γ = \frac{E}{τ - γ} = \sqrt{\frac{τ(τ-α)(τ-β)}{τ - γ}}$$

ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

332. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ὁμοια τρίγωνα $A_1B_1Γ_1$ καὶ $A_2B_2Γ_2$ (σχ. 330). Ἄν $λ$ εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν καὶ $α, β, γ$, εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ $A_2B_2Γ_2$, τότε $λα, λβ, λγ$ θὰ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ $A_1B_1Γ_1$. Ἐπειδὴ τὰ δύο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

570. Τρίγωνον έχει πλευράς 25 cm, 52 cm, 63 cm. Νά υπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

571. Παραλληλογράμμου αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ ἔχουν μήκη 9 cm καὶ 10 cm καὶ ἡ μία διαγωνίος εἶναι 17 cm. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

572. Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἰσοῦται μὲ $\tau(\tau - \alpha)$. Δείξατε ὅτι τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

573. Τρίγωνον ABΓ ἔχει ἐμβαδὸν 90 m². Ἐκ σημείου M τοῦ ὕψους ΑΔ, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τοῦτο εἰς δύο τμήματα ἔχοντα λόγον 2/1, φέρομεν παράλληλον τῆς ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΕΖ.

574. Τρίγωνον ABΓ ἔχει $\alpha = 17$ cm, $\beta = 8$ cm, $\gamma = 15$ cm. i) Δείξατε ὅτι εἶναι ὀρθογώνιον. ii) Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ. Νά υπολογισθῇ ὁ λόγος $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$.

ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

★ 334. Πρώτον Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου. Εἰς πᾶν ἐγγράψιμον τετράπλευρον τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων τοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ ἐγγράψιμον εἰς κύκλον τετράπλευρον ABΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευράς AB = α , ΒΓ = β , ΓΔ = γ , ΔΑ = δ καὶ διαγωνίους ΒΔ = λ καὶ ΑΓ = μ . Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι :

$$BD \cdot AG = AB \cdot GD + BG \cdot AD \quad \eta \\ \lambda \mu = \alpha \gamma + \beta \delta.$$

Με πλευράν τὴν ΑΒ καὶ κορυφὴν Α κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{BAE} = \widehat{GAD} = \omega$, (σχ. 332), ἐνθα Ε εἶναι ἡ τομὴ τῆς ΑΕ καὶ τῆς δια-

γωνίου ΒΔ. Τότε θὰ εἶναι τριγ. ABE \approx τριγ. ΑΓΔ, διότι ἔχουν $\widehat{BAE} = \widehat{GAD} = \omega$ ἐκ κατασκευῆς καὶ $\widehat{ABE} = \widehat{AGD}$ ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τόξον. Ἀρα θὰ εἶναι :

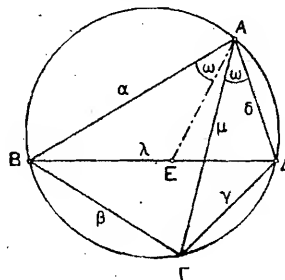
$$(1) \quad \frac{AB}{AG} = \frac{BE}{GD} \quad \eta \quad \frac{\alpha}{\mu} = \frac{BE}{\gamma}. \quad \text{Ἀρα} \quad \mu \cdot BE = \alpha \gamma.$$

Ἐπίσης ἔχομεν τριγ. ABΓ \approx τριγ. ΑΕΔ, ὡς ἔχοντα $\widehat{BAG} = \widehat{EAD} = \omega + \widehat{EAG}$ καὶ $\widehat{BGA} = \widehat{EDA}$, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τόξον. Ἀρα θὰ εἶναι :

$$(2) \quad \frac{BG}{ED} = \frac{AG}{AD} \quad \eta \quad \frac{\beta}{\mu} = \frac{ED}{\delta}. \quad \text{Ἀρα} \quad \mu \cdot ED = \beta \delta.$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς τελευταίας τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) εὐρίσκομεν : $\mu(BE + ED) = \alpha \gamma + \beta \delta$. καὶ, ἐπειδὴ εἶναι $BE + ED = BD = \lambda$, ἡ τελευταία ἰσότης γράφεται :

$$\lambda \mu = \alpha \gamma + \beta \delta.$$



Σχ. 332

★ 335. Δεύτερον θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου. Εἰς πᾶν ἐγγράψιμον τετράπλευρον ὁ λόγος τῶν διαγωνίων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν, τῶν συντρεχουσῶν εἰς τὰ ἄκρα ἐκάστης διαγωνίου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ ἐγγράψιμον εἰς κύκλον τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς ΑΒ = α, ΒΓ = β, ΓΔ = γ, ΔΑ = δ καὶ διαγωνίους ΒΔ = λ καὶ ΑΓ = μ (σχ. 332). Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{\alpha\delta + \beta\gamma}$$

Γνωρίζομεν ὅτι (§ 329, πόρ. Ι) εἶναι :

$$(1) \quad (\text{ΑΒΔ}) = \frac{\lambda\alpha\delta}{4R} \quad \text{καὶ}$$

$$(2) \quad (\text{ΓΒΔ}) = \frac{\lambda\beta\gamma}{4R},$$

ὅπου R ἡ ἀκτίς τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓΔ περιγεγραμμένου κύκλου.

Διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$(3) \quad (\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{\lambda(\alpha\delta + \beta\gamma)}{4R}$$

Ἐπίσης ἔχομεν :

$$(4) \quad (\text{ΒΑΓ}) = \frac{\mu\alpha\beta}{4R} \quad \text{καὶ} \quad (\text{ΔΑΓ}) = \frac{\mu\gamma\delta}{4R}$$

Προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$(5) \quad (\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{\mu(\alpha\beta + \gamma\delta)}{4R}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (3) καὶ (5) λαμβάνομεν :

$$\lambda(\alpha\delta + \beta\gamma) = \mu(\alpha\beta + \gamma\delta) \quad \eta$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{\alpha\delta + \beta\gamma}$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Α'.

575. Εἰς κύκλον ἐγγράφομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐὰν Μ εἶναι σημεῖον τοῦ ἐλάσσονος τόξου ΒΓ, δείξατε ὅτι εἶναι ΜΑ = ΜΒ + ΜΓ.

576. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ τρία σημεῖα τοῦ Α, Β, Γ. Ἐὰν εἶναι ΑΒ = α, ΒΓ = β, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΑΓ ἐκ τῶν α, β καὶ R.

577. Κυρτοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ δίδονται τὰ μήκη τῶν τεσσάρων πλευρῶν τοῦ α, β, γ, δ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν διαγωνίων τοῦ.

Β'.

578. Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Κύκλος διερχόμενος διὰ τῆς κορυφῆς Α τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΔ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Η ἀντιστοίχως καὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Δείξατε ὅτι εἶναι :

$$ΑΒ \cdot ΑΕ + ΑΔ \cdot ΑΗ = ΑΓ \cdot ΑΖ$$

579. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας xAy λαμβάνομεν δύο τμήματα ΑΜ καὶ ΑΝ συνδεόμενα διὰ τῆς σχέσεως α. ΑΜ + β. ΑΝ = λ², ὅπου α, β καὶ λ δοθέντα τμήματα. Δείξατε ὅτι ὁ κύκλος, ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ τρίγωνον ΑΜΝ, διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου (ἴδε ἄσκ. 578).

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΔΙΧΟΤΟΜΩΝ ΓΩΝΙΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

336. Θεώρημα τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου. Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος γωνίας τριγώνου τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς δύο μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰς προσκειμένας πλευρὰς τοῦ τριγώνου καὶ ἀντιστρόφως.

Ἄν AD εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας \widehat{A} , θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι $\frac{DB}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς κορυφῆς B φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον AD , ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς GA εἰς τὸ E (σχ. 333). Τότε, κατὰ τὸ Θ. 265, πόρ. θὰ εἶναι :

$$(1) \quad \frac{DB}{\Delta\Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma}$$

Ἀλλά, ἐπειδὴ $EB \parallel AD$, ἔχομεν $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$ καὶ $\widehat{E} = \widehat{A}_2$ καί, ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ ἔπεται ὅτι $\widehat{B}_1 = \widehat{E}$, ἥτοι τὸ τρίγωνον ABE εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἄρα $AE = AB$. Τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$(2) \quad \frac{DB}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

Ἀντιστρόφως : Ἐστω ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἰσχύει ἡ σχέσις (2). Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ AD εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας \widehat{A} . Φέρομεν τὴν $BE \parallel AD$ καὶ λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν (1). Αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) ἔχουν τὰ πρῶτα μέλη των ἴσα. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \text{ καὶ ἄρα } AE = AB.$$

Ὡστε τὸ τρίγωνον ABE εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἄρα $\widehat{B}_1 = \widehat{E}$. Ἀλλά, λόγῳ τῶν $BE \parallel AD$, ἔχομεν :

$$\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1 \text{ καὶ } \widehat{E} = \widehat{A}_2. \text{ Ἄρα : } \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$$

καὶ ἐπομένως ἡ AD εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας \widehat{A} .

Παρατήρησις : Ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία (2) γράφεται :

$$\frac{DB}{\Delta\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}, \text{ ἢ } \frac{DB}{DB + \Delta\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}, \text{ ἢ } \frac{DB}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}$$

$$\text{Ἄρα : } DB = \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma}. \text{ Ὁμοίως εὐρίσκομεν } \Delta\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta + \gamma}.$$

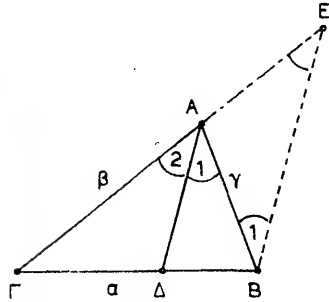
337. Θεώρημα τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου. Ἡ διχοτόμος ἐξωτερικῆς γωνίας τριγώνου τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς εἰς σημεῖον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ ἕκτρα τῆς πλευρᾶς αὐτῆς εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς προσκειμένας πλευρὰς τοῦ τριγώνου καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐάν AZ εἴναι ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας \widehat{A} , θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι $\frac{ZB}{Z\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

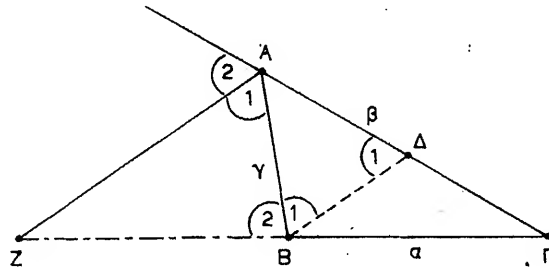
Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὴν $B\Delta \parallel AZ$ (σχ. 334). Τότε, κατὰ τὸ Θ. 265 πόρ. ἔχομεν :

$$(1) \quad \frac{ZB}{Z\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma}.$$

Ἀλλὰ, λόγῳ τῶν $AZ \parallel B\Delta$, ἔχομεν $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$ καὶ $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{A}_2$ καί, ἐπειδὴ



Σχ. 333



Σχ. 334

εἶναι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, ἔπεται : $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$, ἥτοι τὸ τρίγωνον $AB\Delta$ εἶναι ἰσοσκελές. Ἀρα $A\Delta = AB$. Τότε ἡ ἀναλογία (1) γίνεται :

$$(2) \quad \frac{ZB}{Z\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

Ἀντιστρόφως : Ἐστω ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἰσχύει ἡ ἀναλογία (2). Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ AZ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας \widehat{A} . Φέρομεν τὴν $B\Delta \parallel AZ$. Τότε ἰσχύει ἡ ἀναλογία (1). Αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) ἔχουν τὰ πρῶτα μέλη των ἴσα. Ἀρα θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}, \quad \text{καὶ ἄρα} \quad A\Delta = AB.$$

Ὡστε τὸ τρίγωνον $AB\Delta$ εἶναι ἰσοσκελές καὶ ἄρα εἶναι $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$. Ἀλλὰ, λόγῳ τῶν $B\Delta \parallel AZ$, ἔχομεν :

$\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$ καὶ $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{A}_2$. Ἀρα $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, ἥτοι ἡ AZ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας \widehat{A} .

Παρατηρήσεις. i) Τὸ σημεῖον Z εὐρίσκεται πρὸς τὸ μέρος τῆς μικρότερης πλευρᾶς (σχ. 334). Πράγματι, ἔστω ὅτι $\beta > \gamma \iff \widehat{B} > \widehat{\Gamma} \Rightarrow \widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \varphi > 0$. Ἡ γωνία \widehat{A}_1 , ὡς τὸ ἥμισυ τῆς ἐξωτερικῆς τῆς \widehat{A} , ἰσοῦται πρὸς

$\frac{\widehat{B} + \widehat{\Gamma}}{2}$. Άρκει νὰ δείξωμεν ὅτι $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_2 < 2\iota$, ὅπου \widehat{B}_2 ἡ ἐξωτερικὴ τῆς \widehat{B} .

$$\widehat{A}_1 + \widehat{B}_2 = \frac{\widehat{B} + \widehat{\Gamma}}{2} + 2\iota - \widehat{B} = 2\iota - \frac{\widehat{B} - \widehat{\Gamma}}{2} = 2\iota - \frac{\varphi}{2} < 2\iota.$$

ii) Ὑπολογισμὸς τῶν ἀποστάσεων τοῦ Z ἀπὸ τὰ B καὶ Γ :

$$\frac{ZB}{Z\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta} \quad \eta \quad \frac{ZB}{Z\Gamma - ZB} = \frac{\gamma}{\beta - \gamma} \quad \eta \quad \frac{ZB}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta - \gamma}$$

$$\text{Άρα : } ZB = \frac{\alpha\gamma}{\beta - \gamma}. \quad \text{Ὁμοίως εὐρίσκομεν } Z\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta - \gamma}.$$

Εἰς τὸ σχῆμα 334 ὑπετέθη $\beta > \gamma$. Ἄν εἶναι $\gamma > \beta$, τότε αἱ ἄνω τιμαὶ τῶν ZB καὶ ZΓ γίνονται $ZB = \frac{\alpha\gamma}{\gamma - \beta}$ καὶ $Z\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\gamma - \beta}$. Ὡστε γενικῶς εὐρίσκομεν :

$$ZB = \frac{\alpha\gamma}{|\beta - \gamma|} \quad \text{καὶ} \quad Z\Gamma = \frac{\alpha\beta}{|\beta - \gamma|}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

580. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ διάμεσος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ μὲ τὴν πλευρὰν ΒΓ, τέμνουν τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Δείξατε ὅτι εἶναι ΕΖ//ΒΓ.

581. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ΑΒ = 7,5 cm, ΒΓ = 8 cm καὶ ΑΓ = 4,5 cm. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ μήκη τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ΒΓ ὑπὸ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας \widehat{A} .

582. Εἰς τὸ τρίγωνον τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως νὰ υπολογισθῇ τὸ μήκος τοῦ τμήματος μὲ ἄκρα τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ διχοτόμοι τῆς γωνίας \widehat{A} (ἐσωτερικὴ καὶ ἐξωτερικὴ) τέμνουν τὴν ΒΓ.

583. Τρίγωνον ἔχει πλευρὰς 3α, 4α, 5α. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων, εἰς τὰ ὁποῖα τέμνουν τὴν μικροτέραν πλευρὰν ἡ ἐσωτερικὴ καὶ ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς ἀπέντι γωνίας.

584. Τέσσαρες ἡμιευθεῖαι μὲ κοινὴν ἀρχὴν σημεῖον Ο σχηματίζουν διαδοχικὰς γωνίας ἴσας πρὸς 45° ἐκάστην. Τέμνομεν αὐτὰς δι' εὐθείας ΑΒΓΔ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι ΟΑ = ΟΔ. Δείξατε ὅτι εἶναι $AB^2 = AD \cdot BG$.

Β'.

585. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του, δείξατε ὅτι ἀληθεύει ἡ σχέση $BA \cdot GE \cdot ZA = GA \cdot BZ \cdot AE$.

586. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν Η, Θ, Κ εἶναι τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν \widehat{A} , \widehat{B} , $\widehat{\Gamma}$ τέμνουν ἀντιστοίχως τὰς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν του, δείξατε ὅτι εἶναι $HB \cdot \Theta\Gamma \cdot KA = HG \cdot \Theta A \cdot KB$.

587. Ὁρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$) ἔχει $\widehat{B} = 15^\circ$ καὶ ΑΒ = λ. Νὰ υπολογισθοῦν αἱ ἄλλαι πλευραὶ τοῦ τριγώνου.

588. Τριγώνου $AB\Gamma$ δίδονται αἱ πλευραὶ α, β, γ . Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τέμνουν τὰς πλευράς του.

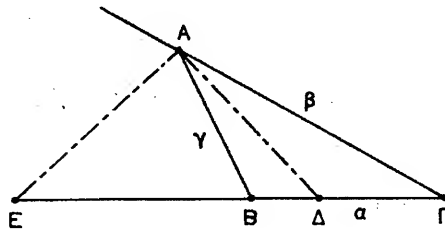
338. Ἀρμονικὴ διαίρεσις τμήματος εἰς δεδομένον λόγον.

Ἐὰν εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ (σχ. 329), AD καὶ AE εἶναι αἱ διχοτόμοι τῆς γωνίας \widehat{A} (ἐσωτερικὴ καὶ ἐξωτερικὴ), γνωρίζομεν ἀπὸ τὰ δύο θεωρήματα τῶν διχοτόμων ὅτι :

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \frac{EB}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}.$$

Ἐξ αὐτῶν ἐπεταὶ ὅτι (ἔχουν τὰ δεύτερα μέλη των ἴσα)

$$(1) \quad \frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{EB}{E\Gamma}$$



Σχ. 335

ἦτοι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ Δ ἀπὸ τὰ B καὶ Γ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τοῦ E ἀπὸ τὰ B καὶ Γ . Τὰ σημεῖα Δ καὶ E ἐπὶ τῆς εὐθείας $B\Gamma$, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει ἡ σχέσις (1), καλοῦνται **ἄρμονικὰ συζυγῆ** σημεῖα ὡς πρὸς τὰ B καὶ Γ . Τὸ Δ καλεῖται **ἄρμονικὸν συζυγὲς** τοῦ E ὡς πρὸς τὰ B καὶ Γ , ὁμοίως καὶ τὸ E εἶναι **ἄρμονικὸν συζυγὲς** τοῦ Δ ὡς πρὸς τὰ B καὶ Γ . Ἡ τετρὰς σημείων E, B, Δ, Γ καλεῖται **ἄρμονικὴ τετρὰς σημείων** ἢ **ἄρμονικὴ σημειοσειρά**. Ὁ λόγος $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}$ καλεῖται **λόγος τομῆς** τοῦ τμήματος $B\Gamma$. Ἐπίσης λέγομεν ὅτι τὸ τμήμα $B\Gamma$ εἶναι **διηρημένον ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς λόγον $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}$** .

Παρατήρησις. Ὅταν λέγωμεν ὅτι τμήμα $B\Gamma$ εἶναι διηρημένον ὑπὸ σημείου Δ εἰς λόγον ρ , ἐννοοῦμεν ὅτι $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \rho$ καὶ ὅχι $\frac{\Delta \Gamma}{\Delta B} = \rho$.

339. **Θεώρημα.** Ἐὰν τὰ Δ καὶ E εἶναι ἄρμονικὰ συζυγῆ, ὡς πρὸς τὰ B καὶ Γ , τότε καὶ τὰ B καὶ Γ εἶναι ἄρμονικὰ συζυγῆ ὡς πρὸς τὰ Δ καὶ E .

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς ὑποθέσεως ἐπεταὶ ὅτι $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{EB}{E\Gamma}$. Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{\Delta B}{EB} = \frac{\Delta \Gamma}{E\Gamma}$ ἢ $\frac{B\Delta}{BE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E}$, ἐκ τῆς ὁποίας ἐπεταὶ ὅτι τὰ B καὶ Γ εἶναι ἄρμονικὰ συζυγῆ ὡς πρὸς τὰ Δ καὶ E .

340. **Πρόβλημα.** Δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα AB νὰ διαιρεθῇ ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς δεδομένον λόγον μ/ν .

Λύσις. Ἐκ τοῦ A φέρομεν τυχούσαν ἡμιευθεῖαν Ax , ἐπὶ τῆς ὁποίας

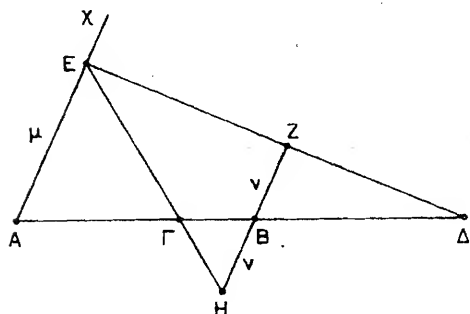
λαμβάνομεν τμήμα $AE = \mu$ (σχ. 336). Ἐκ τοῦ B φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον τῆς Ax καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ἑκατέρωθεν τοῦ B τμήματα $BZ = BH = \nu$. Φέρομεν τὰς EH καὶ EZ, αἱ ὁποῖαι τεμνοῦν τὴν AB εἰς τὰ ζητούμενα σημεῖα Γ καὶ Δ.

Ἀπόδειξις. Λόγω τῶν παραλλήλων AE καὶ HBZ, σχηματίζονται δύο ζεύγη ὁμοίων τριγώνων, ἥτοι: $\triangle A\epsilon \approx \triangle B\eta$ καὶ $\triangle A\epsilon \approx \triangle B\zeta$. Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν ἀντιστοίχως: $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{AE}{BH} = \frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{AE}{BZ} = \frac{\mu}{\nu}$.

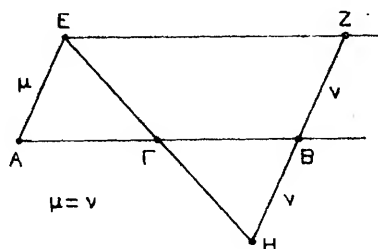
Ἄρα τὰ Γ καὶ Δ εἶναι τὰ ζητούμενα σημεῖα.

Διερεύνησις. i) Ἐὰν $\mu/\nu \neq 1 \Leftrightarrow \mu \neq \nu$, τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν.

ii) Ἐὰν $\mu/\nu = 1 \Leftrightarrow \mu = \nu$ (σχ. 337), τὸ τετράπλευρον ABZE εἶναι



Σχ. 336



Σχ. 337

παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς ἡ EZ δὲν δίδει σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς AB, ἐνῶ ἡ EH δίδει τὸ Γ εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος AB (διατρί ;). Συμβατικῶς δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχει λύσις, μὲ τὴν διευκρίνησιν ὅτι τὸ Δ ἔχει ἀπομακρυνθῆ εἰς τὸ ἄπειρον.

iii) Ὑπάρχει μία μόνον λύσις τοῦ προβλήματος, ἥτοι τὰ Γ καὶ Δ ἐπὶ τῆς εὐθείας AB εἶναι μονοσημάντως (κατὰ ἓνα μόνον τρόπον) ὠρισμένα. Πράγματι ἀπὸ τὴν σχέσιν $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\mu}{\nu}$ λαμβάνομεν $\frac{\Gamma A}{\Gamma A + \Gamma B} = \frac{\mu}{\mu + \nu} \Rightarrow$

$$\frac{\Gamma A}{AB} = \frac{\mu}{\mu + \nu} \Rightarrow \Gamma A = AB \cdot \frac{\mu}{\mu + \nu}, \text{ ἥτοι τὸ σημεῖον } \Gamma \text{ ἐπὶ τοῦ}$$

τμήματος AB ἀπέχει σταθερὸν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ A καὶ ἐπομένως εἶναι μονοσημάντως ὠρισμένον. Ὁμοίως καὶ διὰ τὸ Δ (σχ. 336) τὸ ὅποῖον εὐρίσκεται ἔκτος τοῦ τμήματος AB καὶ ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας AB, ἐφ' ὅσον εἶναι

$$\mu > \nu, \text{ λαμβάνομεν: } \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\mu}{\nu} \Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta A - \Delta B} = \frac{\mu}{\mu - \nu} \Rightarrow \frac{\Delta A}{AB} =$$

$$= \frac{\mu}{\mu - \nu} \Rightarrow \Delta A = AB \cdot \frac{\mu}{\mu - \nu}, \text{ ἥτοι τὸ } \Delta \text{ ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας AB, ἀπέχει σταθερὰν ἀπόστασιν ἐκ τοῦ A καὶ ἐπομένως εἶναι μονοσημάντως ὠρισμένον.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

B.

589. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ ἄγομεν τὰς BE καὶ ΓZ καθετοὺς ἐπὶ τὴν διχοτόμον AD τῆς γωνίας \widehat{A} . Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ E καὶ Z εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῇ τῶν σημείων A καὶ Δ .

590. Δίδεται ἡμικύκλιον AB . Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα A καὶ B τῆς διαμέτρου καὶ ἀπὸ τυχόν σημείου M τοῦ ἡμικυκλίου φέρομεν ἄλλην ἐφαπτομένην, ἣ ὅποια συναντᾷ αὐτὰς εἰς τὰ σημεία Γ καὶ Δ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς AB εἰς τὸ E . Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεία M καὶ E εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῇ τῶν Γ καὶ Δ .

591. Ἀπὸ σημείου O ἄγομεν τὰς ἐφαπτομένας OA καὶ OB εἰς ἕνα κύκλον καὶ τὴν διάμετρον $\Gamma\Delta$, ἣ ὅποια προεκτεινομένη διέρχεται διὰ τοῦ O . Ἄν ἡ χορδὴ AB τέμνῃ τὴν $\Gamma\Delta$ εἰς τὸ σημεῖον E , νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ O καὶ E εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῇ τῶν Γ καὶ Δ .

592. Εἰς κύκλον δίδεται διάμετρος AB καὶ χορδὴ $\Gamma\Delta$ κάθετος ἐπὶ τὴν AB . Αἱ εὐθεῖαι $M\Gamma$ καὶ $M\Delta$, ποὺ ἐνώνουν τὸ τυχόν σημεῖον M τοῦ κύκλου μὲ τὰ Γ καὶ Δ , τέμνουν τὴν AB εἰς τὰ σημεία E καὶ Z . Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ E καὶ Z εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῇ πρὸς τὰ A καὶ B .

593. Δίδεται κύκλος K καὶ ἡ διάμετρος AB . Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου AB λαμβάνομεν σημεῖον E καὶ ἐκ τοῦ E φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας EH καὶ $E\Theta$ καὶ τὴν χορδὴν $H\Theta$, ἣ ὅποια τέμνει τὴν διάμετρον AB εἰς τὸ Δ . Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: α) τὸ $E\Delta$ εἶναι ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τῶν EA καὶ EB , β) τὸ EH εἶναι ὁ γεωμετρικὸς μέσος (ἢ μέσος ἀνάλογος) τῶν EA καὶ EB καὶ γ) τὸ $E\Delta$ εἶναι ὁ ἁρμονικὸς μέσος τῶν EA καὶ EB .

Σημ. Ἄν A, Γ, H εἶναι κατὰ σειρὰν ὁ ἀριθμητικὸς μέσος, ὁ γεωμετρικὸς μέσος καὶ ὁ ἁρμονικὸς μέσος δύο τμημάτων λ καὶ μ , τότε εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς ἀλλέβρας ὅτι εἶναι:

$$A = \frac{\lambda + \mu}{2}, \Gamma = \lambda\mu, H = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + \mu}.$$

594. Δίδεται εὐθύγραμμον τμήμα AB καὶ σημεῖον Γ τῆς εὐθείας AB . Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἁρμονικὸν συζυγὲς τοῦ Γ , ὡς πρὸς τὰ A καὶ B ὅταν τὸ Γ i) εἶναι ἐκτὸς τοῦ τμήματος AB καὶ ii) ἀνήκῃ εἰς τὸ τμήμα AB .

595. Δίδεται εὐθύγραμμον τμήμα AB καὶ μεταβλητὸν σημεῖον X τοῦ AB . Ἐὰν Ψ εἶναι τὸ ἁρμονικὸν συζυγὲς τοῦ X ὡς πρὸς τὰ A καὶ B , νὰ μελετηθῇ ἡ κίνησις τοῦ Ψ ἐπὶ τῆς εὐθείας AB , ὅταν τὸ X διαγράφῃ τὸ τμήμα AB .

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ ΚΥΚΛΟΣ (*)

341. Πρόβλημα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντα σημεία τοῦ ἐπιπέδου ἔχουν δεδομένον λόγον $\frac{\mu}{\nu} \neq 1$.

Λύσις. Ἐστώσαν A καὶ B τὰ δοθέντα σημεία καὶ M τυχόν σημεῖον τοῦ τόπου μὲ τὴν ιδιότητα:

$$(1) \quad \frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}.$$

(*) Ἀπολλώνιος (περὶ τὸ 247 π.Χ.). Ἐπραγματεύθη τὴν γεωμετρίαν τῆς Θέσεως, δηλαδὴ τῆς μορφῆς καὶ τῆς σχέσεως τῶν σχημάτων. Εἰς αὐτὸν ὀφείλεται τὸ ἔργον περὶ κωνικῶν εἰς ὀκτὼ βιβλία. Ἐξ αὐτῶν ἑπτὰ ἐσώθησαν. Τὸ ὄγδοον ἀποκατεστάθη ὑπὸ τοῦ ἀστρονόμου Halley τὸ 1646, βάσει πληροφοριῶν τοῦ Πάππου. Τὸ ἔργον του ὑπῆρξεν ἡ αἰτία νὰ τοῦ δοθῇ ἡ ἐπωνυμία τοῦ κατ' ἐξοχὴν γεωμέτρου.

Τότε, ἡ σχέσις (2), λόγῳ τῆς (4) γράφεται :

$$\frac{NA}{NB} = \frac{\mu}{\nu}$$

Ἄρα ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι ὁ κύκλος διαμέτρου ΓΔ.

Κατασκευή. Δοθέντων τῶν Α, Β καὶ τοῦ λόγου $\frac{\mu}{\nu}$ διαιροῦμεν ἄρμονικῶς τὸ τμήμα ΑΒ, ὅπως εἰς τὸ πρόβλημα 340, καὶ εὐρίσκομεν τὰ Γ καὶ Δ. Μὲ διάμετρον τὴν ΓΔ γράφομεν τὸν κύκλον.

Σημείωσις. Ἐὰν εἶναι $\frac{\mu}{\nu} = 1$, τότε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β, δηλαδὴ ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΒ. Τοῦτο ἐξηγεῖται καὶ διὰ τῆς προηγουμένης κατασκευῆς, διότι τὸ μὲν Γ θὰ ᾔτο τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ, τὸ δὲ Δ θὰ εἶχεν ἀπομακρυνθῇ εἰς τὸ ἄπειρον. Ἄρα ὁ κύκλος διαμέτρου ΓΔ θὰ εἶχεν ἄπειρον εἰς τὸ μῆκος ἀκτῖνα, ἐπομένως θὰ εἶχε ἐκφυλισθῇ εἰς εὐθεῖαν διερχομένην ἐκ τοῦ μέσου τοῦ ΑΒ καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ὁ προηγούμενος γεωμετρικὸς τόπος καλεῖται **ἀπολλώνιος κύκλος**, ἐξ ὀνόματος τοῦ μελετήσαντος αὐτὸν Ἕλληνας μαθηματικοῦ Ἀπολλωνίου (περὶ τὸ 247 π.Χ.).

Ἐν γένει, ἀπολλώνιος κύκλος, ὡς πρὸς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, καλεῖται κάθε κύκλος διαμέτρου ΓΔ, ὅπου τὰ Γ καὶ Δ εἶναι ἄρμονικὰ συζυγῇ τῶν Α καὶ Β. Ἐπομένως ὑπάρχουν ἄπειροι ἀπολλώνιοι κύκλοι, ὡς πρὸς δύο σημεῖα Α καὶ Β. Διὰ νὰ ὀρισθῇ δὲ εἰς ἐξ αὐτῶν, δοθέντων τῶν Α καὶ Β, χρειάζεται νὰ δοθῇ ὁ λόγος τομῆς $\frac{\mu}{\nu}$, ἡ ἐν ἐκ τῶν σημείων Γ καὶ Δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α.

596. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποῦ διδονται ἡ βάσις α, ἡ διάμεσος μ_α καὶ ὁ λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

597. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποῦ διδονται ἡ βάσις α, ἡ γωνία $\hat{A} = \omega$ καὶ ὁ λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

598. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποῦ δίδεται ἡ βάσις α, τὸ ὕψος u_α καὶ ὁ λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

599. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς βάσεώς του α, τοῦ λόγου $\frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καὶ τῆς γωνίας \hat{B} .

600. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποῦ διδονται ἡ πλευρὰ β καὶ ὁ λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ τῆς ὑποτείνουσας πρὸς τὴν ἄλλην κάθετον πλευράν.

601. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ πλευρὰ α , ἡ διχοτόμος δ_α καὶ ὁ λόγος $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

B'.

602. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α , $\beta^2 - \gamma^2 = \lambda^2$, ἐνθα λ δεδομένον τμήμα καὶ τοῦ σημείου Δ , εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας A τέμνει τὴν $B\Gamma$.

603. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ . τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δύο δοθέντες κύκλοι (C_1) καὶ (C_2) φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας.

604. Δίδονται ἐπ' εὐθείας διαδοχικῶς τέσσαρα σημεῖα A, B, Γ, Δ . Νὰ εὑρεθῇ σημείον M τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\widehat{AMB} = \widehat{BM\Gamma} = \widehat{\Gamma M\Delta}$.

ΔΥΝΑΜΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟΝ

342. Θεώρημα. Ἐστω κύκλος (K, R) καὶ σημεῖον A τοῦ ἐπιπέδου του. Ἐὰν διὰ τοῦ A θεωρήσωμεν τυχούσαν εὐθείαν, τέμνουσαν τὸν κύκλον εἰς τὰ B καὶ Γ , τὸ γινόμενον $AB \cdot A\Gamma$ εἶναι σταθερόν, ἥτοι τὸ αὐτὸ δι' οἵανδήποτε τέμνουσαν.

Ἀπόδειξις. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, ἥτοι :

i) Τὸ σημεῖον A εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (K, R) (σχ. 339). Φέρομεν καὶ τὴν ἐφαπτομένην $A\Delta$ καὶ τὰς ΔB καὶ $\Delta \Gamma$. Τότε παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\widehat{AB\Delta} \approx \widehat{A\Delta\Gamma}$$

διότι ἔχουν τὴν γωνίαν \widehat{A} κοινὴν καὶ $\widehat{A\Delta B} = \widehat{\Gamma}$ (ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης, § 205). Ἀρα θὰ εἶναι :

$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \Rightarrow$$

$$(1) \Rightarrow AB \cdot A\Gamma = A\Delta^2$$

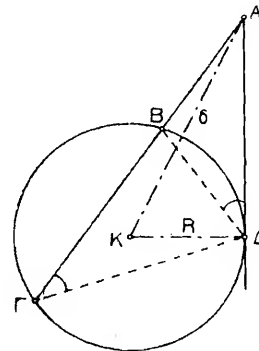
Ἀλλὰ τὸ μῆκος τῆς ἐφαπτομένης $A\Delta$ εἶναι ὠρισμένον καὶ ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τῆς τεμνούσης $AB\Gamma$. Ἀρα, ἐκ τῆς σχέσεως (1), ἐπεταί ὅτι τὸ γινόμενον $AB \cdot A\Gamma$ εἶναι σταθερόν.

Τὴν σχέσιν (1) δυνάμεθα νὰ τὴν μετασχηματίσωμεν, φέροντες τὴν $AK = \delta$ καὶ τὴν ἀκτῖνα $K\Delta = R$. Τότε, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $A\Delta K$, λαμβάνομεν :

$$A\Delta^2 = \delta^2 - R^2 \quad \text{καὶ ἡ σχέσις (1) γράφεται :}$$

$$AB \cdot A\Gamma = \delta^2 - R^2.$$

ii) Τὸ A εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ κύκλου (K, R) . Ἐστω $BA\Gamma$ τυχούσα τέμνουσα διερχομένη διὰ τοῦ A (σχ. 340). Φέρομεν καὶ τὴν διάμετρον ΔE , ἡ



Σχ. 339

ὅποια διέρχεται διὰ τοῦ Α, καὶ τὰς ΒΔ καὶ ΓΕ. Τότε παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι :

$$\triangle ABA \approx \triangle AEG$$

διότι ἔχουν τὰς γωνίας τῶν \hat{A} ἴσας, ὡς κατὰ κορυφήν, καὶ $\hat{B} = \hat{E}$, ὡς ἐγγεγραμμένες εἰς τὸ αὐτὸ τόξον $\widehat{ΓΔ}$. Ἄρα θὰ εἶναι :

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AG} \Rightarrow$$

$$(2) \quad AB \cdot AG = AD \cdot AE$$

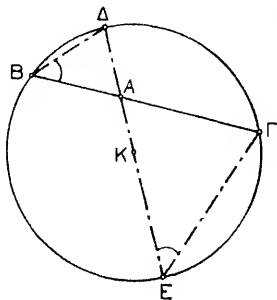
Ἀλλὰ εἶναι :

$$(4) \quad AD \cdot AE = (R - \delta)(R + \delta) = R^2 - \delta^2$$

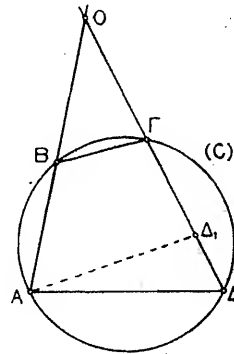
ὅπου ἐτέθη $AK = \delta$. Ἄρα ἡ σχέση (2) γράφεται :

$$AB \cdot AG = R^2 - \delta^2$$

ἦτοι τὸ γινόμενον $AB \cdot AG$ εἶναι σταθερόν.



Σχ. 340



Σχ. 341

343. Ὅρισμός. Δύναμις σημείου Α ὡς πρὸς κύκλον (K,R) καλεῖται τὸ σταθερὸν γινόμενον $AB \cdot AG$, ὅπου τὰ Β καὶ Γ εἶναι κοινὰ σημεία τοῦ κύκλου καὶ τυχούσης εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ Α.

Ἡ δύναμις τοῦ Α, ὡς πρὸς τὸν κύκλον (K, R), συμβολίζεται $DA/(K, R)$.

Ἐὰν τὸ Α εἶναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου, εἶναι $DA/(K, R) = \delta^2 - R^2 = AD^2$ (σχ. 339), ὅπου $\delta = KA$ καὶ AD τὸ ἐφαπτόμενον τμήμα ἐκ τοῦ Α.

Ἐὰν τὸ Α εἶναι ἐντὸς τοῦ κύκλου εἶναι $DA/(K, R) = R^2 - \delta^2$.

Τέλος, ἐὰν τὸ Α εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ κύκλου, εἶναι $\delta = R$ καὶ αἱ προηγούμεναι σχέσεις δίδουν $DA/(K, R) = R^2 - R^2 = 0$, ἦτοι διὰ σημείον τοῦ κύκλου ἡ δύναμις εἶναι μηδενική.

344. Θεώρημα. Ἐστω τετράπλευρον $ABΓΔ$ καὶ O τὸ σημείον τομῆς τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν AB καὶ $ΓΔ$ αὐτοῦ. Μία ἀναγκαῖα καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, εἶναι :

$$OA \cdot OB = OG \cdot OD$$

Ἀπόδειξις. i) Εἶναι ἀναγκαῖα. Πράγματι, ἔστω ὅτι τὸ $ABΓΔ$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (C) (σχ. 341). Τότε ἕκαστον τῶν γινομένων

$OA \cdot OB$ καὶ $OG \cdot OD$ παριστᾷ τὴν δύναμιν τοῦ σημείου O πρὸς τὸν κύκλον (C) , ἐπομένως εἶναι :

$$(1) \quad OA \cdot OB = OG \cdot OD$$

ii) Εἶναι ἱκανή. Ἐνῷ ἰσχύει ἡ σχέσις (1), ἔστω ὅτι τὸ $AB\Gamma\Delta$ δὲν εἶναι ἐγγράψιμον. Τότε γράφομεν τὸν κύκλον, ποὺ ὀρίζουν τὰ σημεῖα A, B, Γ καὶ ἔστω ὅτι οὗτος τέμνει τὴν OG εἰς τὸ Δ_1 . Ἄρα τὸ $AB\Gamma\Delta_1$ εἶναι ἐγγράψιμον. Τότε θὰ εἶναι :

$$(2) \quad OA \cdot OB = OG \cdot OD_1$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι :

$$(3) \quad OD_1 = OD$$

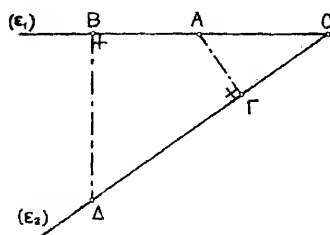
Ἄς σημειωθῇ ὅτι τὸ Δ_1 εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας OG , διότι, ἐάν ἦτο ἐπὶ τῆς ἀντιθέτου ἡμιευθείας, τὸ O θὰ ἦτο ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, ὕπερ ἄτοπον, διότι τὸ O εὐρίσκεται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς χορδῆς AB καὶ ἐπομένως ἐκτὸς τοῦ κύκλου. Ἄρα, ἐκ τῆς σχέσεως (3) ἔπεται ὅτι τὸ Δ_1 συμπίπτει μὲ τὸ Δ . Ἐπομένως τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Ὅμοίως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ κάτωθι θεώρημα :

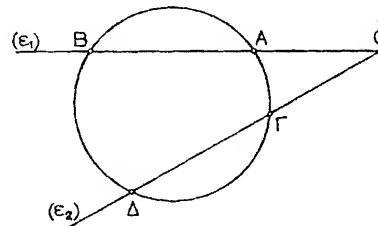
345. Θεώρημα. Ἐστω τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ καὶ Θ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ $A\Gamma$ καὶ BA . Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, εἶναι :

$$\Theta A \cdot \Theta \Gamma = \Theta B \cdot \Theta \Delta$$

346. Μεταφορὰ γινομένου. Εἰς πολλὰ γεωμετρικὰ θέματα ἀπαιτεῖται ἡ μεταφορὰ ἐνὸς γινομένου $OA \cdot OB$, ὅπου τὰ σημεῖα O, A, B κεῖνται ἐπ' εὐθείας (ε_1) , ἐπὶ ἄλλης εὐθείας (ε_2) , διερχομένης διὰ τοῦ O . Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους :



Σχ. 342



Σχ. 343

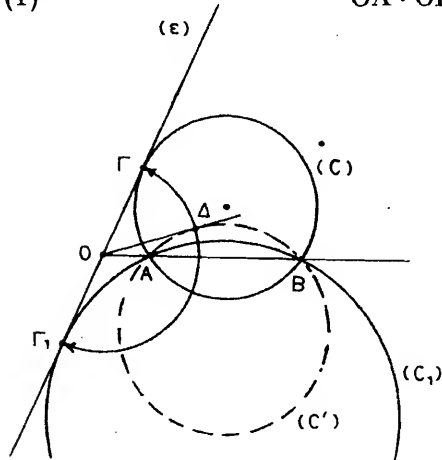
i) Ἐκ τοῦ A φέρομεν τὴν $AG \perp (\varepsilon_2)$ καὶ ἐκ τοῦ B φέρομεν τὴν $BH \perp (\varepsilon_1)$ (σχ. 342). Τότε εἶναι $OA \cdot OB = OG \cdot OD$ διότι τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ἐγγράψιμον.

ii) Γράφομεν τυχόντα κύκλον διερχόμενον διὰ τῶν A καὶ B , ὁ ὁποῖος νὰ τέμνη τὴν (ε_2) εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ (σχ. 343). Τότε εἶναι $OA \cdot OB = OG \cdot OD$.

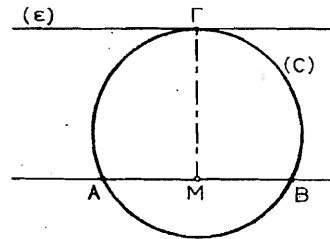
347. Πρόβλημα. Νὰ γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας.

Ἀνάλυσις. Ἐστώσαν A καὶ B τὰ δοθέντα σημεία καὶ (ε) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 344). Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν καὶ ἔστω (C) ὁ ζητούμενος κύκλος, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς (ε) εἰς τὸ σημεῖον Γ . Ὁ κύκλος (C) προσδιορίζεται ἀπὸ τὰ σημεία A, B καὶ Γ . Ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ λοιπὸν ἡ θέσις τοῦ Γ ἐπὶ τῆς (ε) . Πρὸς τοῦτο, θεωροῦμεν τὸ σημεῖον O τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν (ε) καὶ AB , τὸ ὁποῖον εἶναι σαφῶς καθωρισμένον. Τότε θὰ εἶναι (§ 342)

$$(1) \quad OA \cdot OB = O\Gamma^2$$



Σχ. 344



Σχ. 345

Σύνθεσις - Κατασκευή. Γράφομεν βοηθητικὸν κύκλον (C') μὲ μόνην ἀπαιτήσιν νὰ διέρχεται διὰ τῶν A καὶ B . Ἐκ τοῦ O φέρομεν ἐφαπτομένην $O\Delta$ αὐτοῦ. Τότε εἶναι :

$$(2) \quad OA \cdot OB = O\Delta^2$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι :

$$(3) \quad O\Gamma = O\Delta$$

Μεταφέρομεν τότε τὸ μῆκος $O\Delta$ εἰς τὸ $O\Gamma$ ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) καὶ διὰ τῶν A, B καὶ Γ γράφομεν τὸν κύκλον (C) , ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ ζητούμενος.

Ἀπόδειξις. Πράγματι, ἐκ τῶν (2) καὶ (3) ἔπεται ὅτι :

$$OA \cdot OB = O\Gamma^2$$

Ἐπομένως ἡ $O\Gamma$ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (C) .

Διερεύνησις. Ἐφ' ὅσον αἱ εὐθεῖαι (ε) καὶ AB δὲν εἶναι παράλληλοι, ὑπάρχει πάντοτε τὸ σημεῖον O καί, ἐὰν τοῦτο εἶναι ἐκτὸς τοῦ τμήματος AB , ὑπάρχουν πάντοτε δύο λύσεις, οἱ κύκλοι (C) καὶ (C_1) , οἱ ὁποῖοι προσδιορίζονται ἀπὸ τὰς τριάδας τῶν σημείων A, B, Γ καὶ A, B, Γ_1 , ὅπου τὰ Γ καὶ Γ_1 λαμβάνονται ἐκατέρωθεν τοῦ O ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) .

Ἐὰν $AB \parallel (\varepsilon)$, ὑπάρχει μία λύσις, ὁ κύκλος (C) (σχ. 345), ὁ ὁποῖος

προσδιορίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A, B, Γ ὅπου τὸ Γ εἶναι ἡ τομὴ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ AB μετὰ τῆς (ε).

Ἐὰν τέλος τὸ σημεῖον O τομῆς τῶν AB καὶ (ε) ᾗτο ἐσωτερικὸν τοῦ τμήματος AB, δὲν θὰ ὑπῆρχε λύσις, διότι τότε τὸ O θὰ ᾗτο ἐσωτερικὸν καὶ τοῦ βοηθητικοῦ κύκλου (C'), ἐπομένως δὲν θὰ ᾗτο δυνατόν νὰ φέρωμεν δι' αὐτοῦ τὸ ἐφαπτόμενον τμήμα OD, ὥστε ἐν συνεχείᾳ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ Γ ἐπὶ τῆς (ε).

Ἐξετάσατε τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ O συμπίπτει μετὰ τοῦ A ἢ τοῦ B.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ

348. Ὁρισμένοι τύποι ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ ἐπιδέχονται καὶ γεωμετρικὴν λύσιν, ὅταν δεχθῶμεν ὅτι οἱ συντελεσταὶ καὶ ἡ ἄγνωστος μεταβλητὴ παριστοῦν τὰ μέτρα εὐθυγράμμων τμημάτων.

Δίδομεν τὴν γεωμετρικὴν λύσιν τριῶν τύπων ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ.

$$\text{i)} \quad x^2 + 2\alpha x - \beta^2 = 0$$

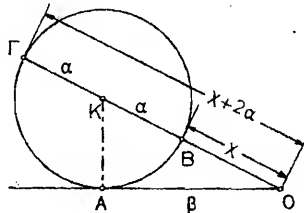
$$\text{ii)} \quad x^2 - 2\alpha x - \beta^2 = 0$$

$$\text{iii)} \quad x^2 - 2\alpha x + \beta^2 = 0$$

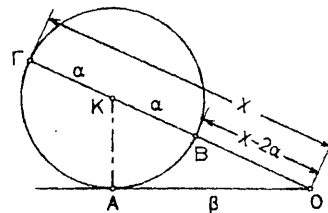
ὅπου τὰ α καὶ β εἶναι τὰ μέτρα δοθέντων εὐθυγράμμων τμημάτων.

i) Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$x(x + 2\alpha) = \beta^2.$$



Σχ. 346



Σχ. 347

Γράφομεν κύκλον ἀκτίνος α καὶ φέρομεν εἰς τυχὸν σημεῖον A αὐτοῦ ἐφαπτομένην, ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τμήμα AO = β (σχ. 346). Ἐὰν K εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, φέρομεν τὴν OK, ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὰ B καὶ Γ.

Τὸ τμήμα OB εἶναι τὸ ζητούμενον x, διότι εἶναι :

$$OB \cdot OG = OA^2 \quad \text{ἢ}$$

$$x(x + 2\alpha) = \beta^2$$

ii) Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

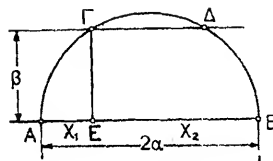
$$x(x - 2\alpha) = \beta^2$$

Ἡ ἰδία κατασκευὴ μὲ τὴν προηγουμένην, (σχ. 347), ἀλλ' ἐδῶ τὸ τμήμα x εἶναι τὸ OG. Πράγματι εἶναι :

$$ΟΓ \cdot ΟΒ = ΟΑ^2 \text{ ή}$$

$$x(x - 2\alpha) = \beta^2$$

iii) $x^2 - 2\alpha x + \beta^2 = 0$. Παρατηρούμεν ότι, εάν x_1 και x_2 είναι αι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως, θὰ ἔχωμεν $x_1 + x_2 = 2\alpha$ και $x_1 x_2 = \beta^2$. Τότε κατασκευάζομεν ἡμικύκλιον διαμέτρου $AB = 2\alpha$ και φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον τῆς διαμέτρου εἰς ἀπόστασιν β (σχ. 348). Αὕτη ἔστω ὅτι τέμνει τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὰ Γ και Δ . Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τὴν $GE \perp AB$ και τότε ἐπὶ τῆς AB ὀρίζονται δύο τμήματα $AE = x_1$ και $EB = x_2$ τὰ ὁποῖα εἶναι αι ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Πράγματι εἶναι :



Σχ. 348

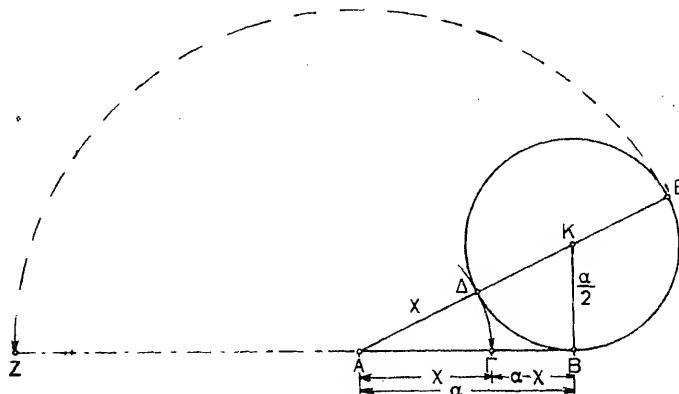
$$x_1 + x_2 = AB = 2\alpha \text{ και } x_1 x_2 = GE^2 = \beta^2 \text{ (§ 298)}$$

Διὰ τὰς ὑπάρχοντι λύσεις, πρέπει προφανῶς νὰ εἶναι $\beta \leq \alpha$, ὅπου εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ $\beta = \alpha$ ἔχομεν $x_1 = x_2 = \alpha$.

Και εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις οἱ συντελεσταὶ α, β , καθὼς και ἡ ἄγνωστος μεταβλητὴ x , ὑποτίθενται ἀριθμοὶ θετικοί, ὡς παριστῶντες τὰ μέτρα εὐθυγράμμων τμημάτων.

349. Διαίρεσις εὐθυγράμμου τμήματος εἰς μέσον και ἄκρον λόγον. (Χρυσὴ τομή).

Πρόβλημα. Δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μεγαλύτερον νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον τοῦ μικροτέρου μέρους και ὁλοκλήρου τοῦ τμήματος.



Σχ. 349

Λύσις. Ἐστω $AB = \alpha$ τὸ μῆκος τοῦ δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος και Γ τὸ ζητούμενον σημεῖον διαιρέσεως (σχ. 349). Ἐὰν καλέσωμεν τὸ

μῆκος τοῦ μεγαλύτερου τμήματος $ΑΓ = x$, τότε θὰ εἶναι $ΓΒ = α - x$ καὶ θὰ πρέπει νὰ ἰσχύη ἡ σχέσις : $ΑΓ^2 = ΑΒ \cdot ΓΒ$ ἢ

$$(1) \quad x^2 = α(α - x)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $x^2 + αx - α^2 = 0$ καὶ ἀνάγεται εἰς τὴν μορφήν (i) τῆς προηγουμένης παραγράφου. Ἡ κατασκευὴ εἶναι ἡ ἰδία, ἥτοι γράφομεν κύκλον $\left(K, \frac{α}{2}\right)$, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τοῦ τμήματος $ΑΒ = α$ εἰς τὸ ἄκρον αὐτοῦ Β. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΔΚΕ. Τότε τὸ μῆκος ΑΔ εἶναι τὸ ζητούμενον μῆκος x , διότι εἶναι : $ΑΔ \cdot ΑΕ = ΑΒ^2$ ἢ $x(x + α) = α^2$, ἢ ὁποῖα γράφεται $x^2 + αx - α^2 = 0$ ἢ $x^2 = α(α - x)$. Ἡ τελευταία εἶναι ἡ ἰδία μὲ τὴν ἐξίσωσιν (1). Μεταφέρομεν τότε τὸ μῆκος ΑΔ εἰς τὸ ΑΓ ἐπὶ τοῦ τμήματος $ΑΒ = α$ καὶ οὕτως ἐπιτυγχάνομεν τὴν διαίρεσιν τοῦ ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ἥτοι $ΑΓ^2 = ΑΒ \cdot ΓΒ$.

Παρατηρήσεις i) Τὴν σχέσιν $ΑΔ \cdot ΑΕ = ΑΒ^2$ δυνάμεθα νὰ τὴν γράψωμεν καὶ ὡς ἐξῆς: $(ΑΕ - ΔΕ) \cdot ΑΕ = ΑΒ^2$ ἢ $ΑΕ^2 = ΑΕ \cdot ΔΕ + ΑΒ^2$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΔΕ = ΑΒ$, ἔχομεν $ΑΕ^2 = ΑΕ \cdot ΑΒ + ΑΒ^2 = ΑΒ \cdot (ΑΕ + ΑΒ)$. Καὶ ἂν λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΒΑ (πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α) τμήμα $ΑΖ = ΑΕ$, εὐρίσκομεν $ΑΖ^2 = ΒΑ \cdot ΒΖ$. Ὡστε καὶ τὸ σημεῖον Ζ διαίρει τὴν ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, μὲ τὴν ἑννοίαν τῆς ἐξωτερικῆς διαιρέσεως.

ii) Αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσως $x^2 = α(α - x)$ ἢ $x^2 + αx - α^2 = 0$ εἶναι :

$$x_1 = \frac{-α + α\sqrt{5}}{2} \quad \text{καὶ} \quad x_2 = \frac{-α - α\sqrt{5}}{2}. \quad \text{Ἐκ τῶν δύο αὐτῶν ριζῶν ἡ } x_1 \text{ εἶναι ἡ ἀλ-}$$

γεβρική τιμὴ τοῦ ΑΓ καὶ ἡ x_2 εἶναι ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ ΑΖ, ἥτοι $(ΑΓ) = \frac{α(\sqrt{5} - 1)}{2}$

$$\text{καὶ} \quad (ΑΖ) = \frac{-α(\sqrt{5} + 1)}{2}.$$

Σημειώσεις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐτέθη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου ὡς διαίρεσις εὐθυγράμμου τμήματος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. Μεταγενεστέρως ἡ διαίρεσις αὕτη ἀπεκλήθη χρυσὴ τομή, ὅπως ἀναφέρει ὁ Ohm, διότι ἐθεωρήθη ὡς ἡ πλέον ἁρμονικὴ διαίρεσις ἑνὸς τμήματος εἰς δύο ἄνισα μέρη οὕτως, ὥστε τὸ ἓν νὰ μὴ εἶναι ἀντιαισθητικῶς μεγαλύτερον ὡς πρὸς τὸ ἄλλο. Ἡ διαίρεσις αὕτη χρησιμοποιεῖται καὶ εἰς τὴν ἀρχιτεκτονικὴν, πιστεύεται δὲ ὅτι ὑφίσταται καὶ εἰς τὴν φύσιν, ὅπως π.χ. τὸ ὕψος τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος εἶναι διηρημένον εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον ἀπὸ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἡ μέση τοῦ ἀνθρώπου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

605. Σημεῖον Δ ἀπέχει κατὰ 10 cm. ἀπὸ τὸ κέντρον κύκλου ἀκτῖνος 8 cm. Διὰ τοῦ Δ φέρομεν τὴν τέμνουσαν ΔΑΒ, ὀρίζουσιν τὴν χορδὴν ΑΒ = 6 cm. Νὰ εὐρεθῇ τὸ μῆκος ΔΒ.

606. Δίδεται κύκλος ἀκτῖνος 8 m. καὶ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον 12 m. Ἀγομεν διὰ τοῦ Α εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον κατὰ χορδὴν ΒΓ = 2m. Νὰ εὐρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ΑΓ.

607. Δίδεται κύκλος ἀκτῖνος $R = 12$ cm καὶ σημεῖον Ε, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ

κέντρον κατά 6 cm. Φέρομεν την χορδήν AEB, έχουσαν μήκος 21 cm. Νά εύρεθοῦν τὰ μήκη τῶν τμημάτων AE καὶ EB.

608. Ἐντὸς κύκλου ἀκτίνας 13 m λαμβάνομεν σημεῖον Δ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον 11 m καὶ ἄγομεν τὴν ΑΔΒ. Ἄν τὸ τμήμα ΔΒ αὐτῆς εἶναι τριπλάσιον τοῦ ΑΔ, νά εύρεθῇ τὸ μήκος τῆς χορδῆς AB.

609. Δύο κύκλοι τέμνονται εἰς τὰ Α καὶ Β. Ἀπὸ σημεῖον Σ τῆς εὐθείας AB φέρομεν δύο εὐθείας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία τέμνει τὸν ἕνα κύκλον εἰς τὰ Γ καὶ Δ καὶ ἡ ἄλλη τὸν δευτέρου κύκλον εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε, Ζ εἶναι ἐγγράψιμον.

610. Ἐκ σημείου Μ, κειμένου ἐκτὸς κύκλου (C), φέρομεν τὸ ἐφαπτόμενον τμήμα MA καὶ τυχοῦσαν τέμνουσαν MBΓ. Δείξατε ὅτι εἶναι $\frac{AB^2}{AG^2} = \frac{MB}{MG}$.

B'.

611. Δίδεται γωνία \widehat{xOy} καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ τῆς Ox. Νά εύρεθῇ σημεῖον Μ τῆς Oy οὕτως, ὥστε ἡ γωνία \widehat{AMB} νά εἶναι μεγίστη.

612. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) καὶ σημεῖον Σ ἐκτὸς τῆς ζώνης των. Νά ἀχθῇ κάθετος AB ἐπὶ τῶν παραλλήλων οὕτως, ὥστε ἡ γωνία \widehat{ASB} νά εἶναι μεγίστη.

613. Δίδονται δύο εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) καὶ σημεῖον Α. Ζητεῖται νά γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ τοῦ Α καὶ ἐφαπτόμενος τῶν (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) .

614. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ σταθερὸν σημεῖον Α αὐτοῦ. Ἐπὶ τυχοῦσης εὐθείας (ε) διερχομένης διὰ τοῦ Α λαμβάνομεν σημεῖον Ι τοιοῦτον, ὥστε νά εἶναι $IA \cdot IB = k^2$, ὅπου Β εἶναι τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῆς (ε) μετὰ τοῦ (O, R) καὶ k δοθὲν τμήμα. Νά εύρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Ι.

615. Ἐκ σημείου Μ κειμένου ἐκτὸς κύκλου (C) φέρομεν τὴν διάμετρον MBA καὶ τὸ ἐφαπτόμενον τμήμα ΜΓ. Ἡ ἐκ τοῦ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν MA τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Δ. Δείξατε ὅτι εἶναι $AG \cdot AD = MA^2 - MG^2$.

616. Νά κατασκευασθοῦν γεωμετρικῶς αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $3x^2 - 2\lambda x = 12\mu^2$, ἐνθα λ καὶ μ εἶναι δοθέντα τμήματα.

617. Νά κατασκευασθοῦν γεωμετρικῶς αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 8x + 15 = 0$.

618. Δίδεται ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ABΓ. Νά εύρεθῇ ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ σημεῖον Δ, ἐκ τοῦ ὁποίου, ἂν φέρωμεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς AB καὶ ΑΓ, νά σχηματισθῇ ὀρθογώνιον γνωστοῦ ἐμβαδοῦ λ^2 .

619. Νά γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β καὶ ἐφαπτομενος δοθέντος κύκλου (K, R).

620. Δίδεται εὐθεῖα (ε), σημεῖον Α αὐτῆς καὶ σημεῖον Β ἐκτὸς αὐτῆς. Μὲ κέντρον τὸ Β νά γραφῇ κύκλος, ὁ ὁποῖος νά τέμνῃ τὴν (ε) εἰς τὰ Γ καὶ Δ οὕτως, ὥστε νά εἶναι $AG \cdot AD = k^2$, ὅπου k δεδομένον τμήμα.

621. Ἀπὸ σημείου Σ ἐσωτερικὸν γωνίας \widehat{xOy} νά ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ Α καὶ Β, οὕτως, ὥστε τὸ τμήμα AB νά διαιρῇται ὑπὸ τοῦ Σ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

622. Δοθέντος τοῦ μεγαλυτέρου (ἢ τοῦ μικροτέρου) μέρους ἑνὸς τμήματος, διαιρεθέντος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, νά κατασκευασθῇ τὸ τμήμα.

ΡΙΖΙΚΟΣ ΑΞΩΝ

350. Πρόβλημα. Δοθέντων δύο κύκλων (O_1, R_1) και (O_2, R_2) , νά εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τύπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας δυνάμεις, ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους.

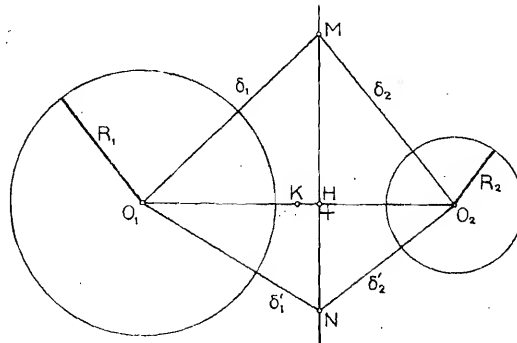
Λύσις. Ἐστω M ἐν τυχόν σημεῖον τοῦ τόπου ἐκτὸς τῶν δύο κύκλων καὶ ἂς καλέσωμεν δ_1 καὶ δ_2 τὰς ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τὰ κέντρα O_1 καὶ O_2 ἀντιστοίχως (σχ. 350). Γνωρίζομεν (§ 343) ὅτι εἶναι : $DM/(O_1, R_1) = \delta_1^2 - R_1^2$ καὶ $DM/(O_2, R_2) = \delta_2^2 - R_2^2$. Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις τοῦ M , ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους εἶναι ἴσαι, ἔπεται ὅτι :

$$(1) \quad \delta_1^2 - R_1^2 = \delta_2^2 - R_2^2.$$

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι $R_1 \geq R_2$, ἡ (1) γράφεται :

$$(2) \quad \delta_1^2 - \delta_2^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Ἐκ τῆς (2) ἔπεται ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων δ_1 καὶ δ_2 τοῦ σημείου M ἀπὸ τὰ O_1 καὶ O_2 εἶναι σταθερά. Ἐνθυμούμεθα τότε τὸ δευτε-



Σχ. 350

ρον θεωρήμα τῆς διαμέσου (§ 309) διὰ τὸ τρίγωνον MO_1O_2 . Φέρομεν τὴν ἐκ τοῦ M κάθετον ἐπὶ τὴν O_1O_2 , ἡ ὁποῖα τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ H καὶ ἔχομεν :

$$(3) \quad \delta_1^2 - \delta_2^2 = 2\delta \cdot KH,$$

ὅπου $\delta = O_1O_2$ ἡ διάκεντρος τῶν δύο κύκλων καὶ K τὸ μέσον αὐτῆς. Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) ἔπεται ὅτι :

$$2\delta \cdot KH = R_1^2 - R_2^2 \quad \eta$$

$$(4) \quad KH = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2\delta}$$

Ἐκ τῆς (4) ἔπεται ὅτι τὸ μῆκος KH εἶναι σταθερόν. Ἀρα τὸ σημεῖον H εἶναι ἐντελῶς ὠρισμένον ἐπὶ τῆς διακέντρου, καὶ μάλιστα, ἐπειδὴ ὑπετέθη ὅτι $R_1 \geq R_2$, ἐκ τῆς (2) ἔπεται ὅτι $\delta_1 \geq \delta_2$, ἄρα τὸ H , ὡς πρὸς τὸ K , θὰ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ μικροτέρου κύκλου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι, ἐφ' ὅσον ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου M τοῦ

τόπου ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον διέρχεται διὰ τοῦ σταθεροῦ σημείου H , ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τόπου κεῖνται ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης.

Ἀντιστρέφως. Ἐστω N τυχὸν σημεῖον τῆς MH , καθέτου εἰς τὸ H ἐπὶ τὴν διάκεντρον O_1O_2 . Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ N ἔχει ἴσας δυνάμεις, ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους. Ἀς καλέσωμεν δ_1' καὶ δ_2' τὰς ἀποστάσεις τοῦ N ἀπὸ τὰ κέντρα O_1 καὶ O_2 ἀντιστοίχως. Ἐφαρμόζομεν τὸ δεύτερον θεώρημα τῆς διαμέσου διὰ τὸ τρίγωνον NO_1O_2 καὶ ἔχομεν :

$$\delta_1'^2 - \delta_2'^2 = 2\delta \cdot KH$$

Ἀλλά, λόγῳ τῆς (4), ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται :

$$\delta_1'^2 - \delta_2'^2 = 2\delta \cdot \frac{R_1^2 - R_2^2}{2\delta}$$

$$\eta \quad \delta_1'^2 - \delta_2'^2 = R_1^2 - R_2^2,$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν :

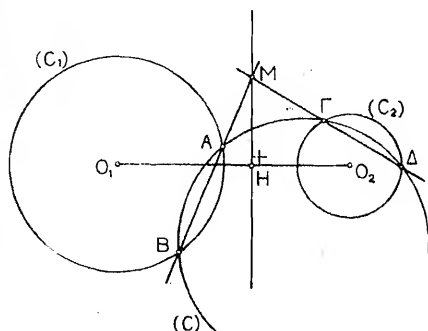
$$\delta_1'^2 - R_1^2 = \delta_2'^2 - R_2^2$$

Ἐκ τῆς τελευταίας φαίνεται ὅτι αἱ δυνάμεις τοῦ N , ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους, εἶναι ἴσαι. Ἀρα ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι ἡ εἰς τὸ σημεῖον H κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον O_1O_2 .

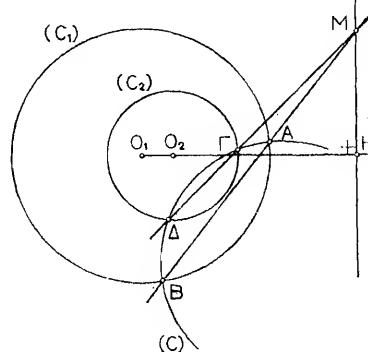
351. Ὅρισμός. Ριζικὸς ἄξων δύο κύκλων καλεῖται ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας δυνάμεις, ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους.

Πόρισμα. Ὁ ριζικὸς ἄξων δύο κύκλων εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον αὐτῶν.

Κατασκευὴ ριζικοῦ ἄξωνος. Γενικὴ μέθοδος. Δοθέντων δύο κύκλων (C_1) καὶ (C_2) , ἡ διεύθυνσις τοῦ ριζικοῦ ἄξωνος αὐτῶν εἶναι γνωστή.



Σχ. 351



Σχ. 352

κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον αὐτῶν. Συνεπῶς ἀρκεῖ νὰ εὑρωμεν ἓν σημεῖον τοῦ ἄξωνος καὶ ἐξ αὐτοῦ νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν διάκεντρον.

Πρὸς τοῦτο γράφομεν ἓνα βοηθητικὸν κύκλον (C) , ὁ ὁποῖος νὰ τέμνῃ τοὺς (C_1) καὶ (C_2) εἰς τὰ σημεῖα A, B καὶ Γ, Δ ἀντιστοίχως (σχ. 351 ἢ 352).

Αί ΑΒ καί ΓΔ, τεμνόμεναι ἐν γένει, ὀρίζουν σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον εἶναι σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξωνος τῶν (C_1) καὶ (C_2) . Πράγματι, εἶναι :

$$(1) \quad MA \cdot MB = M\Gamma \cdot M\Delta = DM / (C)$$

Ἀλλά :

$$(2) \quad MA \cdot MB = DM / (C_1) \quad \text{καὶ}$$

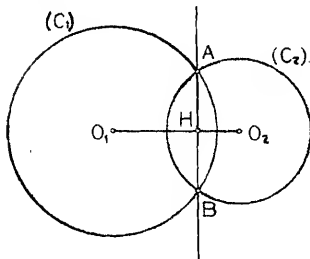
$$(3) \quad M\Gamma \cdot M\Delta = DM / (C_2)$$

Ἐκ τῶν (1), (2) καὶ (3) ἔπεται ὅτι :

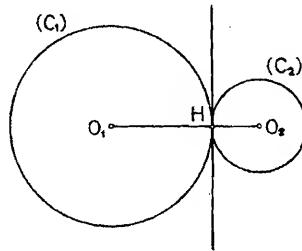
$$DM / (C_1) = DM / (C_2)$$

Ἐπομένως τὸ Μ εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξωνος τῶν (C_1) καὶ (C_2) . Τότε ἐκ τοῦ Μ φέρομεν κάθετον ΜΗ ἐπὶ τὴν διάκεντρον αὐτῶν, ἡ ὁποία εἶναι ὁ ριζικός ἄξων τῶν δύο κύκλων.

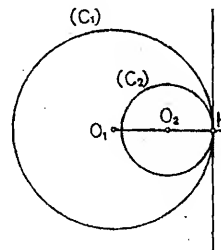
Εἰδικαὶ περιπτώσεις. i) Οἱ δύο κύκλοι τέμνονται (σχ. 353). Τότε ὁ ριζικός ἄξων αὐτῶν εἶναι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ὀρίζεται ἀπὸ τὰ κοινὰ σημεία κῦτῶν Α καὶ Β. Τοῦτο εἶναι προφανές, ἀφοῦ τὰ κοινὰ σημεία αὐτῶν ἔχουν μηδενικὴν δύναμιν, ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους. Ἄρα εἶναι σημεία τοῦ ριζικοῦ ἄξωνος.



Σχ. 353



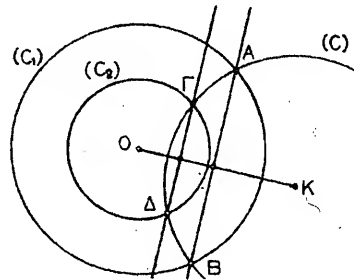
Σχ. 354



Σχ. 355

ii) Οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται. Ἄν εἶναι Η τὸ σημεῖον ἐπαφῆς των, ἡ ἐκ τοῦ Η κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον εἶναι ὁ ριζικός ἄξων αὐτῶν (σχ. 354, 355), διότι τὸ Η, ὡς κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων (C_1) καὶ (C_2) , ἔχει μηδενικὴν δύναμιν ὡς πρὸς αὐτούς. Ἄρα εἶναι σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξωνος.

iii) Οἱ κύκλοι εἶναι ὁμόκεντροι. Τότε ριζικός ἄξων δὲν ὑπάρχει, διότι ἔχει μόνον δὲν γνωρίζομεν τὴν διεύθυνσίν του, δεδομένου ὅτι ἡ διεύθυνσις τῆς διακέντρον τῶν (C_1) καὶ (C_2) εἶναι ἀπροσδιόριστος, ἀλλὰ δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν οὔτε ἐν σημείον του. Πράγματι, ἐάν Ο εἶναι τὸ κέντρον τῶν (C_1) καὶ (C_2) καὶ Κ τὸ κέντρον ἑνὸς βοηθητικοῦ κύκλου (C) , ὁ ὁ-



Σχ. 356

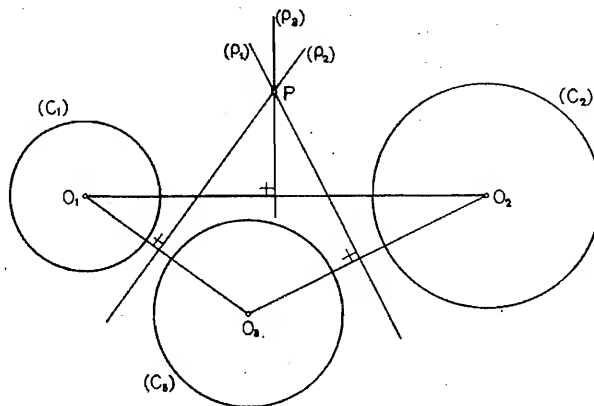
ποῖος τέμνει τοὺς (C_1) καὶ (C_2) εἰς τὰ A, B καὶ Γ, Δ (σχ. 356) ἀντιστοιχῶς, εἶναι $AB \parallel \Gamma\Delta$, ὡς κάθετοι ἀμφότεραι ἐπὶ τὴν OK . Ἐπομένως δὲν τέμνονται. Ἄρα δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος.

★ 352. **Ριζικόν κέντρον τριῶν κύκλων.** Ἄς θεωρήσωμεν τρεῖς κύκλους $(C_1), (C_2)$ καὶ (C_3) καὶ ἔστωσαν (ρ_1) ὁ ριζικός ἄξων τῶν (C_2) καὶ (C_3) καὶ (ρ_2) ὁ ριζικός ἄξων τῶν (C_1) καὶ (C_3) . Οἱ δύο οὗτοι ριζικοὶ ἄξονες ἐν γένει τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον P καὶ τότε θὰ εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν

$$(1) \quad DP/(C_2) = DP/(C_3),$$

διότι τὸ P ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα (ρ_1) , ἀφ' ἑτέρου δὲ

$$(2) \quad DP/(C_1) = DP/(C_3),$$



Σχ. 357

διότι τὸ P ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα (ρ_2) .

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται :

$$DP/(C_1) = DP/(C_2)$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ P εἶναι σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος (ρ_3) τῶν κύκλων (C_1) καὶ (C_2) . Ἄρα οἱ τρεῖς ριζικοὶ ἄξονες τῶν κύκλων $(C_1), (C_2), (C_3)$, λαμβανομένων ἀνά δύο, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου P , τὸ ὁποῖον καλεῖται **ριζικὸν κέντρον** τῶν τριῶν κύκλων, καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς αὐτούς.

Ἐὰν τὰ κέντρα τῶν τριῶν κύκλων κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, τότε ριζικὸν κέντρον δὲν ὑπάρχει, διότι οἱ τρεῖς ριζικοὶ ἄξονες θὰ εἶναι παράλληλοι ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Συμβατικῶς δεχόμεθα τότε ὅτι τὸ ριζικὸν κέντρον ἔχει ἀπομακρυνθῆ εἰς τὸ ἄπειρον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β'.

623. Ἐὰν ὁ ριζικός ἄξων δύο κύκλων δὲν τέμνῃ τὸν ἓνα ἐξ αὐτῶν, δείξατε ὅτι δὲν τέμνει καὶ τὸν ἄλλον.

624. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ σημεῖον A . Νὰ εὕρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων M , διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $MA = MB$, ὅπου MB εἶναι τὸ ἐφαπτόμενον τμήμα ἐκ τοῦ M πρὸς τὸν κύκλον (O, R) .

625. Δίδονται δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) και ἔστω (δ) ὁ ριζικός ἄξων αὐτῶν. Ἐὰν MA εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ τυχόντος σημείου M τοῦ κύκλου (K, R) ἀπὸ τὸν ριζικὸν ἄξωνα, δείξατε ὅτι εἶναι $DM/(\Lambda, \rho) = 2K\Lambda \cdot MA$.

626. Δίδονται τρία σημεῖα A, B, Γ . Νὰ γραφῇ κύκλος, τοῦ ὁποῦ τοῦ ἐφαπτόμενα τμήματα ἀπὸ τὰ A, B, Γ νὰ ἔχουν δεδομένα μήκη α, β, γ ἀντιστοίχως.

627. Ἐὰν τρεῖς κύκλοι τέμνονται ἀνὰ δύο, δείξατε ὅτι αἱ κοινὰ χορδαὶ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

BIBΛION TETARTON

KANONIKA POLYΓΩNA

353. Ὅρισμός. Ἐν πολύγωνον καλεῖται **κανονικόν**, ὅταν ἔχη ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας καὶ ὅλας τὰς γωνίας του ἴσας.

Ἐν κανονικὸν πολύγωνον δύναται νὰ εἶναι κυρτὸν (σχ. 358), ἢ ὑπὸ ὀρισμένης συνθήκας καὶ μὴ κυρτὸν, ὁπότε θὰ καλεῖται ἀστεροειδές, λόγῳ τοῦ σχήματός του. Μὲ τὰ μὴ κυρτὰ δὲν θὰ ἀσχοληθῶμεν.

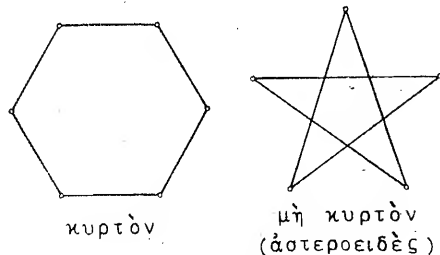
354. Κανονικὴ πολυγωνικὴ γραμμὴ καλεῖται ἡ τεθλασμένη γραμμὴ τῆς ὁποίας τὰ εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ὅλα ἴσα μεταξὺ των καὶ ἐπὶ πλεοναί γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπ' αὐτῶν εἶναι ἴσαι.

355. Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας κανονικοῦ πολυγώνου. Ἐὰν ἐν κανονικὸν πολύγωνον ἔχη n τὸ πλῆθος πλευράς, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι $2n - 4$ ὀρθαί (§ 106) καί, ἐπειδὴ ὅλαι αἱ γωνίαι του εἶναι ἴσαι μεταξὺ των, ἔπεται ὅτι ἐκάστη εἶναι ἴση πρὸς $\frac{2n - 4}{n}$ ὀρθάς.

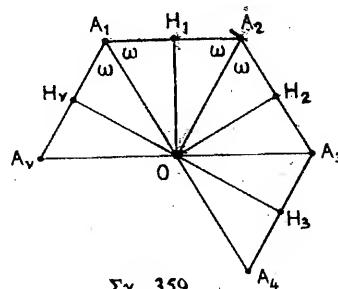
Παράδειγμα. Τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου ἐκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν, εἶναι $\frac{2 \cdot 5 - 4}{5} = \frac{6}{5}$ ὀρθαί ἢ $\frac{6}{5} \cdot 90^\circ = 108^\circ$.

356. Θεώρημα. Κάθε κανονικὸν πολύγωνον εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ κανονικὸν πολύγωνον $A_1 A_2 \dots A_n$, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι λ καὶ τὸ μέτρον ἐκάστης τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι $2\omega < 2^\circ$ (σχ. 359). Διχοτομοῦμεν τὰς γωνίας \hat{A}_1 καὶ \hat{A}_2 . Αἱ διχοτόμοι τέμνονται εἰς σημείον O , διότι αὐτὰ σχηματίζουν γωνίας ω μετὰ τῆς $A_1 A_2$, μὲ ἄθροισμα



Σχ. 358



Σχ. 359

$\omega + \omega = 2\omega < 2\pi$. Τὸ τρίγωνον OA_1A_2 εἶναι ἰσοσκελές, ὡς ἔχον τὰς παρὰ τὴν πλευρὰν A_1A_2 γωνίας ἴσας. Φέρομεν τὴν OA_3 καὶ παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι :

$$\overset{\Delta}{OA_1A_2} = \overset{\Delta}{OA_2A_3}$$

ὡς ἔχοντα $A_1A_2 = A_2A_3 = \lambda$, τὴν OA κοινὴν καὶ τὴν περιεχομένην τῶν ἰσῶν πλευρῶν γωνίαν ἴσην πρὸς ω . Ἄρα θὰ εἶναι καὶ τὸ OA_2A_3 ἰσοσκελές, συνεπῶς ἔχομεν :

$$OA_1 = OA_2 = OA_3.$$

Ὁμοίως λαμβάνομεν

$$OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n.$$

Ἄρα τὸ πολύγωνον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον κέντρου O καὶ ἀκτίνος OA_1 .

Τὸ πολύγωνον πλέον δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς n τὸ πλῆθος ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ τρίγωνα

$$\overset{\Delta}{OA_1A_2} = \overset{\Delta}{OA_2A_3} = \dots = \overset{\Delta}{OA_nA_1}.$$

Τότε καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα, ἥτοι $OH_1 = OH_2 = \dots = OH_n$. Ἄρα ὁ κύκλος μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα OH_1 , ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καί, κατὰ συνέπειαν, τὸ πολύγωνον εἶναι περιγράψιμον περὶ αὐτόν.

Παρατήρησις. Τὸ σημεῖον O , ὡς κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου διὰ τὸ πολύγωνον $A_1A_2\dots A_n$, καλεῖται ἀπλῶς κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Ἡ ἀκτὶς OA_1 τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ πολύγωνον κύκλου καλεῖται ἀκτὶς τοῦ πολυγώνου καὶ ἡ ἀκτὶς OH τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου καλεῖται ἀπόστημα αὐτοῦ. Ἡ γωνία $A_1\hat{O}A_2$ καλεῖται κεντρικὴ γωνία τοῦ πολυγώνου. Αὕτη ἰσοῦται προφανῶς μὲ $\frac{360^\circ}{n}$ ἢ $\frac{4\pi}{n}$, ὅπου n τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

357. Γενικοὶ συμβολισμοί. Εἰς τὸ ἐξῆς θὰ συμβολίζωμεν μέ :

λ_n τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) κανονικοῦ n -γώνου.

α_n τὸ ἀπόστημα ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) κανονικοῦ n -γώνου.

λ'_n τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς περιγεγραμμένου περὶ κύκλον (O, R) κανονικοῦ n -γώνου.

P_n τὴν περίμετρον ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) κανονικοῦ n -γώνου.

P'_n τὴν περίμετρον περιγεγραμμένου περὶ κύκλον (O, R) κανονικοῦ n -γώνου.

E_n τὸ ἐμβαδὸν ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) κανονικοῦ n -γώνου.

E'_n τὸ ἐμβαδὸν περιγεγραμμένου περὶ κύκλον (O, R) κανονικοῦ n -γώνου.

✚ **358. Θεώρημα.** Ἐὰν κύκλος διαιρεθῇ εἰς n ἴσα τόξα, τὰ διαιρετικά

βάρβητος
μύγν.

σημεῖα εἶναι κορυφαὶ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ n -γώνου, αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα ὀρίζουν ἐπίσης περιγεγραμμένον κανονικὸν n -γώνον.

Ἀπόδειξις. Ἐστω κύκλος κέντρου O , ὁ ὁποῖος ἔχει διαιρεθῇ εἰς n ἴσα τόξα διὰ τῶν σημείων A_1, A_2, \dots, A_n (σχ. 360). Τότε θὰ εἶναι :

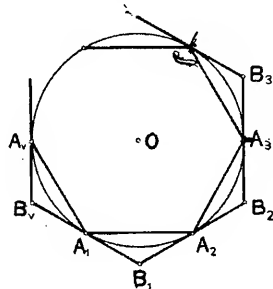
$$(1) \quad A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_nA_1$$

ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Ἐπὶ πλέον δὲ ἔχομεν :

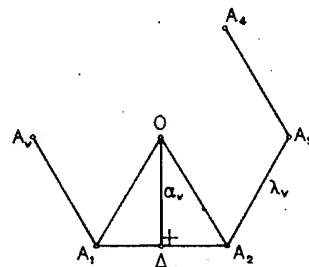
$$(2) \quad \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \dots = \widehat{A_n},$$

διότι εἶναι γωνίαι ἐγγεγραμμέναι εἰς ἴσα τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι τὸ πολύγωνον $A_1A_2\dots A_n$ εἶναι κανονικόν.

Ἐὰν εἰς τὰ σημεῖα A_1, A_2, \dots, A_n φέρωμεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου, αὗται τεμνόμεναι ὀρίζουν τὰ σημεῖα B_1, B_2, \dots, B_n , τὰ ὁποῖα εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ n -γώνου. Πράγματι τὰ τρίγωνα $B_1A_1A_2, B_2A_2A_3, \dots, B_nA_nA_1$ εἶναι ἰσοσκελῆ, διότι ἐκ τοῦ οἰουδήποτε σημείου $B_k, k = 1, 2, \dots, n$ ἄγονται ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα πρὸς τὸν κύκλον. Τὰ τρίγωνα εἶναι καὶ ἴσα διότι ἔχουν ἴσας βάσεις



Σχ. 360



Σχ. 361

αἱ δὲ παρὰ τὴν βάσιν αὐτῶν γωνίαι, ὡς σχηματιζόμεναι ὑπὸ ἴσων χορδῶν τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ τῶν ἐφαπτομένων, εἶναι ἴσαι. Ἀρα :

$$B_1A_1A_2 = B_2A_2A_3 = \dots = B_nA_nA_1.$$

Τότε θὰ εἶναι καὶ

$$(3) \quad \widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \dots = \widehat{B_n} \text{ καὶ}$$

$$(4) \quad B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_nB_1$$

Ἐκ τῶν (3) καὶ (4) ἔπεται ὅτι τὸ πολύγωνον $B_1B_2\dots B_n$ εἶναι κανονικόν καὶ ἔχει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν μὲ τὸ $A_1A_2\dots A_n$. Τὸ περιγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον $B_1B_2B_3\dots B_n$, καλεῖται ἀντίστοιχον τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου $A_1A_2A_3\dots A_n$ καὶ ἀντιστρόφως.

359. Ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου. Θεώρημα. Τὸ ἔμβαδον παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ ἐπὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $A_1A_2\dots A_n$ κανονικὸν πολύγωνον πλευρᾶς λ_n , α_n τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ καὶ O τὸ κέντρον του. (σχ. 361). Τοῦτο δύναται νὰ διαιρεθῇ

εις n τὸ πλῆθος τρίγωνα ἴσα πρὸς τὸ OA_1A_2 . Ἐπομένως, ἂν E_n εἴναι τὸ ἔμβαδον αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν :

$$(1) \quad E_n = n \cdot (OA_1A_2)$$

Ἀλλὰ $(OA_1A_2) = \frac{1}{2} \lambda_n \alpha_n$ καὶ ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$E_n = n \cdot \frac{1}{2} \lambda_n \alpha_n = \frac{n \lambda_n}{2} \alpha_n = \frac{P_n \alpha_n}{2}.$$

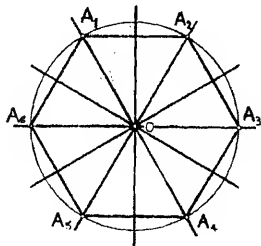
Ἄρα

$$E_n = \frac{P_n \alpha_n}{2}$$

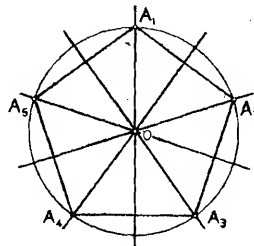
ὅπου P_n ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου.

360. Συμμετρία εις κανονικά πολύγωνα. Θεώρημα. Κάθε κανονικὸν n -γωνον ἔχει n τὸ πλῆθος ἄξονας συμμετρίας.

Ἀπόδειξις. i) Ἐστω $n = 2k$ ἄρτιος. Αἱ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου τότε, ὡς σημεῖα τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸ κύκλου, εἶναι ἀνὰ δύο ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα καὶ συνεπῶς ὀρίζουν k τὸ πλῆθος διαμέτρους, ἐκάστη ἐκ τῶν ὁποίων εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ πολυγώνου (σχ. 362). Ἐπὶ πλέον, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου εἶναι ἀνὰ δύο παράλληλοι, ἡ μεσοκάθετος μιᾶς πλευρᾶς, διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τοῦ πολυγώνου, εἶναι μεσοκάθετος καὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, καὶ ἐπομένως ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος. Ἐπειδὴ ἔχομεν k τὸ πλῆθος ζεύγη παραλλήλων πλευρῶν, ἔχομεν k τοιοῦτους ἄξονας συμμετρίας. Ἄρα οἱ ἄξονες συμμετρίας τελικῶς εἶναι $k + k = 2k = n$ τὸ πλῆθος.



Σχ. 362



Σχ. 363

ii) Ἐστω n περιττός (σχ. 363). Ἐκάστη διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ πολύγωνον κύκλου, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ μιᾶς κορυφῆς, εἶναι μεσοκάθετος διὰ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν (διατί;) καὶ συνεπῶς ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος. Οἱ ἄξονες οὗτοι εἶναι n τὸ πλῆθος ὅσαι καὶ αἱ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου.

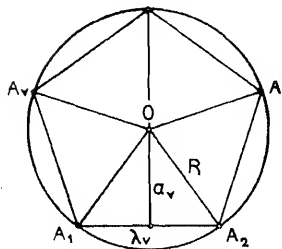
361. Ὁμοιότης εις τὰ κανονικά πολύγωνα. Θεώρημα. Δύο κανονικά πολύγωνα τοῦ αὐτοῦ πλῆθους πλευρῶν εἶναι ὅμοια. Ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων καὶ ὁ λόγος τῶν ἀποστημάτων τῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ὡς θεωρήσωμεν δύο κανονικά πολύγωνα $A_1A_2 \dots A_n$, $A'_1A'_2 \dots A'_n$ τοῦ αὐτοῦ πλήθους πλευρῶν n (σχ. 364). Ἀπὸ τὰ κέντρα O καὶ O' φέρομεν τὰς ἀκτῖνας OA_1, OA_2, \dots, OA_n καὶ $O'A'_1, O'A'_2, \dots, O'A'_n$ καὶ διαιροῦμεν ἕκαστον πολύγωνον εἰς n ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Ἐπειδὴ $\widehat{A_1OA_2} = \widehat{A'_1O'A'_2} = \frac{360^\circ}{n}$, ἔπεται ὅτι $\triangle A_1OA_2 \approx \triangle A'_1O'A'_2$. Ἀρα τὰ δύο κανονικά πολύγωνα

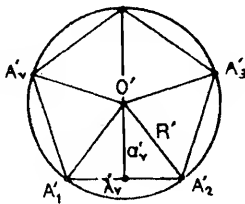
εἶναι ὅμοια, διότι εἶναι διηρημένα εἰς ἰσάριθμα ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα τρίγωνα. Ἐὰν λ_n καὶ λ'_n εἶναι αἱ πλευραὶ τῶν δύο πολυγώνων, ὁ λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν μεταφέρεται προφανῶς καὶ εἰς τὰς ἀκτῖνας τῶν καὶ εἰς τὰ ἀποστήματα, διότι ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα A_1OA_2 καὶ $A'_1O'A'_2$ λαμβάνομεν $\frac{\lambda_n}{\lambda'_n} = \frac{OA_1}{O'A'_1} = \frac{R}{R'}$ καὶ $\frac{\lambda_n}{\lambda'_n} = \frac{\alpha_n}{\alpha'_n}$, ὡς ὁμόλογα ὕψη ὁμοίων τριγώνων.

Πόρισμα I. Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

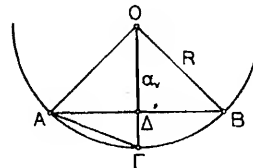
Πράγματι, ἂν P_n καὶ P'_n εἶναι αἱ περίμετροι αὐτῶν, ἔχομεν :



Σχ. 364



Σχ. 365



$$(3) \quad \frac{P_n}{P'_n} = \frac{n \cdot \lambda_n}{n \cdot \lambda'_n} = \frac{\lambda_n}{\lambda'_n}$$

Πόρισμα II. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

Πράγματι, ἂν E_n καὶ E'_n εἶναι τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν, ἔχομεν (§ 359) :

$$\frac{E_n}{E'_n} = \frac{\frac{P_n \cdot \alpha_n}{2}}{\frac{P'_n \cdot \alpha'_n}{2}} = \frac{P_n}{P'_n} \cdot \frac{\alpha_n}{\alpha'_n} = \frac{\lambda_n}{\lambda'_n} \cdot \frac{\lambda_n}{\lambda'_n} = \left(\frac{\lambda_n}{\lambda'_n} \right)^2$$

★ 362. **Πρόβλημα I.** Δοθέντος κανονικοῦ n -γώνου πλευρᾶς λ_n καὶ ἀκτίνος R νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπόστημα α_n αὐτοῦ.

Λύσις. Ἐστω $AB = \lambda_n$ ἡ πλευρὰ κανονικοῦ n -γώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) (σχ. 365). Φέρομεν τὴν $OD \perp AB$. Ἐπομένως τὸ OD εἶναι τὸ ἀπόστημα α_n τοῦ πολυγώνου. Ἐπὶ πλέον δὲ τὸ Δ εἶναι μέσον τῆς πλευρᾶς AB , διότι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώ-

νου OAB τὸ ὕψος OA εἶναι καὶ διάμεσος. Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OAA ($\hat{A} = 1^\circ$) ἡ ὑποτείνουσα εἶναι $OA = R$ καὶ ἡ κάθετος $AA = \frac{\lambda_v}{2}$. Ἄρα ἔχομεν $OA^2 = OA^2 - AA^2$ ἢ

$$\alpha_v^2 = R^2 - \left(\frac{\lambda_v}{2}\right)^2 = \frac{4R^2 - \lambda_v^2}{4},$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται ὅτι :

$$\alpha_v = \frac{\sqrt{4R^2 - \lambda_v^2}}{2}$$

★ 363. Πρόβλημα II. Δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου πλευρᾶς λ_v καὶ ἀκτίνος R , νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Λύσις. Ἐστω $AB = \lambda_v$ ἡ πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) . Ἐκ τοῦ κέντρου O φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν AB (σχ. 365), ἡ ὁποία συναντᾷ αὐτὴν εἰς τὸ Δ , τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ μέσον τῆς AB καὶ τὸν κύκλον εἰς τὸ Γ . Ἡ AG εἶναι προφανῶς ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου πολυγώνου καὶ ἔστω λ_{2v} τὸ μῆκος τῆς. Αὕτη εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔAG , εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$A\Delta = \frac{\lambda_v}{2} \text{ καὶ}$$

$\Delta\Gamma = OG - OA = R - \alpha_v$, ὅπου α_v τὸ ἀπόστημα τοῦ δοθέντος πολυγώνου. Τοῦτο εἶναι :

$$\alpha_v = \frac{\sqrt{4R^2 - \lambda_v^2}}{2}$$

$$\text{Τότε : } \Delta\Gamma = R - \alpha_v = \frac{2R - \sqrt{4R^2 - \lambda_v^2}}{2}. \text{ Ἄρα : } AG^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 \text{ ἢ}$$

$$\lambda_{2v}^2 = \left(\frac{\lambda_v}{2}\right)^2 + \left(\frac{2R - \sqrt{4R^2 - \lambda_v^2}}{2}\right)^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_v^2} \quad \eta$$

$$(1) \quad \lambda_{2v} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_v^2}} \quad (\text{Τύπος Ἀρχιμήδους})$$

★ 364. Πρόβλημα III. Δοθέντος κανονικοῦ n -γώνου πλευρᾶς λ_v καὶ ἀκτίνος R , νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν.

Λύσις. Ἐστω $AB = \lambda_v$ ἡ πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) (σχ. 366). Ἐκ τοῦ O φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν AB , ἡ ὁποία τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ Δ καὶ τὸν κύκλον εἰς τὸ Γ . Εἰς τὸ Γ φέρομεν εφαπτομένην τοῦ κύκλου, ἡ ὁποία τέμνει τὰς προεκτάσεις τῶν OA καὶ OB εἰς τὰ E καὶ Z ἀντιστοίχως. Τότε ἡ EZ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν.

Διότι τὸ τρίγωνον OEZ , ὡς ἔχον τὸ ὕψος τοῦ OG καὶ διχοτόμον τῆς γωνίας \hat{O} αὐτοῦ, εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ OAB μὲ σταθερὸν λόγον ὁμοιότητος $\frac{OG}{OA} = \frac{R}{\alpha_v}$. Ἐπο-

μένως τὸ διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ κατασκευαζόμενον πολύγωνον μὲ πλευρὰν τὴν EZ διακρίνεται εἰς τρίγωνα ὅμοια πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου πλευρᾶς AB . Ἄρα εἶναι ὅμοιον πρὸς αὐτὸ καὶ ἐπομένως κανονικόν. Ἄς σημειωθῇ ἐπὶ πλέον ὅτι διὰ τὰ περιγεγραμμένα (ἀντιστοίχως τὰ ἐγγεγραμμένα) κανονικὰ πολύγωνα περὶ τὸν

**ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΤΙΝΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ
ΕΙΣ ΔΟΘΕΝΤΑ ΚΥΚΛΟΝ**

365. Πρόβλημα I. Εἰς δοθέντα κύκλον (O, R) νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ἐκ τῆς ἀκτίνος τοῦ κύκλου.

Λύσις. Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου τέμνονται καθέτως καὶ διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου του, γράφομεν δύο καθέτως τεμνομένας διαμέτρους $ΑΓ$ καὶ $ΒΔ$ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον (O, R) . Αὗται ὀρίζουν ἐπὶ τοῦ κύκλου τὰς κορυφὰς τοῦ τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ (σχ. 367).

Τότε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $ΟΑΔ$ λαμβάνομεν :

$$ΑΔ^2 = ΟΑ^2 + ΟΔ^2 \quad \eta \quad λ_4^2 = R^2 + R^2,$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται :

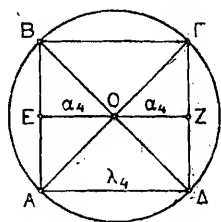
$$λ_4 = R\sqrt{2}$$

Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου O φέρωμεν παράλληλον τῆς $ΑΔ$, σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον $ΑΕΖΔ$, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι προφανῶς $ΕΖ = 2α_4$. Ἀλλὰ $ΕΖ = ΑΔ = λ_4$. Ἀρα $2α_4 = R\sqrt{2}$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν

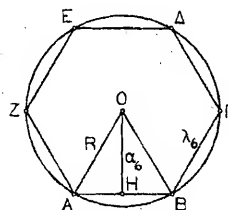
$$α_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

366. Πρόβλημα II. Εἰς δοθέντα κύκλον (O, R) νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ἑξάγωνον, νὰ ὑπολογισθῇ δὲ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ἐκ τῆς ἀκτίνος τοῦ κύκλου.

Λύσις. Ἐστω $ΑΒΓΔΕΖ$ τὸ ζητούμενον ἑξάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O, R) (σχ. 368). Ἡ κεντρικὴ γωνία αὐτοῦ $\widehat{ΑΟΒ}$ εἶναι ἴση πρὸς



Σχ. 367



Σχ. 368

$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Ἀρα τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον OAB εἶναι ἰσόπλευρον, συνεπῶς

$AB = OA = R$. Ἀρα

$$λ_6 = R$$

Ἡ κατασκευὴ γίνεται εὐκόλως ἐὰν λάβωμεν ἀνθαιρέτως ἓν σημεῖον A τοῦ κύκλου (O, R) καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα R ὀρίσωμεν διαδοχικῶς διὰ τοῦ διαβήτη τοῦ τὰς ὑπολοίπους κορυφὰς οὕτως, ὥστε

$$AB = R, \quad ΒΓ = R, \dots, \quad ΕΖ = R.$$

Τὸ ἀπόστημα $\alpha_3 = OH$ εἶναι ὕψος ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς R καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι :

$$\alpha_3 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Τοῦτο, ἄλλωστε, εὐκόλως συνάγεται καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, $OA H$, τὸ ὁποῖον ἔχει $OA = R$ καὶ $AH = \frac{R}{2}$.

367. Πρόβλημα III. Εἰς δοθέντα κύκλον (O, R) νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν τρίγωνον (ἰσόπλευρον), νὰ ὑπολογισθῇ δὲ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ἐκ τῆς ἀκτίνος τοῦ κύκλου.

Λύσις. Ὅρίζομεν ἐπὶ τοῦ κύκλου διαδοχικῶς τὰς κορυφὰς $A, Z, B, \Delta, \Gamma, E$ κανονικοῦ ἑξαγώνου (σχ. 369). Τότε τὰ σημεῖα A, B καὶ Γ εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ τριγώνου. Πράγματι ἔχομεν :

$$\widehat{AZB} = \widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{\Gamma E A}. \text{ Ὡρα } AB = B\Gamma = \Gamma A,$$

ἥτοι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον.

Διὰ τὸν ὑπολογισμόν τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ, προεκτείνομεν τὴν GO , ἡ ὁποία, ὡς διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{\Gamma}$, θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ τόξου \widehat{AB} , ἥτοι ἀπὸ τὴν κορυφὴν Z τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον κανονικοῦ ἑξαγώνου. Ὡρα $ZB = R$. Τὸ τρίγωνον $B\Gamma Z$ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ B , διότι ἡ ΓZ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου. Εἰς αὐτὸ εἶναι $\Gamma Z = 2R$ καὶ $ZB = R$.

$$\text{Ὡρα } \Gamma B^2 = \Gamma Z^2 - ZB^2 \quad \eta$$

$$\lambda_3^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \quad \eta$$

$$\lambda_3 = R\sqrt{3}.$$

$$\text{Διὰ τὸ ἀπόστημα ἔχομεν } OM = \alpha_3 = \frac{ZB}{2}.$$

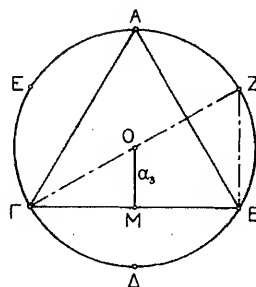
Ὡρα :

$$\alpha_3 = \frac{R}{2},$$

διότι τὰ ἄκρα του εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΓZ καὶ ΓB τοῦ τριγώνου ΓZB , τὸ ὁποῖον ἔχει $ZB = R$.

368. Πρόβλημα IV. Εἰς δοθέντα κύκλον (O, R) νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκάγωνον, νὰ ὑπολογισθῇ δὲ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ἐκ τῆς ἀκτίνος τοῦ κύκλου.

Λύσις. Ἐστω AB ἡ πλευρὰ κανονικοῦ δεκαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) καὶ ἄς καλέσωμεν x τὸ μῆκος τῆς (σχ. 370). Ἡ κεντρικὴ γωνία \widehat{AOB} εἶναι $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$. Ὡρα τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου OAB ἐκάστη



Σχ. 369

τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι $\frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$. Ἐὰν φέρωμεν τὴν διχοτόμον

ΑΓ τῆς γωνίας \widehat{A} , τὸ τρίγωνον ΟΑΒ χωρίζεται εἰς δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα, διότι τὸ ΓΑΟ ἔχει $\widehat{O} = 36^\circ$ καὶ $\widehat{A} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$. Ἀρα

$$(1) \quad \Gamma A = \Gamma O$$

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\widehat{A} = 36^\circ$ καὶ $\widehat{B} = 72^\circ$.

Ἀρα $\widehat{\Gamma} = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ$. Ἐπομένως

$$(2) \quad \text{ΑΓ} = \text{ΑΒ}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ} = \text{ΓΟ} = x$.

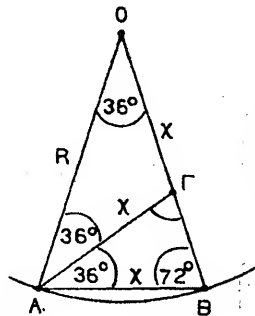
Ἐὰν τώρα ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τῆς διχοτόμου διὰ τὸ τρίγωνον ΟΑΒ, εὐρίσκομεν :

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΟ}} = \frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΓΟ}} \quad \eta$$

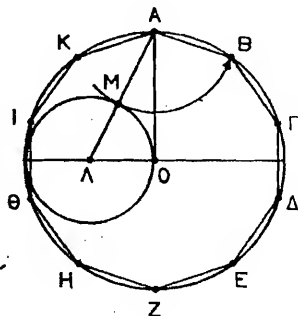
$$\frac{x}{R} = \frac{R-x}{x} \quad \eta$$

$$(3) \quad x^2 = R(R-x)$$

Ἡ σχέσις (3) εἶναι ἡ ἴδια μὲ τὴν σχέσιν τῆς § 349, ἄρα τὸ τμήμα x εἶναι τὸ μεγαλύτερον τμήμα τῆς διαιρέσεως τῆς ἀκτίνος R εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.



Σχ. 370



Σχ. 371

Κατασκευή. Εἶναι ἡ ἴδια μὲ τὴν τῆς παραγράφου 349. Ἀρα εἰς τυχοῦσαν ἀκτῖνα $\text{ΟΑ} = R$ γράφομεν κύκλον διαμέτρου R ἐφαπτόμενον αὐτῆς εἰς τὸ Ο (σχ. 371). Ἐὰν Λ εἶναι τὸ κέντρον αὐτοῦ, φέρομεν τὸ τμήμα $\Lambda\Lambda$, τὸ ὁποῖον ὀρίζει ἐπὶ τοῦ κύκλου $\left(\Lambda, \frac{R}{2}\right)$ σημεῖον Μ . Τὸ τμήμα ΑΜ εἶναι τότε ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου.

Υπολογισμὸς τοῦ μήκους. Ἡ ἐξίσωσις (3) γράφεται :

$$x^2 + Rx - R^2 = 0$$

καὶ ἡ θετικὴ ρίζα αὐτῆς εἶναι τὸ μήκος τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, ἥτοι :

$$\lambda_{10} = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2} \quad \eta$$

$$\lambda_{10} = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

Τὸ ἀπόστημα ὑπολογίζεται ἀπὸ ἓν κεντρικὸν τρίγωνον OAB (σχ. 372).

$$\text{Φέρομεν } OM \perp AB \Rightarrow OM = \alpha_{10} \Rightarrow AM = \frac{\lambda_{10}}{2} \Rightarrow$$

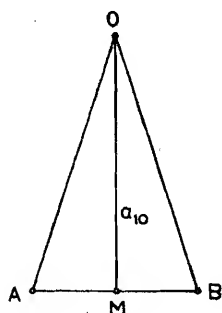
$$\alpha_{10}^2 = OA^2 - AM^2 = R^2 - \left[\frac{R(\sqrt{5}-1)}{4} \right]^2$$

$$= R^2 - \frac{R^2(5-2\sqrt{5}+1)}{16} = \frac{R^2(10+2\sqrt{5})}{16} \Rightarrow$$

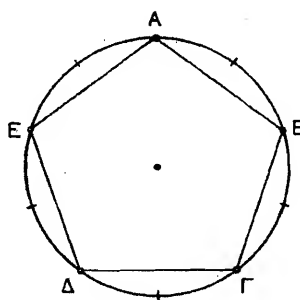
$$\alpha_{10} = \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

369/ Πρόβλημα V. Εἰς δοθέντα κύκλον (O, R) νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν πεντάγωνον, νὰ ὑπολογισθῇ δὲ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ἐκ τῆς ἀκτίνος τοῦ κύκλου.

Λύσις. Κατασκευασθέντος τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, αἱ κορυφαὶ περιτ-



Σχ. 372



Σχ. 373

τῆς τάξεως αὐτοῦ ἀποτελοῦν τὰς κορυφὰς τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου, ἥτοι τὸ ABΓΔΕ (σχ. 373) εἶναι κανονικὸν πεντάγωνον.

Διὰ τὸν ὑπολογισμόν τῆς πλευρᾶς λ_5 αὐτοῦ, ἀρκεῖ εἰς τὸν τύπον (1) τῆς § 363 νὰ θέσωμεν $n=5$, γνωστοῦ ὄντος ὅτι $\lambda_{10} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$ καὶ νὰ ἐπιλύσωμεν ὡς πρὸς λ_5 . Τότε λαμβάνομεν:

$$\lambda_5 = \frac{R}{2} \sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Τὸ ἀπόστημα ὑπολογίζεται ἀπὸ ἓν κεντρικὸν τρίγωνον:

$$\alpha_5^2 = R^2 - \left(\frac{\lambda_5}{2} \right)^2 = R^2 - \left[\frac{R}{4} \sqrt{10-2\sqrt{5}} \right]^2 =$$

$$= R^2 - \frac{R^2(10-2\sqrt{5})}{16} = \frac{R^2(6+2\sqrt{5})}{16} \Rightarrow$$

$$\alpha_5 = \frac{R}{4} \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \frac{R(\sqrt{5}+1)}{4}.$$

370. Πρόβλημα VI. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκαπεντάγωνον.

Λύσις. Ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς ἰσότητος $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ παρατηροῦ-

μεν ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ δέκατον πέμπτον τοῦ κύκλου, ἀρκεῖ ἀπὸ τὸ ἕκτον αὐτοῦ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δέκατον. Ἄν λοιπὸν ἀπὸ τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ὑποτείνει τὴν πλευρὰν κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἀφαιρέσωμεν τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ὑποτείνει τὴν πλευρὰν κανονικοῦ δεκαγώνου, θὰ εὕρωμεν τόξον, τὸ ὁποῖον θὰ ὑποτείνῃ τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ δεκαπενταγώνου. Κατόπιν τῆς παρατηρήσεως ταύτης, ἡ κατασκευὴ θεωρεῖται γνωστὴ.

Παρατήρησις. Εἶδομεν ἀνωτέρω ὅτι, δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) , δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τὸν ἴδιον κύκλον κανονικὸν πολύγωνον διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν. Ἐμελετήσαμεν δὲ τὰ κανονικὰ πολύγωνα ἀριθμοῦ πλευρῶν $4 = 2^2$, $5 = 5 \cdot 2^0$, $6 = 3 \cdot 2^1$, $10 = 5 \cdot 2^1$ καὶ ὑπεδείξαμεν τὸν τρόπον ἐγγραφῆς εἰς κύκλον κανονικοῦ δεκαπενταγώνου (πλήθους πλευρῶν $15 = 3 \cdot 5 \cdot 2^0$). Γενικεύοντες τὰ ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι εἰς κύκλον (O, R) δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὰ πολύγωνα πλήθους πλευρῶν 2^n ($n \in \mathbb{N} \wedge n > 1$), $5 \cdot 2^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$), $3 \cdot 2^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) καὶ $3 \cdot 5 \cdot 2^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α.

638. Δείξατε ὅτι ἐκάστη διαγώνιος κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι παράλληλος μίᾳ πλευρᾷ του.

639. Νὰ εὕρεθῇ ἡ ἀκτίς κύκλου ἐκ τῆς πλευρᾷς λ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν κανονικοῦ α) τριγώνου, β) ἑξαγώνου, γ) τετραγώνου.

640. Νὰ εὕρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ α) τριγώνου, β) τετραγώνου, γ) ἑξαγώνου ἐκ τῆς ἀκτίνος R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

641. Εἰς δοθέντα κύκλον ἀκτίνος R νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ὀκτάγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ.

642. Εἰς δοθέντα κύκλον ἀκτίνος R νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δωδεκάγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ.

643. Νὰ εὕρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ α) τριγώνου, β) τετραγώνου, γ) ἑξαγώνου, περιγεγραμμένων περὶ κύκλον (O, R) ἐκ τῆς ἀκτίνος R .

644. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι $\frac{1}{4}$.

645. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι $\frac{3}{4}$.

646. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ κατασκευάζομεν τετράγωνα. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ κορυφαὶ τῶν τετραγώνων αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι καὶ κορυφαὶ τοῦ ἑξαγώνου, εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ δωδεκαγώνου, τοῦ ὁποίου νὰ εὕρεθῇ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

B.

647. Εἰς κανονικὸν ἐξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ πλευρᾶς α συνδέομεν τὴν κορυφὴν Α μετὰ μέσον Η τῆς πλευρᾶς ΓΔ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἐκάστου τῶν δύο μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τὸ ἐξάγωνον.

648. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ πλευρὰ κανονικοῦ πενταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτίνος R εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔχοντος καθέτους πλευρὰς τὰς πλευρὰς τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένων κανονικοῦ ἐξάγωνου καὶ κανονικοῦ δεκαγώνου.

649. Νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποῖου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν λ καὶ τὴν κεντρικὴν γωνίαν ω αὐτοῦ.

650. Εἰς κύκλον ἀκτίνος R ἐγγράφομεν τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Μετὰ πλευρὰς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ κατασκευάζομεν τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΗ, τὰ ὁποῖα περιέχουν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ πλευραὶ ΒΔ καὶ ΓΖ τέμνονται εἰς σημεῖον Ν, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου, αἱ δὲ πλευραὶ ΕΔ καὶ ΗΖ τέμνονται εἰς σημεῖον Μ, κεῖμενον ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου, ποῦ ἄγεται ἐκ τοῦ Α. Νὰ εὑρεθῇ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος ΑΕΜΗ.

651. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυρτοῦ κανονικοῦ δεδωκαγώνου ἐκ τῆς ἀκτίνος του, χωρὶς νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ του.

652. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (O, R).

653. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κανονικοῦ δωδεκαγώνου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (O, R).

654. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ α) ὀκταγώνου, β) δωδεκαγώνου, γ) εἰκοσαγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R).

655. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ κέντρου O. Μετὰ κέντρα τὰς κορυφὰς τοῦ τετραγώνου καὶ ἀκτῖνα AO γράφομεν κυκλικά τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνουν τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου εἰς ὁκτὼ σημεῖα. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ ὀκταγώνου καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν του ἐκ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου.

656. Νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν πεντάγωνον, τοῦ ὁποῖου δίδεται ἡ πλευρὰ λ.

657. Νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν ὀκτάγωνον, τοῦ ὁποῖου δίδεται τὸ ἀπόστημα α.

658. Δείξατε ὅτι ἐκάστη διαγώνιος κανονικοῦ πενταγώνου διαιρεῖται ὑπὸ μιᾶς ἄλλης διαγωνίου του εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

659. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R), τὸ ὁποῖον ἔχει 35 διαγωνίους.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

371. Θεώρημα. Κάθε κανονικὸν πολύγωνον, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O, R) ἔχει περίμετρον μικροτέραν τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, μετὰ διπλάσιον ἀριθμῶν πλευρῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $AB = \lambda_k$ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον (O, R) κανονικοῦ πολυγώνου μετὰ κ πλευρὰς καὶ $AD = \Delta B = \lambda_{2k}$ ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μετὰ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν (σχ. 374). Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΒ λαμβάνομεν :

$$AB < AD + \Delta B \quad \eta$$

(1)

$$\lambda_k < 2\lambda_{2k}$$

Ἐάν τὴν σχέσιν (1) πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ κ λαμβάνομεν :

$$\kappa \cdot \lambda_{\kappa} < 2\kappa \cdot \lambda_{2\kappa} \quad \eta$$

$$(2) \quad P_{\kappa} < P_{2\kappa},$$

ὅπου P_{κ} καὶ $P_{2\kappa}$ αἱ περιμέτροι τῶν ὡς ἄνω πολυγώνων μὲ πλευρὰς κ καὶ 2κ ἀντιστοίχως.

Πόρισμα. Ἡ ἀκολουθία

$$(3) \quad P_{\kappa}, P_{2\kappa}, P_{4\kappa}, \dots, P_{2^v \kappa}, \dots \mid v = 0, 1, 2, \dots$$

τῶν περιμέτρων τῶν κανονικῶν πολυγώνων, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (O, R) καὶ ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν τοῦ προηγουμένου του, εἶναι ἀξέουσα ἥτοι :

$$P_{\kappa} < P_{2\kappa} < P_{4\kappa} < \dots < P_{2^v \kappa} < \dots \mid v = 0, 1, 2, \dots$$

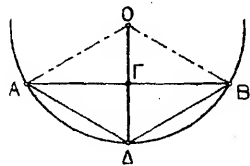
372. Θεώρημα. Ἐάν μεταβλητοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς σταθερὸν κύκλον (O, R) , τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν του αὐξάνῃ τείνουν πρὸς τὸ ἄπειρον, τότε :

i) Τὸ μήκος τῆς πλευρᾶς του λ , ἐλαττοῦται τείνουν πρὸς τὸ μηδέν.

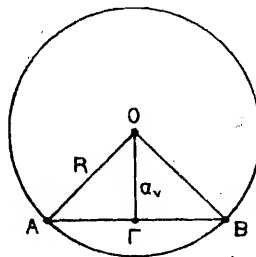
ii) Τὸ μήκος τοῦ ἀποστήματός του α , αὐξάνει τείνουν πρὸς τὴν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

iii) Τὸ μήκος τῆς περιμέτρου του P , αὐξάνει τείνουν πρὸς τὸ μήκος L τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω σταθερὸς κύκλος (O, R) μὲ μήκος L (περίμετρον) καὶ $AB = \lambda$, ἡ πλευρὰ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν κανονικοῦ πολυγώνου μὲ v πλευρὰς (σχ. 375).



Σχ. 374



Σχ. 375

i) Τὸ μήκος τοῦ τόξου \widehat{AB} (ἐλάσσονος) ἰσοῦται πρὸς τὸ $1/v$ τοῦ μήκους L τοῦ κύκλου, ἥτοι εἶναι

$$(1) \quad \widehat{AB} = \frac{1}{v} \cdot L$$

Τότε

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \widehat{AB} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{L}{v} = 0 (*)$$

* Τὸ Σύμβολον \lim τῆς διεθνoῦς βιβλιογραφίας, σημαίνει ὄριον.

Ἐπειδὴ ὁμῶς εἶναι

$$(2) \quad \lambda_n = AB < \widehat{AB},$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$$

ἔπεται ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2)

$$\text{ὅτι } \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$$

ii) Ἐὰν $OG = \alpha_n$ εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καὶ AG

$$= \frac{AB}{2} = \frac{\lambda_n}{2}, \text{ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον } AGO, \text{ μὲ ὑποτείνουσαν } AO = R,$$

λαμβάνομεν :

$$AO^2 = OG^2 + AG^2 \Rightarrow R^2 = \alpha_n^2 + \left(\frac{\lambda_n}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \alpha_n^2 = R^2 - \left(\frac{\lambda_n}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[R^2 - \left(\frac{\lambda_n}{2}\right)^2 \right] = R^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_n}{2}\right)^2 =$$

$$= R^2 - 0 = R^2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^2 = R^2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = R \text{ (ἐφ' ὅσον ἡ σχέσις ἀνα-}$$

φέρεται εἰς μέτρα γεωμετρικῶν μεγεθῶν), ἥτοι τὸ ἀπόστημα α_n τείνει πρὸς τὴν ἀκτῖνα R , ὅταν τὸ n τείνη πρὸς τὸ ἄπειρον.

iii) Τὸ μῆκος κυκλικοῦ τόξου, ἐξ ὀρισμοῦ, ἰσοῦται πρὸς τὸ ὄριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει κανονικὴ πολυγωνικὴ γραμμὴ ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτό, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον. Ἄρα τὸ μῆκος L κύκλου (O, R) ἰσοῦται πρὸς τὸ ὄριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ περίμετρος P_n μεταβλητοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτόν, ὅταν τὸ πλῆθος n τῶν πλευρῶν τοῦ τείνη πρὸς τὸ ἄπειρον.

Κατὰ ταῦτα, ἐφ' ὅσον ἡ πλευρὰ $\lambda_n = AB$ τυχόντος ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ n -γώνου εἰς τὸν κύκλον (O, R) εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀντιστοίχου αὐτῆς τόξου \widehat{AB} , ἥτοι $\lambda_n < \widehat{AB} \Rightarrow n \cdot \lambda_n < n \cdot \widehat{AB} \Rightarrow P_n < L$ καὶ ἐπειδὴ ἐπὶ πλεόν $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = L$, ἔπεται ὅτι τὸ μῆκος τῆς μεταβλητῆς περιμέτρου P_n αὐξάνει τείνων εἰς τὸ μῆκος L τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου.

Κατ' ἄλλην διατύπωσιν, ἡ ἀκολουθία P_n , $n = 3, 4, 5, \dots$, τῶν περιμέτρων, τῶν ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων εἰς τὸν κύκλον (O, R) , εἶναι αὐξουσα καὶ φραγμένη ὑπὸ τῆς περιμέτρου L τοῦ κύκλου (O, R) , συγκλίνει δὲ εἰς αὐτήν.

§ 373. Θεώρημα. Κάθε κανονικὸν πολύγωνον, περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (O, R) , ἔχει περίμετρον μεγαλυτέραν τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $AB = \lambda'_n$ ἡ πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον (O, R) , Γ τὸ μέσον αὐτῆς καὶ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς

μετὰ τοῦ κύκλου (σχ. 376). Φέρομεν τὰς OA καὶ OB καὶ ἔστω ὅτι αὗται τέμνουν εἰς τὰ I καὶ K τὸν κύκλον. Εἰς τὰ I καὶ K φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου, αἱ ὁποῖαι ὀρίζουν ἐπὶ τῆς AB τὰ σημεῖα E καὶ Z . Ἡ συμμετρία, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα OG , ὡς καὶ τοὺς ἄξονας OA καὶ OB , μᾶς ἐξασφαλίζει τὴν κανονικότητα διὰ τὸ πολύγωνον τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον (O, R) μὲ πλευρὰν τὴν EZ . Τὸ πολύγωνον τοῦτο $\Delta EZH \dots$ ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν ἀπὸ τὸ πολύγωνον μὲ πλευρὰν τὴν AB (διατί;) καὶ ἔστω λ'_{2x} τὸ μῆκος ἐκάστης πλευρᾶς του.

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων AIE καὶ BKZ ἔχομεν :

$$AE > IE \text{ καὶ } ZB > ZK. \text{ Τότε εἶναι :}$$

$$AE + EZ + ZB > IE + EZ + ZK \quad \eta$$

$$\lambda'_x > \frac{\lambda'_{2x}}{2} + \lambda'_{2x} + \frac{\lambda'_{2x}}{2} \quad \eta$$

$$(1) \quad \lambda'_x > 2\lambda'_{2x}$$

Ἐὰν τὴν (1) πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ x , λαμβάνομεν :

$$x\lambda'_x > 2x\lambda'_{2x} \quad \eta$$

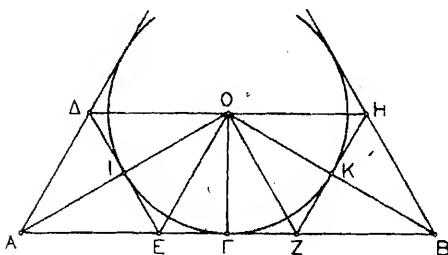
$$(2) \quad P'_x > P'_{2x}$$

Πόρισμα. Ἡ ἀκολουθία

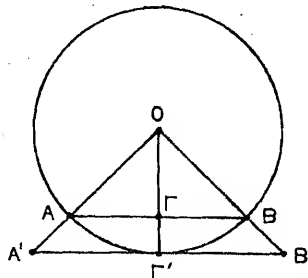
$$(3) \quad P'_x, P'_{2x}, P'_{4x}, \dots, P'_{2^v x}, \dots \mid v = 0, 1, 2, \dots$$

τῶν περιμέτρων τῶν κανονικῶν πολυγώνων, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον (O, R) καὶ ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν τοῦ προηγουμένου του, εἶναι φθίνουσα, ἤτοι :

$$P'_x > P'_{2x} > P'_{4x} > \dots > P'_{2^v x} > \dots \mid v = 0, 1, 2, \dots$$



Σχ. 376



Σχ. 377

374. Θεώρημα. Αἱ περίμετροι δύο μεταβλητῶν κανονικῶν πολυγώνων τοῦ αὐτοῦ πλήθους πλευρῶν, τοῦ ἑνὸς ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ ἄλλου περιγεγραμμένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον (O, R) , τείνουν πρὸς κοινὸν ὄριον, τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν των τείνη πρὸς τὸ ὕπειρον.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν μίαν πλευρὰν $AB = \lambda_n$ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου καὶ ἀντιστοίχως πρὸς αὐτήν, τὴν $A'B' = \lambda'_n$ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου (σχ. 377). Τὰ δύο πολύγωνα, ἐφ' ὅσον

ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν, εἶναι ὁμοια καὶ ἐπομένως $\frac{AB}{A'B'} = \frac{OG}{OG'}$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_v}{\lambda'_v} = \frac{\alpha_v}{R} \Rightarrow \frac{v \cdot \lambda_v}{v \cdot \lambda'_v} = \frac{\alpha_v}{R} \Rightarrow \frac{P_v}{P'_v} = \frac{\alpha_v}{R} \Rightarrow \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{P_v}{P'_v} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\alpha_v}{R} \Rightarrow$$

$$\frac{\lim_{v \rightarrow \infty} P_v}{\lim_{v \rightarrow \infty} P'_v} = \frac{\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v}{R} \Rightarrow \frac{\lim_{v \rightarrow \infty} P_v}{\lim_{v \rightarrow \infty} P'_v} = \frac{R}{R} = 1 \Rightarrow \lim_{v \rightarrow \infty} P_v = \lim_{v \rightarrow \infty} P'_v. \text{ Ἀλλὰ}$$

$\lim_{v \rightarrow \infty} P_v = L$ (§ 372). Ἀρα $\lim_{v \rightarrow \infty} P_v = \lim_{v \rightarrow \infty} P'_v = L$, ὅπου L εἶναι τὸ μῆκος τοῦ κύκλου.

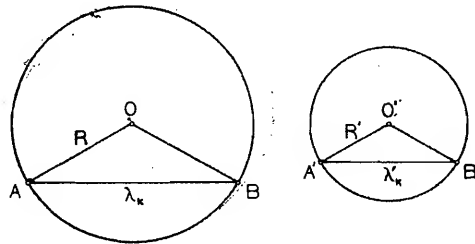
375. Θεώρημα. (Ἰπποκράτους τοῦ Χίου). Ὁ λόγος τῶν μηκῶν δύο κύκλων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν δύο κύκλοι (O, R) καὶ (O', R') . Εἰς αὐτοὺς ἐγγράφομεν ἀνὰ ἓν κανονικὸν πολύγωνον μὲ τὸ αὐτὸ πλῆθος v πλευρῶν (σχ. 378). Τότε τὰ πολύγωνα εἶναι ὁμοια καὶ ὁ λόγος τῶν περιμέτρων τῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότη-

τος αὐτῶν (§ 361). Ἀλλὰ ὁ λόγος ὁμοιότητος $\frac{\lambda_v}{\lambda'_v}$ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων τῶν.

$\frac{R}{R'}$. Ἀρα :

$$(1) \quad \frac{P_v}{P'_v} = \frac{R}{R'}$$



Σχ. 378

Ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων διπλασιαζόμενον συνεχῶς τείνη εἰς τὸ ἄπειρον, τότε, ὡς εἶδομεν, αἱ περιμέτροι τῶν πολυγώνων συγκλίνουν εἰς τὰ μῆκη τῶν κύκλων καὶ ἡ (1) γράφεται :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{P_v}{P'_v} = \frac{R}{R'} \quad \eta$$

$$\frac{\lim_{v \rightarrow \infty} P_v}{\lim_{v \rightarrow \infty} P'_v} = \frac{R}{R'} \quad \eta$$

$$(2) \quad \frac{L}{L'} = \frac{R}{R'}$$

Πόρισμα I. Ὁ λόγος τοῦ μήκους ἑνὸς κύκλου διὰ τῆς διαμέτρου αὐτοῦ εἶναι σταθερὸς ἀριθμὸς.

Πράγματι, η σχέση (2) γράφεται :

$$\frac{L}{R} = \frac{L'}{R'} \quad \text{ή ακόμη}$$

$$(3) \quad \frac{L}{2R} = \frac{L'}{2R'}$$

Έκ της (3) έπεται ότι, έφ' όσον διά δύο τυχόντας κύκλους ό λόγος του μήκους του ένός πρός την διάμετρόν του εύρέθη ίσος πρός τόν λόγον του μήκους του άλλου πρός την διάμετρόν του αντίστοιχως, ό λόγος ούτος δέν μεταβάλλεται, δηλαδή είναι σταθερός.

Ό σταθερός αύτός λόγος συμβολίζεται διεθνώς μέ τό έλληνικόν γράμμα π, δηλαδή

(4)

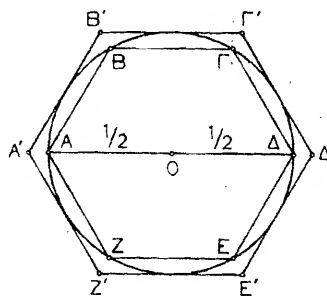
$$\frac{L}{2R} = \pi$$

Πόρισμα II. Τό μήκος ένός κύκλου ίσούται μέ τό γινόμενον της διαμέτρου αυτού επί τόν αριθμόν π.

Πράγματι, έκ της σχέσεως (4), λαμβάνομεν :

$$L = 2\pi R$$

376. Όρισμός. Έν εϋθύγραμμον τμήμα, του οποίου τό μήκος ίσοϋται μέ τό μήκος ένός κύκλου, καλεΐται **ανάπτυγμα** του έν λόγω κύκλου.



Σχ. 379

★ **377. Υπολογισμός του αριθμού π.** Διά νά υπολογίσωμεν τόν αριθμόν π, σκεπτόμεθα, ως ακόλουθως :

Ό τύπος (4) της προηγούμενης παραγράφου δίδει τόν αριθμόν π ως πηλίκον της περιμέτρου L ένός κύκλου πρός την διάμετρον 2R αυτού. Έάν έπομένως έγνωρίζωμεν την περίμετρον L κύκλου γνωστής διαμέτρου, θα ήδυνάμεθα νά υπολογίσωμεν τόν αριθμόν π.

Έξ αυτού άγόμεθα εις τό νά γράψωμεν κύκλον διαμέτρου $2R = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$, όποτε ό τύπος (4) της προηγούμενης παραγράφου δίδει $\pi = L$, ήτοι τό πρόβλημα ανάγεται εις τόν υπολογισμόν του μήκους L της περιμέτρου κύκλου άκτίνας $R = \frac{1}{2}$.

Έάν εις τόν κύκλον έγγράψωμεν και περιγράψωμεν κανονικά πολύγωνα του αυτού πλήθους πλευρών, έστω έξάγωνα (σχ. 379), είναι φανερόν ότι ή περίμετρος L του κύκλου περιέχεται μεταξύ των περιμέτρων των δύο πολυγώνων. Πράγματι, τό έγγεγραμμένον πολύγωνον έχει περίμετρον μικροτέραν της του κύκλου, ως κλειστή κυρτή γραμμή περι-κλειομένη υπό άλλης (του κύκλου), επίσης ό κύκλος έχει περίμετρον μικροτέραν της του περιγεγραμμένου πολυγώνου, ως κλειστή κυρτή γραμμή περικλειομένη υπό άλλης (του περιγεγραμμένου πολυγώνου). Η πλευρά του έγγεγραμμένου έξαγώνου είναι $\lambda_6 = R = \frac{1}{2}$ και έπομένως ή περίμετρος του είναι $P_6 = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$. Η πλευρά του περιγε-γραμμένου έξαγώνου υπολογίζεται τη βοήθεια του τύπου (2) της παραγράφου 364 προσεγ-γιστικώς εις τόν αριθμόν 0,57735 και έπομένως ή περίμετρος αυτού είναι $P'_6 = 6 \cdot 0,57735$

$= 3,4641$. Ήδη εύρεθη μία πρώτη προσέγγισις διὰ τὸν ἀριθμὸν π, εἶναι $\pi = 3$, διότι $P_6 < \pi < P'_6 \Rightarrow 3 < \pi < 3,4641$.

Διὰ διπλασιασμοῦ τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τῶν ἑξαγώνων μεταβαίνομεν εἰς δωδεκάγωνα, ἐν συνεχείᾳ εἰς 24 - γωνὰ κ.ο.κ. δυνάμενοι νὰ ὑπολογίζωμεν πάντοτε τὰς πλευρὰς τῶν ἐκάστοτε κανονικῶν πολυγώνων τῇ βοήθειᾳ τῶν τύπων τῶν παραγράφων 363 καὶ 364. Τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων συνεχιζομένου, τὰ ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα κανονικὰ πολύγωνα τείνουν νὰ ταυτισθοῦν μετὰ τοῦ κύκλου, δημιουργουμένων διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ δύο συγκλινουσῶν πρὸς τὸν ἀριθμὸν π ἀκολουθιῶν περιμέτρων :

$P_6 < P_{12} < P_{24} < \dots < \pi < \dots < P'_{24} < P'_{12} < P'_6$ περιοριζομένου τοῦ ἀριθμοῦ π συνεχῶς εἰς στενώτερα ἀριθμητικὰ πλαίσια.

Εὐνόητον εἶναι ὅτι, ὅσον περισσότερους ὅρους τῶν προηγουμένων ἀκολουθιῶν ὑπολογίσωμεν, τόσον μεγαλύτεραν προσέγγισιν διὰ τὸν ἀριθμὸν π θὰ λάβωμεν. Ἄς σημειωθῇ ὅτι οἱ τοιοῦτοι εἶδους ὑπολογισμοί, πρὸ τῆς ἀνακαλύψεως τῶν ἡλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν, ἦσαν δυσχερέστατοι καὶ ἀπασχόλησαν ἐπὶ σειρὰν ἐτῶν τοὺς μαθηματικοὺς διαφόρων ἐποχῶν.

Κατωτέρω δίδομεν πίνακα τῶν περιμέτρων ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων εἰς κύκλον διαμέτρου $2R = 1$.

n	P	P'
6	3	3,46410
12	3,10582	3,21540
24	3,13262	3,15967
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14145	3,14188
384	3,14155	3,14166

Ὁ ἀριθμὸς π περιέχεται πάντοτε μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν τῶν δύο στηλῶν P καὶ P' . Τὰ ἀκριβῆ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ π εἶναι προφανῶς τὰ κοινὰ ψηφία τῶν δύο προσεγγίσεων. Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω πίνακα προκύπτει ὅτι $3,14155 < \pi < 3,14166$, ἥτοι εἶναι $\pi = 3,141\dots$

Ὁ ἀριθμὸς π εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμὸς καὶ μάλιστα ὑπερβατικὸς ἀριθμὸς, ὡς ἀπέδειξε τὸ 1882 ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Lindemann, δηλαδὴ ὅχι μόνον δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ ἀριθμητικοῦ τινος κλάσματος, ἀλλὰ δὲν δύναται νὰ εἶναι ρίζα ἐξισώσεως $\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$ μὲ ἀκεραίους συντελεστὰς. Ἐξ αὐτοῦ ἀπεδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατόν νὰ κατασκευασθῇ διὰ τοῦ κανόνα καὶ τοῦ διαβήτου εὐθύγραμμον τμήμα, ἔχον μῆκος ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν π, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δίδει ὀριστικῶς ἀρνητικὴν ἀπάντησιν εἰς τὴν λύσιν τοῦ ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων τεθέντος προβλήματος τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, ἥτοι τῆς κατασκευῆς εὐθυγράμμου τμήματος, τοῦ ὁποῦ τοῦ τετράγωνον ἴσούται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν κύκλου γνωστῆς ἀκτίνος.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Ἱπποκράτους φαίνεται ὅτι ἦτο γνωστὸς ὁ ἀριθμὸς π ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, εἰκάζετο δὲ ὅτι ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ ἀριθμητικοῦ τινος κλάσματος. Ὁ Ἀρχιμήδης (287 - 212 π.Χ.) ἔδωκε τὴν προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ ἀριθμοῦ $\pi = \frac{22}{7} \simeq 3,1428$ διαφέρουσαν περίπου κατὰ $\frac{1}{1000}$ ἀπὸ τὴν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ ἀριθμοῦ π.

Συνήθως διὰ τὸν ἀριθμὸν π χρησιμοποιοῦνται αἱ προσεγγίσεις αὐτοῦ

3,14,

3,1416,

3,14159,

αναλόγως της ακριβείας της απαιτούμενης διά τὸ ἐκάστοτε πρόβλημα. Ἀξίζει νὰ σημειωθῇ ὅτι τὰ ψηφία τῆς τελευταίας τῶν ἀνωτέρω προσεγγίσεων, ἡ ὁποία εἶναι γνωστὴ ἀπὸ τὰ μέσα τοῦ 16ου αἰῶνος περίπου, συμφωνοῦν μὲ τὸ πλῆθος τῶν γραμμάτων τῶν λέξεων τῆς φράσεως :

Ἀεὶ ὁ Θεὸς ὁ μέγας γεωμετεῖ
3 1 4 1 5 9

Σήμερον, διὰ τὰς ἀνάγκας τῆς ἀστροναυτικῆς, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖ ἀκριβεστάτους ὑπολογισμούς, ἔχει ἐπιτευχθῇ δι' ἡλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ προσέγγις τοῦ ἀριθμοῦ π μὲ 10000 δεκαδικὰ ψηφία.

Δίδομεν προσέγγισιν τοῦ ἀριθμοῦ π μὲ 15 δεκαδικὰ ψηφία :

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\dots$$

ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΞΟΥ

378. Ὁρισμός. Μήκος ἡ ἀνάπτυγμα κυκλικοῦ τόξου μὲ ἄκρα τὰ σημεῖα A καὶ B καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ μήκος κανονικῆς κυρτῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς μὲ τὰ αὐτὰ ἄκρα A καὶ B ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ ἐν λόγῳ τόξον, ὅταν τὸ πλῆθος n τῶν πλευρῶν τῆς αὐξανόμενον ἀπεριορίστως τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.

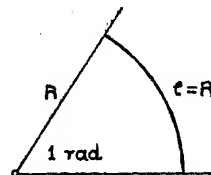
379. Ὑπολογισμὸς τοῦ μήκους κυκλικοῦ τόξου. Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὰ γεωμετρικὰ μεγέθη «τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου» καὶ «ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνία» ἀποτελοῦν ἀναλογίαν. Ἄν ἐπομένως καλέσωμεν l τὸ μήκος κυκλικοῦ τόξου, τοῦ ὁποῖου ἡ ἐπίκεντρος γωνία, μετρουμένη εἰς μοίρας, εἶναι μ^0 , θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν :

$$(1) \quad \frac{l}{L} = \frac{\mu^0}{360^0}$$

ὅπου L εἶναι τὸ μήκος τοῦ κύκλου (O, R), εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει τὸ τόξον.

Τότε ἐκ τῆς σχέσεως (1) καὶ γνωστοῦ ὄντος ὅτι $L = 2\pi R$, λαμβάνομεν :

$$(2) \quad l = \frac{2\pi R \cdot \mu}{360}$$



Σχ. 380

380. Ἀκτίνιον (rad ἐκ τοῦ $\text{radian} = \text{ἀκτίνιον}$). Ἐν κυκλικὸν τόξον καλεῖται τόξον ἑνὸς ἀκτινίου (ἢ ἀκτίνιον τόξον) ὅταν τὸ ἀνάπτυγμά του (τὸ μήκος του) εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει. Ἀντιστοίχως ἡ ἐπίκεντρος γωνία του, καλεῖται γωνία ἑνὸς ἀκτινίου. Κατὰ ταῦτα, ἐν πλήρῃς τόξον (τόξον 360^0) ἔχει $\frac{L}{R} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ ἀκτίνια. Ἀντιστοίχως, ἡ ἐπίκεντρος γωνία του, ἥτοι ἡ γωνία τῶν 360^0 , ἔχει 2π ἀκτίνια.

Ἡ γωνία ἑνὸς ἀκτινίου περιέχεται μεταξύ τῶν 57^0 καὶ 58^0 . Μία προσέγγις αὐτῆς εἶναι :

$$1 \text{ rad} = 57^0\ 17'\ 44'', 3$$

*Αν $\hat{\omega}$ ἐπίκεντρος γωνία τόξου l , μετρουμένη εἰς ἀκτίνια, εἶναι ω , ὁ τύπος (2) γράφεται :

$$l = \frac{2\pi R \cdot \omega}{2\pi} = \omega \cdot R \quad \eta \quad l = \omega \cdot R$$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ

381. Συμφώνως πρὸς τὰ προηγούμενα, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου (O, R) τείνει νὰ καλυφθῇ ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν μεταβλητοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτόν, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν του, διπλασιαζόμενον συνεχῶς, τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον. *Αν E_λ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυρτοῦ πολυγώνου μὲ λ πλευράς, γνωρίζομεν (§ 359) ὅτι εἶναι

$$E_\lambda = \frac{P_\lambda \cdot \alpha_\lambda}{2}. \quad \text{Τότε δημιουργοῦμεν τὴν ἀκολουθίαν τῶν ἐμβαδῶν}$$

$$(1) \quad E_\kappa, E_{2\kappa}, E_{2^2\kappa}, \dots, E_{2^v\kappa}, \dots \mid v = 0, 1, 2, \dots$$

*Εὰν ἡ ἀκολουθία (1) συγκλίνει, τότε θὰ ὑπάρχῃ τὸ ἐμβαδὸν E τοῦ κύκλου καὶ θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὅριον τῆς ἀκολουθίας (1). *Ἀλλὰ ἡ ἀκολουθία (1) συγκλίνει, διότι (§ 372):

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} E_{2^v\kappa} &= \lim_{v \rightarrow \infty} \left[\frac{P_{2^v\kappa} \cdot \alpha_{2^v\kappa}}{2} \right] = \frac{1}{2} \lim_{v \rightarrow \infty} P_{2^v\kappa} \cdot \lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_{2^v\kappa} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot R \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2. \quad \text{*Αρα} \end{aligned}$$

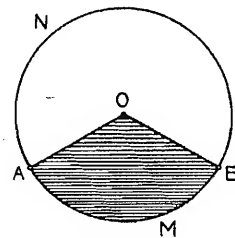
$$(2) \quad E = \pi R^2$$

*Αν $d = 2R$ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, τότε ὁ τύπος (2) γράφεται :

$$(3) \quad E = \frac{\pi d^2}{4}$$

382. Κυκλικὸς τομεύς. *Εστω κύκλος (O, R) , \widehat{AMB} ἓν τόξον αὐτοῦ καὶ OA, OB αἱ δύο ἀκραιῖαι ἀκτῖνες τοῦ τόξου (σχ. 381). Τὸ κλειστὸν ἐπίπεδον τμήμα, τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ἀπὸ τὸ ἐν λόγω τόξον καὶ ἀπὸ τὰς δύο ἀκραιῖαι ἀκτῖνας του καλεῖται **κυκλικὸς τομεύς**. *Ἡ ἐπίκεντρος γωνία \widehat{AOB} τοῦ τόξου καλεῖται καὶ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέως.

*Ὁ κύκλος (O, R) μετὰ τοῦ ἐσωτερικοῦ του δύναται νὰ θεωρηθῇ κυκλικὸς τομεύς, τοῦ ὁποῖου ἡ ἐπίκεντρος γωνία εἶναι πλήρης γωνία, ἥτοι γωνία 360° . Τοῦτον θὰ τὸν λέγωμεν καὶ πλήρη κυκλικὸν τομέα.



Σχ. 381

383. *Εμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως. Δύναται εὐκόλως νὰ διαπιστωθῇ

ὅτι τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα «κυκλικοὶ τομεῖς τοῦ αὐτοῦ κύκλου» καὶ «ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνίαι» ἀποτελοῦν ἀναλογίαν (διὰ τί ;).

Κατόπιν τούτου, ἐὰν $E_{κ.τ.}$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, τοῦ ὁποῖου ἡ ἐπίκεντρος γωνία, μετρουμένη εἰς μοίρας, εἶναι μ° , καὶ $E = \pi R^2$ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει, ἔχομεν

$$\frac{E_{κ.τ.}}{\pi R^2} = \frac{\mu^\circ}{360^\circ} \quad \eta$$

$$(1) \quad E_{κ.τ.} = \frac{\pi R^2 \cdot \mu}{360}$$

Μετασχηματισμὸς τοῦ τύπου (1). Ἐὰν ἡ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέως, μετρουμένη εἰς ἀκτίνια, εἶναι ω , τότε ὁ τύπος (1) γράφεται :

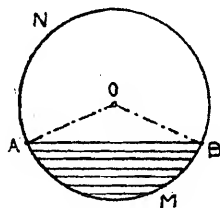
$$E_{κ.τ.} = \frac{\pi R^2 \cdot \omega}{2\pi} = \frac{1}{2} R^2 \omega = \frac{1}{2} R \omega \cdot R = \frac{1}{2} l \cdot R \quad \eta$$

$$E_{κ.τ.} = \frac{1}{2} l R$$

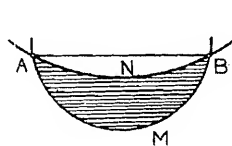
ὅπου l εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τόξου τοῦ (§ 380).

384. Κυκλικὸν τμήμα. Ἐστω κύκλος (O, R) καὶ AB μία χορδὴ αὐτοῦ (σχ. 382). Διὰ τῆς χορδῆς AB ὁ κύκλος χωρίζεται εἰς δύο κλειστὰ τμήματα $ABMA$ καὶ $ABNA$, ἑκαστον τῶν ὁποίων καλεῖται **κυκλικὸν τμήμα**. Εἰς ἑκαστον τούτων ἀντιστοιχεῖ μία ἐπίκεντρος γωνία \widehat{AOB} , ἡ ὁποία διὰ τὸ πρῶτον μὲν εἶναι κυρτή, διὰ τὸ δεύτερον δὲ εἶναι μὴ κυρτή.

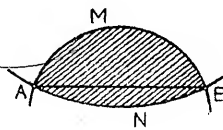
Τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τμήματος ὑπολογίζεται ἐκ τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ἀντι-



Σχ. 382



Σχ. 383 α



Σχ. 383 β

στοίχου εἰς αὐτὸ κυκλικοῦ τομέως καὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $\triangle AOB$, ὡς ἑξῆς :

- i) Ἐὰν $\widehat{AOB} < 2\ell$, τότε :
 $(ABMA) = (AOBMA) - (AOB).$
- ii) Ἐὰν $\widehat{AOB} > 2\ell$, τότε :
 $(ABNA) = (AOBNA) + (AOB)$

385. Μηνίσκος. Τὸ κλειστὸν ἐπίπεδον τμήμα, ποὺ ὀρίζουν δύο κυκλικά τόξα (ἔχι τοῦ αὐτοῦ κύκλου) μὲ κοινὰ ἄκρα A καὶ B καλεῖται **μηνίσκος**.

Εάν η κοινή χορδή AB κείται εκτός του μηνίσκου, το έμβαδόν του είναι ίσον με την διαφοράν των έμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων AMB και ANB (σχ. 383α), ενώ, εάν η κοινή χορδή κείται εντός του μηνίσκου, το έμβαδόν του είναι ίσον με το άθροισμα των έμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων AMB και ANB (σχ. 383β).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A.

660. Να εύρεθῇ τὸ μήκος τοῦ κύκλου, ὃ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα 8 m.
661. Αὐτοκινήτου οἱ τροχοὶ ἔχουν ἀκτῖνα 0,35 m καὶ ἔκαμαν 1800 στροφάς. Πόσην ἀπόστασιν διήνυσεν τὸ αὐτοκίνητον ;
662. Κυκλικὸς στίβος ἔχει μήκος 400 m. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίς αὐτοῦ ;
663. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τὰ διαδοχικὰ τμήματα AB, ΒΓ καὶ ΓΔ καὶ γράφομεν ἡμικύκλια μὲ διαμέτρους τὰς AB, ΒΓ καὶ ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ μήκος τοῦ ἡμικυκλίου διαμέτρου ΑΔ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν τριῶν ἄλλων ἡμικυκλίων.
664. Νὰ εύρεθῇ τὸ μήκος τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κανονικὸν ἐξάγωνον πλευρᾶς 5 cm.
665. Εἰς κύκλον ἀκτίνος 6 cm ἐγγράφομεν τετράγωνον καὶ εἰς τὸ τετράγωνον ἐγγράφομεν νέον κύκλον. Νὰ εύρεθῇ ἡ ἀκτίς καὶ τὸ μήκος τοῦ νέου αὐτοῦ κύκλου.
666. Νὰ εύρεθῇ τὸ μήκος τοῦ τόξου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς πλευρὰν ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἐξαγώνου εἰς κύκλον ἀκτίνος 4 m.
667. Ὁμοίως τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς πλευρὰν τετραγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτίνος 10 m.
668. Εἰς κύκλον, τὸξον 40° ἔχει μήκος 15m. Νὰ εύρεθῇ ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου.
669. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν 3 τόξα, περατούμενα εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸ μήκος τοῦ κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα $\frac{\alpha}{2}$.
670. Νὰ εύρεθῇ τὸ έμβαδὸν κύκλου ἀκτίνος 5 cm.
671. Νὰ εύρεθῇ τὸ έμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τετράγωνον πλευρᾶς α.
672. Εἰς κύκλον ἄγομεν τὴν διάμετρον AB καὶ τὰς χορδὰς ΑΓ καὶ ΒΓ. Ἄν τὸ μήκος τῶν χορδῶν εἶναι 12 m καὶ 5 m ἀντιστοίχως, νὰ εύρεθῇ τὸ έμβαδὸν τοῦ κύκλου.
673. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ έμβαδὸν κυκλικοῦ δακτυλίου (ἤτοι τὸ έμβαδὸν τοῦ μέρους, ποῦ περιέχεται μεταξὺ δύο ὁμοκέντρων κύκλων) ἰσοῦται μὲ τὸ έμβαδὸν κύκλου, ὃ ὁποῖος ἔχει διάμετρον τὴν χορδὴν τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου, ἡ ὁποία εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ μικροτέρου.
674. Εἰς κύκλον ἀκτίνος α εἶναι ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἐξάγωνον. Νὰ εύρεθῇ τὸ έμβαδὸν τοῦ μέρους τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον εὕρεσκαται ἐκτὸς τοῦ ἐξαγώνου.
675. Νὰ εύρεθῇ τὸ έμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 120° εἰς κύκλον ἀκτίνος α.
676. Κυκλικὸς τομεὺς 45° ἔχει έμβαδὸν πa^2 . Νὰ εύρεθῇ τὸ έμβαδὸν καὶ ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου.

677. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἐκάστου ἐκ τῶν δύο μερῶν, εἰς τὰ ὅποια διαιρεῖται κύκλος ἀκτίνος α ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτόν.

678. Ὁμοίως ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου.

679. Δύο ἴσοι κύκλοι ἀκτίνος ρ ἔχουν διάκεντρον ἴσῃ με $\rho\sqrt{2}$. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κοινοῦ μέρους αὐτῶν.

B.

680. Δοθεὶς κύκλος νὰ διαιρεθῇ εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα μέρη δι' ὁμοκέντρων κύκλων.

681. Δοθεὶς κύκλος νὰ διαιρεθῇ δι' ὁμοκέντρων κύκλων εἰς τρία μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ δοθέντα μήκη λ , μ , ν .

682. Τρεῖς ἴσοι κύκλοι ἀκτίνος R ἐφάπτονται ἀνὰ δύο ἐξωτερικῶς. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους, ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν τριῶν τούτων κύκλων.

683. Τρεῖς ἴσοι κύκλοι ἀκτίνος R ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἀνὰ δύο. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, ποὺ ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς αὐτῶν καὶ τοῦ κύκλου ποὺ ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς αὐτῶν.

684. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α . Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς του καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν ἀνὰ ἓν τόξον περατούμενον εἰς τὰς δύο ἄλλας κορυφὰς του. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου κομπυλογράμμου τριγώνου.

685. Δίδεται τετράγωνον $AB\Gamma\Delta$ πλευρᾶς α . Μὲ κορυφὰς τὰς A καὶ Γ καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν δύο τεταρτοκύκλια ἐντὸς τοῦ τετραγώνου. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένου μέρους.

686. Μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτους. Ὁρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἡμικύκλιον. Μὲ διαμέτρους τὰς καθέτους πλευρᾶς AB καὶ $A\Gamma$ γράφομεν ἡμικύκλια πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο σχηματιζομένων μηνίσκων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

687. Δίδεται τετράγωνον πλευρᾶς 2α . Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς του καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν τεταρτοκύκλια ἐντὸς αὐτοῦ. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου καμπυλογράμμου σταυροῦ.

688. Δίδεται τετράγωνον πλευρᾶς 2α . Μὲ διαμέτρους τὰς πλευρᾶς του γράφομεν ἡμικύκλια ἐντὸς τοῦ τετραγώνου. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου καμπυλογράμμου σταυροῦ.

689. Δίδεται κύκλος (K, R) . Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτόν ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἀκτῖνα R γράφομεν τρία τόξα περατούμενα εἰς τὸν κύκλον. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου καμπυλογράμμου τριφύλλου.

690. Εἰς κύκλον K ἀκτίνος R φέρομεν δύο διαμέτρους AKB καὶ $\Gamma K\Delta$ καθέτους μεταξύ των. Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα ΓA γράφομεν τὸ τόξον $\widehat{A\Gamma B}$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μηνίσκου $A\Delta B E A$ εἶναι ἰσοδύναμον μετὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $\Gamma A B$.

691. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α . Γράφομεν ἀνὰ ἓν τόξον, διερχόμενον διὰ τῶν δύο κορυφῶν του καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ τριγώνου. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου τριφύλλου.

692. Δίδεται τεταρτοκύκλιον KAB ἀκτίνος R . Μὲ κέντρον τὸ A καὶ ἀκτῖνα R γράφομεν τόξον, τὸ ὅποιον τέμνει τὸ τόξον \widehat{AB} εἰς τὸ Γ . Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικτογράμμου σχήματος $KB\Gamma$.

693. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου AKB . Ἐπὶ τῆς διαμέτρου AB λαμβάνομεν τυχόν σημεῖον Γ καὶ μετὰ διαμέτρους τὰς $A\Gamma$ καὶ $B\Gamma$ γράφομεν ἀνὰ ἓνα κύκλον ἐντὸς τοῦ ἡμικυκλίου, φέρομεν δὲ ἐκ τοῦ Γ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν AB , τέμνουσαν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ

Δ. Νά αποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν τριῶν ἡμικυκλίων ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἔχοντος διάμετρον τὴν ΓΔ.

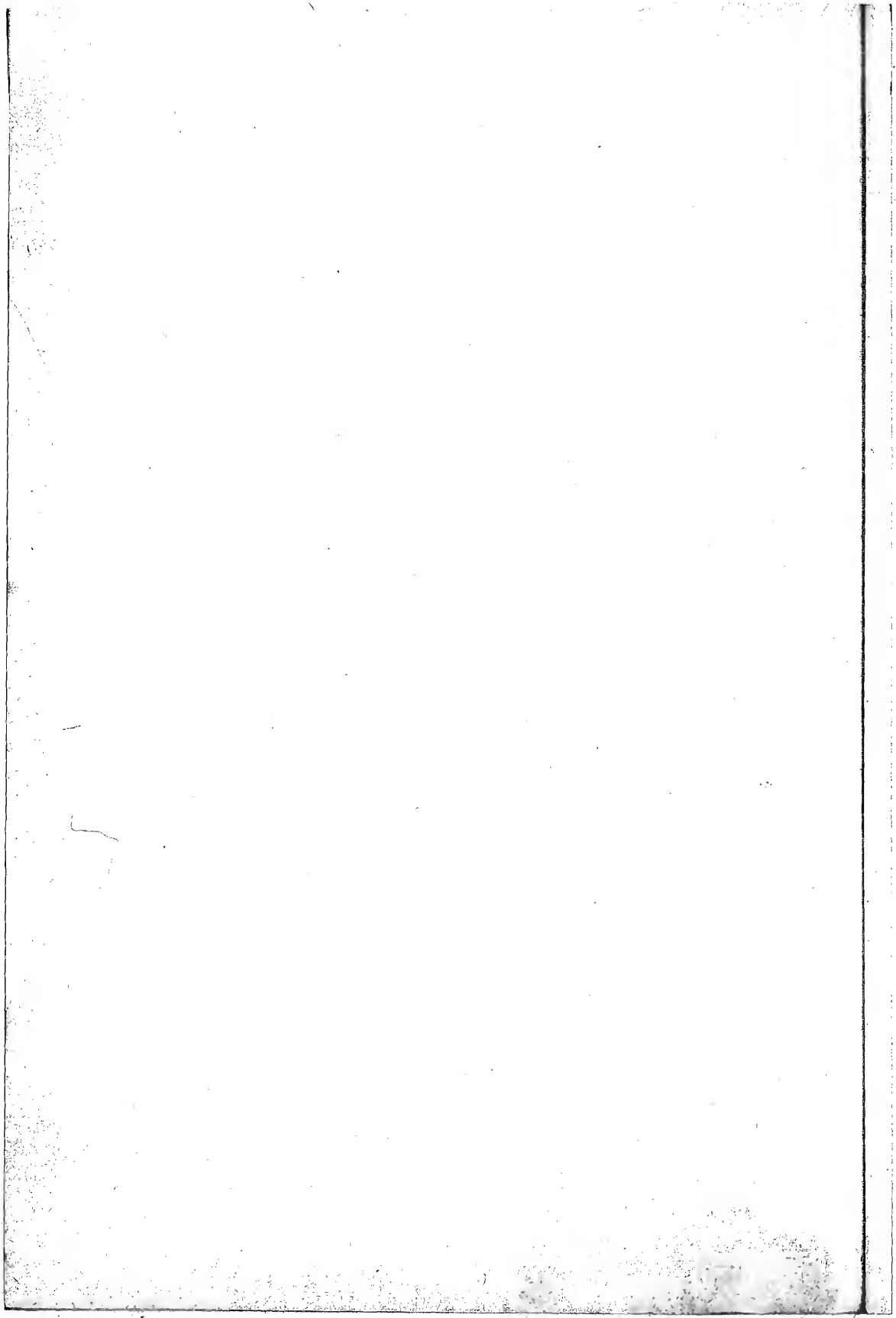
694. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς δοθέντος τετραγώνου πλευρᾶς α καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν τεταρτοκύκλια ἐντὸς τοῦ τετραγώνου. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου ὑπ' αὐτῶν καμπυλογράμμου τετραγώνου.

695. Δύο κύκλοι ἀκτίνων ρ καὶ 3ρ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἄγομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην αὐτῶν ΒΓ. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους, ποῦ περιλαμβάνεται μεταξύ τῆς ΒΓ καὶ τῶν δύο κύκλων.

696. Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν τρία τμήματα $AB = BG = GA = \alpha$ καὶ μὲ κέντρα τὸ Β καὶ Γ καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν κύκλους; οἱ ὅποιοι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Μὲ κέντρα τὰ Ε καὶ Ζ καὶ ἀκτῖνα 2α γράφομεν τόξα, τὰ ὁποῖα καταλήγουν εἰς τοὺς κύκλους τούτους. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου ὠσειδοῦς σχήματος.

697. Δίδεται τεταρτοκύκλιον ΚΑΒ κέντρου Κ. Μὲ διαμέτρους τὰς ἀκτῖνας ΚΑ καὶ ΚΒ γράφομεν ἀνὰ ἓν ἡμικύκλιον κείμενον ἐντὸς τοῦ τεταρτοκυκλίου, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Νά αποδειχθῇ ὅτι: α) Τὰ σημεῖα Α, Γ, Β κεῖνται ἐπ' εὐθείας, β) τὸ καμπυλόγραμμον σχῆμα ΚΓ, ποῦ περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν δύο τούτων ἡμικυκλίων, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο κυκλικῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουν χορδὰς τὰς ΑΓ καὶ ΒΓ καὶ γ) νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου σχήματος ποῦ περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν τόξων \widehat{AB} , \widehat{AG} , καὶ \widehat{BG} .

698. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς δοθέντος τετραγώνου πλευρᾶς α καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν τέσσαρας κύκλους. α) Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κοινοῦ ἐσωτερικοῦ τμήματος τῶν τεσσάρων κύκλων. β) Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὅλου σχήματος.



ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

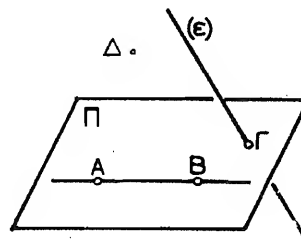
ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

386. **Ἐπίπεδον.** Ἡ ἔννοια τοῦ ἐπιπέδου ἢ ἐπιπέδου ἐπιφανείας εἶναι ἤδη γνωστὴ ἀπὸ τὴν ἐπιπεδομετρίαν, ὡς πρωταρχικὴ ἔννοια. Ἡ ἐπιφάνεια ἡρεμοῦντος ὕδατος (περιορισμένων διαστάσεων) δύναται νὰ δώσῃ τὴν εἰκόνα μέρους ἐπιπέδου ἐπιφανείας, χωρὶς ὅμως τοῦτο νὰ ἀποτελῇ καὶ ὁρισμὸν τοῦ ἐπιπέδου.

387. **Ἀξιώματα τοῦ ἐπιπέδου.** **Ἀξίωμα I.** Ἐν ἐπίπεδον περιέχει τοῦλάχιστον τρία σημεῖα A, B, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ὑπάρχει δὲ ἓν τοῦλάχιστον σημεῖον Δ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 384).

Ἀξίωμα II. Διὰ τριῶν σημείων, μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας, ἓν καὶ μόνον ἓν ἐπίπεδον διέρχεται.

Ἀξίωμα III. Ἐὰν A καὶ B εἶναι δύο διακεκριμένα σημεῖα ἐνὸς ἐπιπέδου (Π), ἡ εὐθεῖα AB εἶναι εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π) (σχ. 384).



Σχ. 384

Πόρισμα. Μία εὐθεῖα (ε), μὴ ἀνήκουσα εἰς ἐπίπεδον (Π), δύναται νὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον (Π) μόνον εἰς ἓν σημεῖον Γ. Τὸ Γ καλεῖται ἵχνος τῆς εὐθείας (ε) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) (σχ. 384).

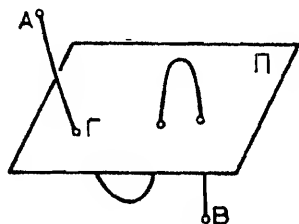
Ἀξίωμα IV. Ἐάν A καὶ B εἶναι δύο σημεῖα τοῦ χώρου, ἑκατέρωθεν ἐπιπέδου (Π) , τότε πᾶσα γραμμὴ διερχομένη διὰ τῶν A καὶ B ἔχει ἐν τοῦλάχιστον κοινὸν σημεῖον Γ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 385).

Ἀξίωμα V. Ἐν ἐπίπεδον ἐκτείνεται ἀπεριόριστως.

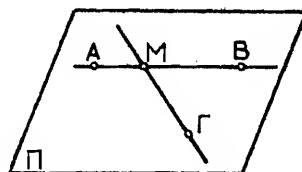
388 Θεώρημα. Ἐν ἐπίπεδον περιέχει ἀπείρους εὐθείας.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ἐπίπεδον (Π) καὶ τρία σημεῖα A, B καὶ Γ αὐτοῦ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας (σχ. 386). Θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν AB , ἥ ὅποια ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) (ἄξίωμα III). Ἐστω τυχὸν σημεῖον M τῆς εὐθείας $AB \Rightarrow M \in (\Pi)$ καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ εὐθεῖα ΓM ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) .

Τὸ σημεῖον M , ὡς δυνάμενον νὰ διατρέχῃ τὴν εὐθεῖαν AB , δίδει ἀπείρους εὐθείας ΓM , αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) . Ἀρα τὸ ἐπίπεδον (Π) περιέχει ἀπείρους εὐθείας.



Σχ. 385



Σχ. 386

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα (§ 388), ἔπεται ὅτι, ἐάν μία εὐθεῖα ΓM κινῆται οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Γ νὰ παραμένῃ σταθερὸν καὶ τὸ M νὰ ἀνῆκῃ πάντοτε εἰς εὐθεῖαν AB , ἡ εὐθεῖα ΓM διαγράφει ἐπίπεδον (Π) . Ἐξ αὐτοῦ προκύπτει ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Π) δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ τῆς τοιαύτης κινήσεως τῆς εὐθείας ΓM , διὰ τοῦτο καὶ καλεῖται **εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια**. Ἡ εὐθεῖα AB καλεῖται **ὁδηγὸς** διὰ τὴν κίνησιν τῆς εὐθείας ΓM , ἐνῶ τὸ σημεῖον Γ καλεῖται **πόλος**.

Κάθε εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια, ἥτοι κάθε ἐπιφάνεια διαγραφομένη ἀπὸ τὴν τυχούσαν κίνησιν κάποιας εὐθείας, ἐν γένει δὲν εἶναι ἐπίπεδον (κυματοειδὴς ἐπιφάνεια κ.ἄ.).

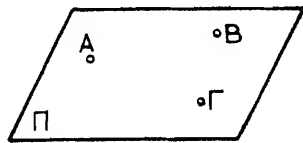
389 Καθορισμὸς ἐπιπέδου. Τρία σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, καθορίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς καὶ μόνου ἐπιπέδου.

Δεχόμεθα ὅτι τρία σημεῖα A, B καὶ Γ , μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, εἶναι ἱκανά, διὰ νὰ καθορίσουν τὸ μοναδικὸν ἐπίπεδον (Π) (σχ. 387) τὸ ὁποῖον διέρχεται δι' αὐτῶν (ἄξίωμα II).

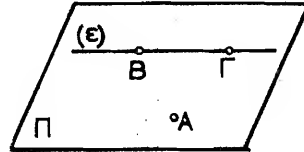
Πόρισμα. Ἐάν δύο ἐπίπεδα ἔχουν τρία κοινὰ σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, συμπίπτουν.

390. Μία εὐθεῖα καὶ ἓν σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς καθορίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς μόνου ἐπιπέδου.

Πράγματι, ἔστω εὐθεΐα (ε) καὶ σημεῖον A ἐκτὸς αὐτῆς. Λαμβάνομεν δύο τυχόντα σημεῖα B καὶ Γ τῆς εὐθείας (ε) . Τὰ τρία σημεῖα A, B καὶ Γ καθορίζουν ἓν ἐπίπεδον (Π) (σχ. 388), εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκουν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ σημεῖον A , ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ εὐθεΐα (ε) , ὡς ἔχουσα δύο σημεῖα τῆς B καὶ Γ ἐπὶ τοῦ (Π) . Δυνάμεθα ἐπομένως νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Π) ὁρίζεται ἀπὸ τὴν εὐθεΐαν (ε) καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον A .



Σχ. 387

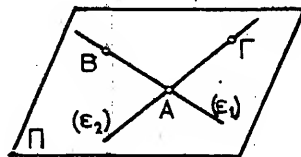


Σχ. 388

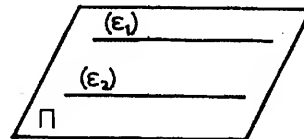
Πόρισμα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἔχουν μίαν κοινήν εὐθεΐαν καὶ ἓν κοινὸν σημεῖον ἐκτὸς τῆς εὐθείας, συμπίπτουν.

391. Δύο τεμνόμεναι εὐθεΐαι καθορίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς μόνου ἐπιπέδου.

Πράγματι, ἔστωσαν (ε_1) καὶ (ε_2) αἱ δύο τεμνόμεναι εὐθεΐαι καὶ A τὸ κοινὸν σημεῖον των (σχ. 389). Λαμβάνομεν ἀνὰ ἓν σημεῖον B καὶ Γ ἐκάστης



Σχ. 389



Σχ. 390

καὶ θεωροῦμεν τὸ ἐπίπεδον (Π) τὸ διερχόμενον διὰ τῶν τριῶν σημείων A, B καὶ Γ . Εἰς τὸ (Π) ἀνήκουν καὶ αἱ δύο εὐθεΐαι, ἐφ' ὅσον ἐκάστη ἔχει δύο σημεῖα τῆς ἐπὶ τοῦ (Π) (ἀξίωμα III). Δυνάμεθα ἐπομένως νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Π) ἔχει ὁρισθῇ ἀπὸ τὰς δύο τεμνομένης εὐθείας.

392. Δύο παράλληλοι εὐθεΐαι καθορίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς μόνου ἐπιπέδου (σχ. 390).

Τοῦτο ἔπεται ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῶν παραλλήλων εὐθειῶν, ὡς δύο συνεπιπέδων εὐθειῶν χωρὶς κοινὸν σημεῖον.

Πόρισμα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἔχουν δύο κοινὰς εὐθείας (τεμνομένης ἢ παραλλήλους), συμπίπτουν.

393. Ἀνακεφαλαιώσως διὰ τὸν καθορισμὸν ἑνὸς ἐπιπέδου.



Ἐν ἐπίπεδον καθορίζεται πλήρως, καὶ συνεπῶς θὰ θεωρῇται γνωστὸν, εἰς τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

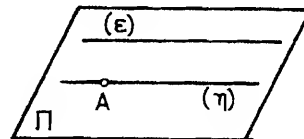
- i) Ὄταν γνωρίζωμεν τρία σημεῖα αὐτοῦ, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας.
- ii) Ὄταν γνωρίζωμεν μίαν εὐθεΐαν καὶ ἓνα σημεῖον αὐτοῦ ἔκτος τῆς εὐθείας κείμενον.
- iii) Ὄταν γνωρίζωμεν δύο τεμνομένας εὐθείας αὐτοῦ.
- iv) Ὄταν γνωρίζωμεν δύο παραλλήλους εὐθείας αὐτοῦ.

Παρατήρησις. Εἰς τὰς ἀνωτέρω τέσσαρας στοιχειώδεις περιπτώσεις, τὸ ἐπίπεδον θὰ θεωρῇται καὶ κατασκευάσιμον. Ἐπίσης μαζὶ μὲ κάθε δεδομένον ἐπίπεδον σχῆμα (π.χ. τρίγωνον, κύκλος, κανονικὸν πολύγωνον κ.ά.) θὰ θεωρῇται ὡς δεδομένον καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ.

Εἰς τὰ σχήματα, ὅπου εἴμεθα ἀναγκασμένοι νὰ ἀπεικονίζωμεν ἓν στερεὸν ἐπὶ τοῦ φύλλου σχεδιάσεως, τὰς περισσοτέρας φορὰς τὰ ἐπίπεδα θὰ τὰ ἀπεικονίζωμεν μὲ ἓν ὀρθογώνιον τμήμα αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον ὁμῶς θὰ σχεδιάζωμεν συνήθως ὡς πλάγιον παραλληλόγραμμον (βλέπε καὶ § 453).

394. Θεώρημα. Ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) θεωροῦμεν εὐθεΐαν (ϵ) καὶ σημεῖον A . Ἐκ τοῦ A φέρομεν εὐθεΐαν $(\eta) // (\epsilon)$. Ἡ εὐθεΐα (η) ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) .

Ἀπόδειξις. Αἱ δύο παράλληλοι εὐθεΐαι (ϵ) καὶ (η) καθορίζουν ἐπίπεδον (σχ. 391). Τοῦτο μετὰ τοῦ ἐπιπέδου (Π) ἔχει κοινὴν τὴν εὐθεΐαν (ϵ) καὶ τὸ σημεῖον A καὶ ἐπομένως συμπίπτει μετὰ τοῦ (Π) (§ 390 πόρ.). Ἄρα ἡ εὐθεΐα (η) ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) .



Σχ. 391

ΕΥΘΕΙΑΙ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ

395. Συνεπίπεδοι εὐθεΐαι ἢ ὁμοεπίπεδοι εὐθεΐαι καλοῦνται δύο διακεκριμένα εὐθεΐαι, ὅταν ὑπάρχῃ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ τὰς περιέχῃ. Τότε αἱ δύο εὐθεΐαι ἢ θὰ τέμνωνται εἰς ἓν σημεῖον ἢ θὰ εἶναι παράλληλοι.

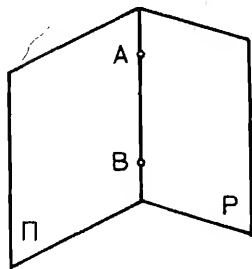
396. Ἀσύμβατοι εὐθεΐαι καλοῦνται δύο μὴ συνεπίπεδοι εὐθεΐαι. Ἀποκλείονται τὰ ἐνδεχόμενα «νὰ τέμνωνται» ἢ «νὰ εἶναι παράλληλοι».

ΕΠΙΠΕΔΑ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ

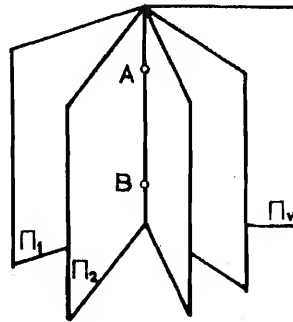
397. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα A καὶ B , τότε ἔχουν καὶ κοινὴν εὐθεΐαν τὴν AB .

Ἀπόδειξις. $A \in (\Pi), B \in (\Pi) \Rightarrow \epsilon\theta. AB \in (\Pi)$. Ἐπίσης $A \in (P), B \in (P) \Rightarrow \epsilon\theta. AB \in (P)$ (σχ. 392). Ἄρα ἡ εὐθεΐα AB εἶναι κοινὴ διὰ τὰ δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) .

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα δύναται νὰ ἐπεκταθῇ διὰ n ἐπίπεδα, ἤτοι :
 Ἐὰν n ἐπίπεδα $(\Pi_1), (\Pi_2), (\Pi_3), \dots, (\Pi_n)$ ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα A καὶ B ,
 τότε ἔχουν καὶ κοινὴν εὐθεῖαν τὴν AB .



Σχ. 392

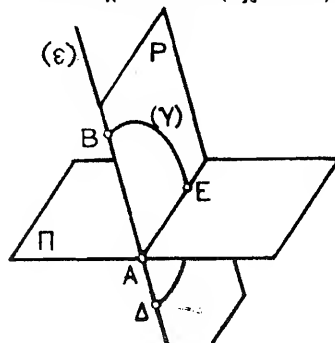


Σχ. 393

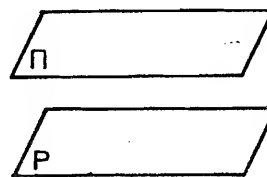
Τὰ n ἐπίπεδα λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ἀξονικὴν δέσμην ἐπιπέδων (σχ. 393), ἐφ' ὅσον εἶναι διακεκριμένα.

398) Θεώρημα. Ἐὰν δύο διακεκριμένα ἐπίπεδα (Π) καὶ $(Ρ)$ ἔχουν ἓνα κοινὸν σημεῖον A , τότε ἔχουν καὶ κοινὴν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου A .

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν εὐθεῖαν (ϵ) τοῦ ἐπιπέδου $(Ρ)$ διερχομένην διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου A (σχ. 394). Ἐπ' αὐτῆς καὶ ἐκατέρωθεν τοῦ A λαμβά-



Σχ. 394



Σχ. 395

νομεν δύο σημεῖα B καὶ Δ καὶ γράφομεν γραμμὴν (γ) (ὄχι εὐθεῖαν), ἀνήκουσαν εἰς τὸ ἐπίπεδον $(Ρ)$, ἥ ὁποία θὰ διέρχεται διὰ τῶν B καὶ Δ . Αὕτη θὰ τμήσῃ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον E (§ 387, IV). Τὸ σημεῖον E ἀνήκει προφανῶς καὶ εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα καὶ συνεπῶς ἡ εὐθεῖα AE εἶναι κοινὴ διὰ τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ $(Ρ)$. Ἀρα ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων ἐν γένει εἶναι εὐθεῖα.

399. Ὅρισμός. Δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ $(Ρ)$ καλοῦνται παράλληλα, ἐὰν ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι τὸ κενὸν σύνολον (σχ. 395).

8

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

699. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ τριῶν σημείων κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, διέρχονται ἄπειρα επίπεδα.

700. Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι τέμνονται ἀνὰ δύο, δείξατε ὅτι ἀνήκουν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἢ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

701. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς κύκλος (O, R) , μὴ κείμενος ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) , τὸ πολὺ δύο κοινὰ σημεία δύναται νὰ ἔχῃ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου (Π) .

702. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δύο ἴσοι καὶ ὁμόκεντροι κύκλοι, μὴ ἀνήκοντες ὁμῶς εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἔχουν μίαν μόνον κοινὴν διάμετρον.

703. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) . Ἐπὶ τῆς (ϵ_1) λαμβάνομεν σημεία A, B καὶ ἐπὶ τῆς (ϵ_2) σημεία Γ, Δ . Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$ εἶναι ἀσύμβατοι.

Β'.

704. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι 10 ἐπίπεδα τέμνονται κατὰ 45 τὸ πολὺ εὐθείας.

705. Νὰ εὐρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν εὐθειῶν, κατὰ τὰς ὁποίας n τὸ πλῆθος ἐπίπεδα τέμνονται ἀνὰ δύο.

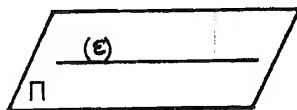
706. Δίδονται σημεῖον A , εὐθεῖα (ϵ) καὶ κύκλος (K, R) ἐν τῷ χώρῳ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ A εὐθεῖα (ζ) , τέμνουσα τὴν εὐθεῖαν (ϵ) καὶ τὸν κύκλον (K, R) .

707. Δίδονται δύο τεμνόμεναι καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα καὶ τὰς τέσσαρας δοθείσας εὐθείας.

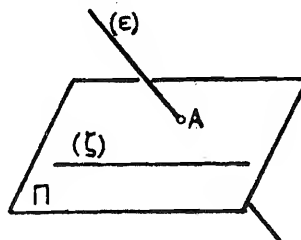
ΕΥΘΕΙΑΙ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ

400. Θέσεις εὐθείας καὶ ἐπιπέδου. Τρεῖς εἶναι αἱ διάφοροι δυναταὶ θέσεις εὐθείας (ϵ) καὶ ἐπιπέδου (Π) εἰς τὸν χώρον :

i) Ἡ εὐθεῖα (ϵ) ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 396).



Σχ. 396



Σχ. 397

ii) Ἡ εὐθεῖα (ϵ) τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον A (σχ. 397). Τὸ A καλεῖται ἴχνος τῆς εὐθείας (ϵ) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) .

Παρατήρησις. Κάθε εὐθεῖα (ζ) τοῦ ἐπιπέδου (Π) , μὴ διερχομένη διὰ τοῦ A , (σχ. 397) εἶναι ἀσύμβατος τῆς εὐθείας (ϵ) (διατί ;).

iii) Ἡ εὐθεῖα (ϵ) εἶναι παράλληλος τοῦ ἐπιπέδου (Π) . Μὲ τὸν ὅρον «παράλληλος» ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα (ϵ) δὲν ἔχει κοινὸν σημεῖον μετὰ τοῦ

ἐπιπέδου (Π) (σχ. 398). Τότε καὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) καλεῖται παράλληλον τῆς εὐθείας (ϵ) .

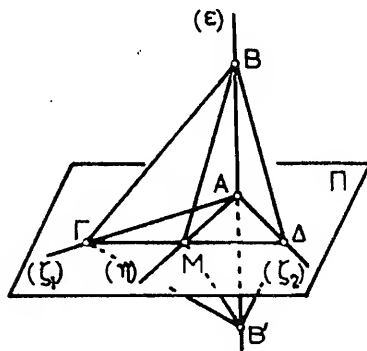
401. Εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον. Ὁρισμός. Μία εὐθεῖα (ϵ) τέμνουσα ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον A αὐτοῦ, καλεῖται κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) , τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν εἶναι κάθετος ἐπὶ ὅλας τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου (Π) τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου A .

402. Θεώρημα. Ἐὰν μία εὐθεῖα (ϵ) , τέμνουσα ἐπίπεδον (Π) εἰς σημείον A , εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου (Π) διερχομένας διὰ τοῦ A , τότε εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) .

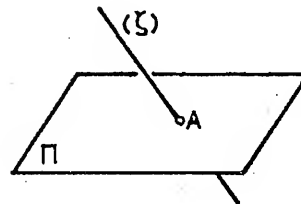
Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι ἡ εὐθεῖα (ϵ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας (ζ_1) καὶ (ζ_2) τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τὸ A (σχ. 399). Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα (ϵ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τυχούσαν εὐθεῖαν (η) τοῦ ἐπιπέδου (Π) , τὴν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου A .

 (ϵ) 

Σχ. 398



Σχ. 399



Σχ. 400

Ἐπὶ τῆς εὐθείας (ϵ) λαμβάνομεν σημεία B καὶ B' τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι $AB = AB'$ καὶ ἐπὶ τῶν (ζ_1) καὶ ζ_2 τυχόντα σημεία Γ καὶ Δ . Τὸ τρίγωνον

$\Gamma BB'$ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ $\Gamma B = \Gamma B'$ (1), διότι ἔχει τὴν ΓA ὡς ὕψος καὶ διάμεσον. Ὁμοίως καὶ τὸ τρίγωνον $\Delta BB'$ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ $\Delta B = \Delta B'$ (2). Τότε, ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2), ἔπεται ὅτι $\text{τριγ. } B\Gamma\Delta = \text{τριγ. } B'\Gamma\Delta$ (ἢ $\Gamma\Delta$ εἶναι κοινή). Ἄρα $\widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{B'\Gamma\Delta}$ (3). Ἐστω M τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ τυχούσα εὐθεῖα (η) τοῦ ἐπιπέδου (Π) , ἡ διερχομένη διὰ τοῦ A , τέμνει τὴν $\Gamma\Delta$. Τριγ. $B\Gamma M = \text{τριγ. } B'\Gamma M$, λόγῳ τῶν σχέσεων (1), (3) καὶ τῆς $\Gamma M = \Gamma M$. Ἄρα $MB = MB'$, ἥτοι τὸ $\text{τριγ. } BMB'$ εἶναι ἰσοσκελὲς. Τοῦτο ἔχει τὴν MA ὡς διάμεσον. Ἐπομένως εἶναι καὶ ὕψος αὐτοῦ, ἥτοι $MA \perp BB' \Rightarrow (\epsilon) \perp (\eta)$. Ἄρα ἡ εὐθεῖα (ϵ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) .

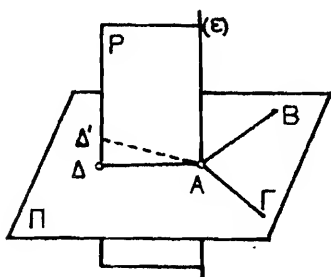
Παρατήρησις. Πᾶσα εὐθεῖα (ζ) τέμνουσα ἐπίπεδον (Π) καὶ μὴ κάθετος πρὸς αὐτό, καλεῖται **πλαγία** ὡς πρὸς τὸ (Π) (σχ. 400).

^{δὴν ὁρίσ.}
403. Θεώρημα. Ἐστω εὐθεῖα (ϵ) καὶ σημεῖον A αὐτῆς. Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ χώρου τῶν καθέτων ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ϵ) εἰς τὸ σημεῖον A ἀποτελεῖ ἐπίπεδον (Π) κάθετον ἐπὶ τὴν (ϵ) εἰς τὸ A .

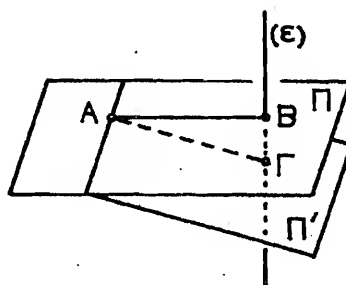
Ἀπόδειξις. Δύο ἐκ τῶν εὐθειῶν τοῦ συνόλου τούτου, αἱ AB καὶ AG , καθορίζουν ἐπίπεδον (Π) , τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ϵ) εἰς τὸ σημεῖον A , διότι $(\epsilon) \perp AB$ καὶ $(\epsilon) \perp AG$ (σχ. 401). Ἐστω ἀκόμη μία εὐθεῖα $AD \perp (\epsilon)$. Ἀρκεῖ νὰ δεθῇ ὅτι $AD \in (\Pi)$.

Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (P) , τὸ ὁποῖον καθορίζεται ἀπὸ τὰς εὐθείας (ϵ) καὶ AD . Αὐτὸ τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) κατ' ἀνάγκην κατὰ τὴν εὐθεῖαν AD . Διότι, ἐὰν ἔτεμνε τὸ (Π) κατ' ἄλλην εὐθεῖαν AD' , θὰ ἦτο $(\epsilon) \perp AD'$, καθ' ὅτι εἶναι $(\epsilon) \perp (\Pi)$. Ἐξ ὑποθέσεως ὁμοῦς ἔχομεν ὅτι $(\epsilon) \perp AD$, ὅπερ ἄτοπον, διότι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (P) θὰ ὑπῆρχον δύο εὐθεῖαι AD καὶ AD' κάθετοι ἐπὶ τὴν (ϵ) , ἄρα $(\Pi) \cap (P) = AD$, ἥτοι ἡ AD ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) .

Πόρισμα. Ἀπὸ σημεῖον A εὐθείας (ϵ) ἔν μόνον κάθετον ἐπίπεδον ὑπάρχει ἐπὶ τὴν (ϵ) .



Σχ. 401



Σχ. 402

404. Θεώρημα. Ἐκ σημείου A ἐκτὸς εὐθείας (ϵ) ἔν καὶ μόνον ἓν ἐπίπεδον διέρχεται κάθετον ἐπὶ τὴν (ϵ) .

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ A φέρομεν $AB \perp (\epsilon)$. Ἡ AB εἶναι μία καὶ μοναδική (διατί ;). Ἐκ τοῦ B θεωροῦμεν τὸ κάθετον ἐπίπεδον (Π) ἐπὶ τὴν (ϵ) (σχ. 402), τὸ ὁποῖον ἀφ' ἑνὸς μὲν εἶναι ἓν καὶ μοναδικόν (§ 403 πόρ.), ἀφ' ἑτέρου δὲ περιέχει τὸ A , διότι $AB \perp (\epsilon)$. Ἄρα ὑπάρχει ἐκ τοῦ A ἓν ἐπίπεδον $(\Pi) \perp (\epsilon)$. Εἶναι καὶ τὸ μοναδικόν διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ A ὑπῆρχε καὶ δεύτερον ἐπίπεδον $(\Pi') \perp (\epsilon)$, αὐτὸ θὰ ἔτεμνε τὴν (ϵ) εἰς σημεῖον (Γ) καὶ θὰ ἦτο $AG \perp (\epsilon)$. Δηλαδή ἐκ τοῦ A θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι αἱ AB καὶ AG , ἐπὶ τὴν (ϵ) , ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα τὸ (Π) εἶναι καὶ μοναδικόν.

Β. ΤΕΤΡΑΜΗΝΟ.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΚΑΘΕΤΩΝ



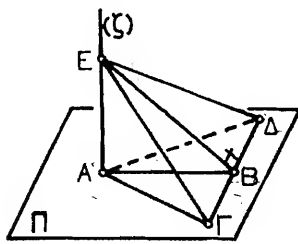
405. Θεώρημα. Εὐθεῖα (ζ) εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον A . Ἀπὸ τὸ ἴχνος τῆς A θεωροῦμεν εὐθεῖαν $AB \perp \Gamma\Delta$, ὅπου ἡ $\Gamma\Delta$ εἶναι εὐθεῖα

τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἐὰν Ε εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας (ζ), τότε εἶναι $EB \perp \Gamma\Delta$. \times

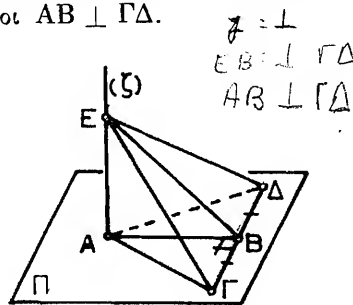
Ἀπόδειξις. Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ τὰ λαμβάνομεν οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $B\Gamma = B\Delta$ (σχ. 403). Τότε τὸ τρίγωνον $\Delta\Gamma\Delta$ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἔχει τὴν AB ὡς ὕψος καὶ διάμεσον $\Rightarrow A\Gamma = A\Delta$. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $EA\Gamma$ καὶ $EA\Delta$, ($EA \perp (\Pi)$), ὡς ἔχοντα τὴν AE κοινὴν καὶ $A\Gamma = A\Delta$, εἶναι ἴσα $\Rightarrow E\Gamma = E\Delta$, ἥτοι τὸ τρίγωνον $E\Gamma\Delta$ εἶναι ἰσοσκελές. Αὐτὸ ἔχει τὴν EB ὡς διάμεσον. Ἀρα εἶναι καὶ ὕψος του $\Rightarrow EB \perp \Gamma\Delta$.

406 Θεώρημα. Εὐθεῖα (ζ) εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Α. Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ε τῆς (ζ) φέρωμεν κάθετον EB ἐπὶ τυχούσαν εὐθεῖαν $\Gamma\Delta$ τοῦ ἐπιπέδου (Π), τότε ἡ AB εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $\Gamma\Delta$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ληφθοῦν οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $B\Gamma = B\Delta$ (σχ. 404), τὸ τρίγωνον $E\Gamma\Delta$ εἶναι ἰσοσκελές, μὲ $E\Gamma = E\Delta$, διότι ἔχει τὴν EB ὡς ὕψος καὶ διάμεσον. Τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $EA\Gamma$ καὶ $EA\Delta$ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν EA κοινὴν καὶ $E\Gamma = E\Delta$. Ἀρα εἶναι καὶ $A\Gamma = A\Delta$, ἥτοι τὸ τρίγωνον $\Delta\Gamma\Delta$ εἶναι ἰσοσκελές. Τοῦτο ἔχει τὴν AB ὡς διάμεσον. Ἐπομένως εἶναι καὶ ὕψος του, ἥτοι $AB \perp \Gamma\Delta$.



Σχ. 403

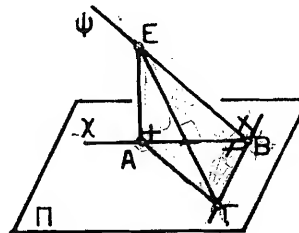


Σχ. 404

407 Θεώρημα. Δύο ἡμιευθεῖαι Bx καὶ By μὲ κοινὴν ἀρχὴν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τρίτην εὐθεῖαν $B\Gamma$. Αἱ Bx καὶ $B\Gamma$ ὀρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου (Π). Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ε τῆς By φέρομεν $EA \perp Bx$. Τότε εἶναι $EA \perp (\Pi)$.

Ἀπόδειξις. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $EA \perp Bx$ (σχ. 405). Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ EA εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ μίαν ἀκόμη εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου (Π).

Τὰ τρίγωνα ABE , $AB\Gamma$ καὶ $EB\Gamma$ εἶναι ὀρθογώνια. Ἐφαρμόζομεν εἰς αὐτὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα καὶ ἔχομεν ἀντιστοίχως: $BE^2 = AB^2 + AE^2$ (1), $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$ (2) καὶ $\Gamma E^2 = B\Gamma^2 + BE^2$ (3). Ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) λαμβάνομεν $AE^2 = BE^2 - AB^2$ (4). Προσθέτομεν τὰς σχέσεις (2) καὶ (4) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν: $A\Gamma^2 + AE^2 = B\Gamma^2 + BE^2$ (5).



Σχ. 405

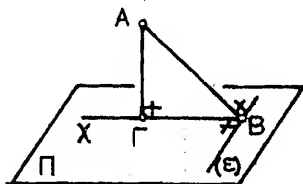
Ἐκ τῶν σχέσεων (3) καὶ (5) ἔπεται $ΓΕ^2 = ΑΓ^2 + ΑΕ^2$. Ἐκ τῆς τελευταίας ἔπεται ὅτι τὸ τρίγωνον $ΑΓΕ$ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ $Α$, διότι εἰς αὐτὸ ἰσχύει ἡ σχέση τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος. Ἀρα $ΕΑ \perp ΑΓ$ καὶ ἐπομένως $ΕΑ \perp (Π)$.

(408) Κατασκευὴ εὐθείας διερχομένης ἀπὸ δοθὲν σημεῖον A καὶ καθέτου ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον $(Π)$.

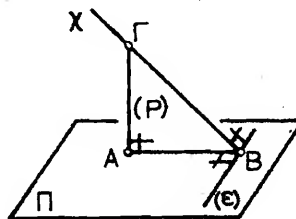
i) Τὸ σημεῖον A δὲν ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον $(Π)$ (σχ. 406). Ἀπὸ τοῦ A φέρομεν εὐθεῖαν $ΑΒ \perp (ε)$, ὅπου $(ε)$ τυχούσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου $(Π)$. Ἐκ τοῦ B φέρομεν εὐθεῖαν $Βχ \perp (ε)$ ἀνήκουσα εἰς τὸ $(Π)$. Ἐκ τοῦ A φέρομεν $ΑΓ \perp Βχ$. Ἡ $ΑΓ$ εἶναι ἡ ζητούμενη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $(Π)$.

ii) Τὸ σημεῖον A ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον $(Π)$ (σχ. 407). Φέρομεν $ΑΒ \perp (ε)$, ὅπου $(ε)$ εἶναι τυχούσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου $(Π)$. Ἐκ τοῦ B φέρομεν $Βχ \perp (ε)$, μὴ ἀνήκουσα εἰς τὸ $(Π)$. Αἱ $ΑΒ$ καὶ $Βχ$ καθορίζουν ἐπίπεδον $(Ρ)$. Ἐπ' αὐτοῦ φέρομεν εὐθεῖαν $ΑΓ \perp ΑΒ$. Ἡ $ΑΓ$ εἶναι ἡ ζητούμενη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $(Π)$.

Ἡ ἀπόδειξις καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εἶναι φανερά, τῇ βοηθείᾳ τοῦ 3ου θεωρήματος τῶν τριῶν καθέτων (§ 407).



Σχ. 406



Σχ. 407

Παρατήρησις. Αἱ δύο προηγούμεναι κατασκευαὶ ἀποδεικνύουν τὴν ὑπαρξιν εὐθείας καθέτου ἐπὶ ἐπίπεδον, ἀπὸ σημεῖον ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ κείμενον ἢ ἐπὶ αὐτοῦ.

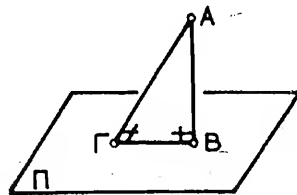
(409) Θεώρημα. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον A , κείμενον ἐκτὸς ἐπιπέδου $(Π)$, μία μόνον κάθετος εὐθεῖα ἄγεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ A ὑπάρχει μία κάθετος $ΑΒ$ (σχ. 408) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $(Π)$ (408, i). Ἐὰν ὑπῆρχε καὶ δευτέρα κάθετος $ΑΓ$ ἐπὶ τοῦ $(Π)$, τὸ τρίγωνον $ΑΒΓ$ θὰ ἦτο ὀρθογώνιον εἰς τὰς δύο γωνίας τοῦ B καὶ $Γ$, ὅπερ ἄτοπον. Ἀρα ἡ $ΑΒ$ εἶναι ἡ μοναδικὴ κάθετος ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ $(Π)$. Εἰς τὰ ἐπόμενα θὰ δειχθῇ ὅτι αὐτὸ εἶναι καὶ τὸ μικρότερον τμήμα μὲ ἄκρα τὸ σημεῖον A ἀφ' ἑνὸς καὶ τυχὸν σημεῖον τοῦ $(Π)$ ἀφ' ἑτέρου.

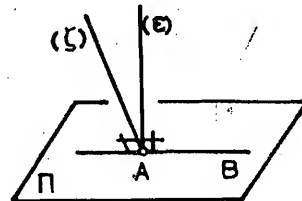
(410) Ἀπόστασις σημείου A ἀπὸ ἐπίπεδον $(Π)$ καλεῖται τὸ μῆκος τοῦ καθέτου τμήματος ἐκ τοῦ σημείου A πρὸς τὸ ἐπίπεδον $(Π)$.

(411) Θεώρημα. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον A ἐπιπέδου $(Π)$ μία μόνον κάθετος εὐθεῖα ἄγεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Απόδειξις. Ἐκ τοῦ A ὑπάρχει μία εὐθεῖα $(\epsilon) \perp (\Pi)$ (408, ii). Ἐὰν ὑπῆρχε καὶ δευτέρα εὐθεῖα (ζ) κάθετος ἐπὶ τοῦ (Π) εἰς τὸ A (σχ. 409), τότε τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν (ϵ) καὶ (ζ) θὰ ἔτεμνε τὸ ἐπίπεδον (Π) κατὰ τὴν



Σχ. 408



Σχ. 409

εὐθεῖαν AB καὶ θὰ ᾔτο $(\epsilon) \perp AB$ καὶ $(\zeta) \perp AB$. Τοῦτο ὁμῶς δὲν δύναται νὰ συμβαίῃ, διότι θὰ ὑπῆρχον εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἐκ τοῦ A δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν AB . Ἀρα ἡ $(\epsilon) \perp (\Pi)$ εἶναι ἡ μοναδικὴ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τὸ σημεῖον A .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

708 Σημεῖον A ἀπέχει ἀπὸ ἐπίπεδον (Π) ἀπόστασιν 10 cm. Φέρομεν $AB \perp (\Pi)$ καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) γράφομεν κύκλον κέντρου B καὶ ἀκτίνος 8 cm. Φέρομεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου εἰς σημεῖον Γ αὐτοῦ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $\Gamma\Delta = 2\sqrt{7}$ cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος $A\Delta$.

709 Ἀπὸ τὸ κέντρον K ὀρθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ φέρομεν εὐθεῖαν $(\epsilon) \perp (AB\Gamma\Delta)$ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον M . Ἐὰν Z εἶναι τὸ μέσον τῆς AB , δείξατε ὅτι εἶναι $MZ \perp AB$.

710 Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθεῖα (ϵ) πλαγία ὡς πρὸς αὐτό. Δείξατε ὅτι ὑπάρχει μία μόνον εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π) κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ϵ) .

711 Δίδεται ἐπίπεδον (Π) , σημεῖον A αὐτοῦ καὶ σημεῖον B ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν προβολῶν τοῦ B ἐπὶ τὰς εὐθείας τοῦ (Π) τὰς διερχομένας διὰ τοῦ A .

712 Ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ὑποτείνουσας ὀρθογωνίου τριγώνου ἄγομεν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς καθετοῦ ταύτης ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς κορυφάς τοῦ τριγώνου.

713 Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν A αὐτοῦ φέρομεν τὴν $A\chi$ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου καὶ ἐνώνομεν τὸ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς $A\chi$ μὲ τὸ μέσον M τῆς βάσεως $B\Gamma$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι α) $\Delta M \perp B\Gamma$ καὶ β) $B\Gamma \perp (\Delta AM)$.

B'.

714 Δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν AB . Ἐκ τυχόντος σημείου Γ φέρομεν $\Gamma\Delta \perp (\Pi)$, $\Gamma E \perp (P)$ καὶ ἐκ τῶν Δ καὶ E φέρομεν κάθετους ἐπὶ τὴν AB . Δείξατε ὅτι αὗται διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

715 Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ σημεῖον A ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π) , τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐκ τοῦ A δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ .

(716) Δίδεται επίπεδον (Π), σημείον Α αὐτοῦ καὶ σημείον Β ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Α εὐθεῖα τοῦ (Π) ἀπέχουσα ἐκ τοῦ Β δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ.

717. Δίδεται επίπεδον (Π), κύκλος (Κ, R) ἐπ' αὐτοῦ καὶ σημείον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (Κ, R) καὶ ἀπέχουσα ἐκ τοῦ σημείου Α δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ.

(718) Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὅποια ἱσαπέχουν ἀπὸ τρία δοθέντα σημεία Α, Β καὶ Γ, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας.

719. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὅποια ἱσαπέχουν ἀπὸ τρεῖς συνεπιπέδους εὐθείας, τεμνομένας ἀνὰ δύο.

(720) Ἐάν εὐθεῖα (ε) σχηματίζῃ ἴσας γωνίας μετὰ τρεῖς εὐθείας ἐνὸς ἐπιπέδου (Π), νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι $(ε) \perp (Π)$.

721. Δίδεται επίπεδον (Π) καὶ εὐθύγραμμον τμήμα $AB = 2a$ ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἀπὸ τὰ ὅποια τὸ τμήμα AB φαίνεται ὑπὸ ὀρθῆν γωνίαν.

722. Δίδεται επίπεδον (Π) καὶ σημείον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὸ κάθετον τμήμα AB ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο πλάγια τμήματα ΑΓ καὶ ΑΔ. Ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν σημεία Ε, Ζ, Η ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{AE}{AB} = \frac{AZ}{AG} = \frac{AH}{AD}$. Δείξατε ὅτι $AB \perp (EZH)$.

723. Ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) δίδεται κύκλος (Κ, R). Ἀπὸ σημείου Α τοῦ κύκλου φέρομεν τὴν διάμετρον AB καὶ ὑψώνομεν κάθετον Αχ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου. Ἐπὶ τῆς Αχ λαμβάνομεν σημείον Γ καὶ τὸ συνδέομεν μετὰ τυχὸν σημείον Δ τοῦ κύκλου. α) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $ΓΔ \perp ΒΔ$. β) Φέρομεν $ΑΕ \perp ΒΓ$ καὶ $ΑΖ \perp ΓΔ$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τριγ. $ΓΒΔ \approx$ τριγ. $ΓΖΕ$. γ) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $ΒΓ \perp (ΑΕΖ)$.

724. Δίδεται επίπεδον (Π) καὶ δύο σημεία Α καὶ Β ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου (Π), διὰ τὰ ὅποια εἶναι: $MA^2 + MB^2 = \lambda^2$, ἐνθα λ δεδομένον μῆκος.

725. Δίδεται εὐθύγραμμον τμήμα AB. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὅποια εἶναι: $MA^2 - MB^2 = \lambda^2$, ὅπου λ δοθὲν μῆκος.

(412) Μεσοκάθετον ἐπίπεδον εὐθυγράμμου τμήματος. Ὅρισμός. Μεσοκάθετον ἐπίπεδον εὐθυγράμμου τμήματος AB καλεῖται τὸ ἐκ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος AB κάθετον ἐπίπεδον ἐπ' αὐτοῦ.

(413) Θεώρημα. Κάθε σημείον τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου (Π) εὐθυγράμμου τμήματος AB ἱσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος καὶ ἀντιστρόφως, κάθε σημείον, τὸ ὅποιον ἱσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος, εὐρίσκεται ἐπὶ τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου.

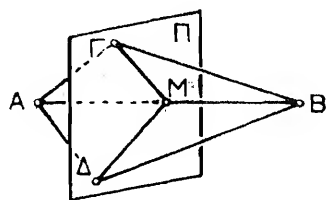
Ἀπόδειξις. Ἐστω Γ τυχὸν σημείον τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου (Π) τοῦ τμήματος AB $\Rightarrow ΓΜ \perp AB$ (σχ. 500). Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον εἶναι $MA = MB$, ἔπεται ὅτι τὸ τριγ. ΓAB εἶναι ἰσοσκελές, ἐφ' ὅσον ἔχει τὴν ΓΜ ὡς ὕψος καὶ διάμεσον. Ἄρα $GA = GB$.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω Δ τυχὸν σημείον, ἱσαπέχον ἐκ τῶν Α καὶ Β, ἥτοι $ΔΑ = ΔΒ \Rightarrow$ τὸ τριγ. ΔAB εἶναι ἰσοσκελές. Τότε ἡ διάμεσος ΔΜ εἶναι καὶ ὕψος του, ἥτοι $ΔΜ \perp AB$. Ἄρα τὸ σημείον Δ ἀνήκει εἰς τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον (Π) τοῦ τμήματος AB.

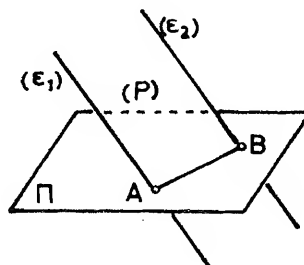
Παρατήρησις. Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἔπεται ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἐκ δύο δοθέντων σημείων A καὶ B εἶναι τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον τοῦ τμήματος AB .

414) Θεώρημα. Ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν, (ε_1) καὶ (ε_2) , ἐὰν ἡ μία τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου (Π) , τότε καὶ ἡ ἄλλη τέμνεται ὑπὸ τοῦ (Π) .

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι ἡ (ε_1) τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τὸ σημεῖον A (σχ. 411). Αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) , καθορίζουν ἐπίπεδον (P) , τὸ ὁποῖον ἔχει μετὰ τοῦ (Π) κοινὸν τὸ σημεῖον A . Ἄρα ἔχουν καὶ κοινὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία, ὡς ἀνήκουσα εἰς τὸ ἐπίπεδον (P) καὶ τέμνουσα τὴν εὐθεῖαν (ε_1) εἰς τὸ A , θὰ τέμνη καὶ τὴν παράλληλόν της εἰς τὸ B . Τὸ B ἐπομένως, ὡς ἀνήκον εἰς τὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων, ἀνήκει καὶ εἰς τὸ (Π) , ἥτοι τὸ ἐπίπεδον (Π) τέμνει καὶ τὴν (ε_2) εἰς τὸ B .



Σχ. 410

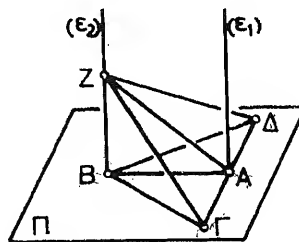


Σχ. 411

415) Θεώρημα. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι κάθετοι ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) , εἶναι μεταξύ των παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Κατ' ἀρχὰς παρατηροῦμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) ἀποκλείεται νὰ τέμνωνται, διότι τότε ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον των θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 412). Ἀρκεῖ ἐπομένως νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι συνεπίπεδοι.

A καὶ B εἶναι τὰ ἔχνη τῶν (ε_1) καὶ (ε_2) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) ἀντιστοίχως. Ἐκ τοῦ A φέρομεν εὐθεῖαν τοῦ (Π) κάθετον ἐπὶ τὴν AB καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν $AG = AD$. Τότε τὸ τρίγ. BGA εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἔχει τὴν BA ὡς ὕψος καὶ διάμεσον. Ἄρα $BG = BA$. Αἱ εὐθεῖαι (ε_1) καὶ AB καθορίζουν τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον τοῦ τμήματος GA , διότι $(\varepsilon_1) \perp GA$ καὶ $AB \perp GA$. Τὸ σημεῖον B τῆς (ε_2) ἀνήκει προφανῶς εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο. Ἐστω Z τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας (ε_2) . Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ZBG καὶ ZBA ἔχουν τὴν ZB κοινὴν καὶ $BG = BA$. Ἄρα εἶναι ἴσα $\Rightarrow ZG = ZA$. Ἐξ αὐτῆς ἔπεται ὅτι τὸ σημεῖον Z ἀνήκει εἰς τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον τοῦ τμήματος GA . Τότε

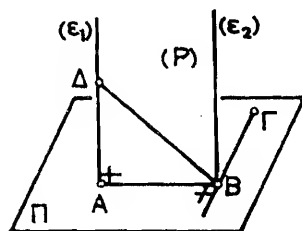


Σχ. 412

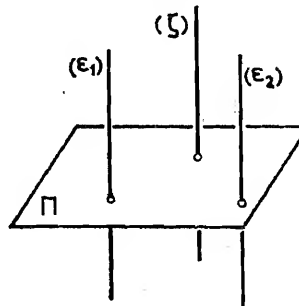
καὶ ἡ εὐθεΐα (ε_2) ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καὶ ἐπομένως εἶναι συνεπίπεδος τῆς (ε_1) . Ἄρα εἶναι $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$.

(416) Θεώρημα. Ἐὰν δύο εὐθεΐαι (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι παράλληλοι καὶ ἐπίπεδον (Π) εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, τότε τὸ (Π) εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $(\Pi) \perp (\varepsilon_1)$ εἰς τὸ σημεῖον A (σχ. 413). Τὸ ἐπίπεδον (Π) θὰ τέμνῃ ὅπωςδήποτε καὶ τὴν εὐθεΐαν (ε_2) εἰς σημεῖον B , διότι εἶναι $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$ (§ 414) καὶ θὰ εἶναι $(\varepsilon_1) \perp AB \Rightarrow (\varepsilon_2) \perp AB$. Ἀρκεῖ ἐπομένως νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ (ε_2) εἶναι κάθετος καὶ εἰς ἄλλην μίαν εὐθεΐαν τοῦ ἐπιπέδου (Π) .



Σχ. 413



Σχ. 414

Ἐκ τοῦ σημείου B καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) φέρομεν τὴν $B\Gamma \perp AB$ καὶ ἔστω Δ τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας (ε_1) . Γνωρίζομεν ὅτι $\Delta B \perp B\Gamma$ (θεώρ. τριῶν καθέτων) καὶ ἐπομένως $B\Gamma \perp (AB\Delta)$. Τὸ ἐπίπεδον ὅμως $(AB\Delta)$ συμπίπτει μὲ τὸ ἐπίπεδον (P) τῶν δύο παραλλήλων (ε_1) καὶ (ε_2) , διότι ἔχουν κοινὴν τὴν εὐθεΐαν (ε_1) καὶ τὸ σημεῖον B . Ἄρα θὰ εἶναι $(\varepsilon_2) \perp B\Gamma$. Τότε ὅμως εἶναι $(\varepsilon_2) \perp (\Pi)$.

(417) Θεώρημα. Ἐὰν δύο εὐθεΐαι (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι παράλληλοι πρὸς τρίτην εὐθεΐαν (ζ) , εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν ἐπίπεδον $(\Pi) \perp (\zeta)$ (σχ. 414). Τότε θὰ εἶναι $(\Pi) \perp (\varepsilon_1)$ διότι $(\varepsilon_1) // (\zeta)$ (§ 416). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον θὰ εἶναι καὶ $(\Pi) \perp (\varepsilon_2)$. Ἄρα $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$, ὥς κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (Π) (§ 415).

ΚΑΘΕΤΑ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

(418) Θεώρημα. Ἐκ σημείου A ἔκτος ἐπιπέδου (Π) κειμένου :

- i) Τὸ κάθετον τμήμα πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι μικρότερον παντὸς πλαγίου.
- ii) Τὰ ἴχνη δύο ἴσων πλαγίων τμημάτων ἰσαπέχουν ἀπὸ τὸ ἴχνος τοῦ καθέτου τμήματος.
- iii) Τὰ ἴχνη δύο ἀνίσων τμημάτων ἀπέχουν ὁμοιοστρόφως ἀνίσους ἀποστάσεις ἀπὸ τὸ ἴχνος τοῦ καθέτου τμήματος.

Ἀπόδειξις.

i) $AB \perp (\Pi)$. Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ B (σχ. 415) καὶ ἐπομένως εἶναι $AB < A\Gamma$.

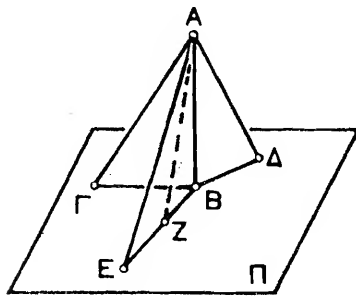
ii) Ἐστώσαν $A\Gamma$ καὶ $A\Delta$ δύο ἴσα πλάγια εὐθύγραμμα τμήματα. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $AB\Delta$ ἔχουν τὰς ὑποτείνουσας τῶν ἴσας καὶ τὴν AB κοινήν. Ἄρα εἶναι ἴσα $\Rightarrow B\Gamma = B\Delta$.

iii) Ἐστώσαν AE , AD δύο ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα μὲ $AE > AD$. Ἐπὶ τῆς EB λαμβάνομεν σημεῖον Z τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $AZ = AD \Rightarrow BZ = B\Delta$ καὶ $AE > AZ \Rightarrow BE > BZ \Rightarrow BE > B\Delta$.

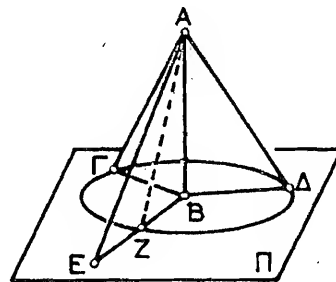
419. Θεώρημα. Εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τῶν ἀγόμενων ἐκ σημείου A πρὸς ἐπίπεδον (Π) :

i) Μικρότερον ὅλων εἶναι τὸ κάθετον.

ii) Δύο τμήματα εἶναι ἴσα, ἂν τὰ ἴχνη τῶν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) ἰσαπέχουν ἀπὸ τὸ ἴχνος τοῦ καθέτου τμήματος.



Σχ. 415



Σχ. 416

iii) Δύο τμήματα εἶναι ἄνισα, ἂν τὰ ἴχνη τῶν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) ἀπέχουν ὁμοιοστροφῶς ἀνίσους ἀποστάσεις ἀπὸ τὸ ἴχνος τοῦ καθέτου τμήματος.

Ἀπόδειξις.

i) Φέρομεν τὸ κάθετον τμήμα $AB \perp (\Pi)$ καὶ τυχὸν τμήμα AD πλάγιον ὡς πρὸς τὸ (Π) . Τὸ τρίγωνον $AB\Delta$ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ B καὶ ἐπομένως $AB \leq AD$, ἥτοι τὸ κάθετον τμήμα εἶναι μικρότερον παντὸς πλαγίου (τὸ = ἰσχύει εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ Δ συμπίπτει μὲ τὸ B).

ii) $AB \perp (\Pi)$ (σχ. 416) καὶ ἔστω $B\Gamma = B\Delta \Rightarrow \overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{AB\Delta}$, διότι εἶναι ὀρθογώνια μὲ $B\Gamma = B\Delta$ καὶ τὴν AB κοινήν. Ἄρα $A\Gamma = A\Delta$.

iii) Ἐστω $BE > B\Delta$. Ἐπὶ τῆς BE λαμβάνομεν τμήμα $BZ = B\Delta \Rightarrow AZ = AD$ καὶ $BE > BZ \Rightarrow AE > AZ \Rightarrow AE > AD$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

726. Δίδεται εὐθεῖα (ϵ) καὶ δύο σημεῖα A καὶ B τοῦ χώρου. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας (ϵ) σημεῖον M , τὸ ὁποῖον νὰ ἰσαπέχη ἐκ τῶν A καὶ B .

727. Δίδονται δύο σημεία Α καὶ Β καὶ εὐθεῖα (ε) εἰς τὸν χώρον. Νὰ εὐρεθῇ σημεῖον Γ τῆς εὐθείας (ε) τοιοῦτον ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ εἶναι ἰσοσκελὲς α) μὲ κορυφὴν τὸ Γ β) μὲ κορυφὴν τὸ Α.

728. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο σημεία Α καὶ Β ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὐρεθοῦν τὰ σημεία τοῦ ἐπιπέδου (Π), τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἐκ τῶν Α καὶ Β.

(729) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν στρεβλοῦ τετραπλεύρου (τοῦ ὁποίου καὶ κορυφαὶ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου) εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου. Πότε τοῦτο εἶναι ῥόμβος;

(730) Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Δείξατε ὅτι τὰ Α καὶ Γ ἰσαπέχουν ἀπὸ κάθε ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ΒΔ.

Β'.

731. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖα (ε) καὶ σημεῖον Α. Διὰ τοῦ Α νὰ ἀχθῇ εὐθύγραμμον τμήμα ἔχον τὰ ἄκρα του Β καὶ Γ ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) καὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι: $\frac{AB}{AG} = \frac{1}{2}$.

732. Ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) δίδονται δύο σημεία Α καὶ Β. Ἐκ τῶν Α καὶ Β φέρομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ (Π) καθέτους ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα ΑΓ = κ καὶ ΒΔ = λ. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὰ τμήματα ΑΓ καὶ ΒΔ φαίνονται ὑπὸ ἰσᾶς γωνίας.

733. Νὰ εὐρεθῇ σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἰσαπέχη ἀπὸ τέσσαρα δοθέντα σημεία Α, Β, Γ, Δ μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

734. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (στρεβλὸν καλεῖται τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ τέσσαρες κορυφαὶ δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον). Ἀπὸ τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΓΔ φέρομεν ἐπίπεδον (Π), τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ εἰς τὰ σημεία Η καὶ Θ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι: $\frac{HA}{HD} = \frac{GB}{GD}$.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

(420) Ὅρισμός. Εὐθεῖα (ε) καλεῖται παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π), ἐὰν ἡ τομή των εἶναι τὸ κενὸν σύνολον: $(ε) // (Π) \iff (ε) \cap (Π) = \emptyset$ (σχ. 417).

Τότε καὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) καλεῖται παράλληλον τῆς εὐθείας (ε).

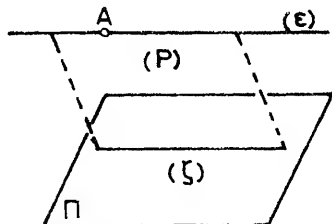
(421) Θεώρημα. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖα (ζ) αὐτοῦ καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ Α θεωροῦμεν εὐθεῖαν (ε) // (ζ). Τότε ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).

Ἀπόδειξις. Αἱ εὐθεῖαι (ε) καὶ (ζ), ὡς παράλληλοι, καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ) (σχ. 417), τὸ ὁποῖον τέμνεται μετὰ τοῦ (Π) κατὰ τὴν εὐθεῖαν (ζ). Ἡ εὐθεῖα (ε), ὡς εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), ἀνήκει ἐξ ὁλοκλήρου εἰς αὐτό. Ἐπομένως, ἐὰν ἡ (ε) ἔτεμνε τὸ (Π) εἰς σημεῖον Σ, θὰ ἔπρεπε αὐτὸ νὰ ἀνήκη εἰς τὸ κοινὸν μέρος τῶν δύο ἐπιπέδων, ἥτοι εἰς τὴν εὐθεῖαν (ζ). Τοῦτο ὁμῶς εἶναι ἄτοπον, καθ' ὅτι εἶναι $(ε) // (ζ)$. Ἀρα ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).

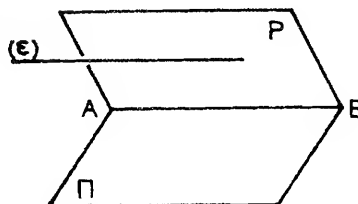
Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔπεται ὅτι ἀπὸ σημείου

Α ἔκτος ἐπιπέδου (Π) ὑπάρχουν ἄπειροι εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).

Πόρισμα. Ἐάν εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τομὴν AB δύο τεμνομένων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) (σχ. 418), μὴ ἀνήκουσα εἰς αὐτά, εἶναι παράλληλος πρὸς ἀμφότερα τὰ ἐπίπεδα.



Σχ. 417

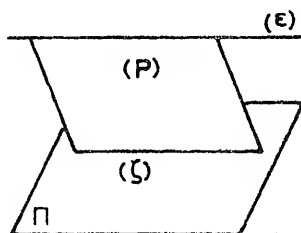


Σχ. 418

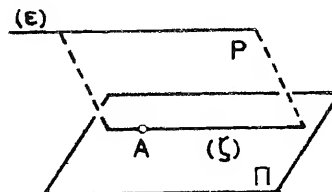
422. Θεώρημα. Ἐάν εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π), πᾶν ἐπίπεδον (Ρ) διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας (ε) καὶ τέμνον τὸ ἐπίπεδον (Π), τὸ τέμνει κατὰ εὐθεῖαν (ζ) $//$ (ε).

Ἀπόδειξις. Αἱ εὐθεῖαι (ε) καὶ (ζ) εἶναι συνεπίπεδοι (σχ. 419). Ἀρκεῖ ἐπομένως νὰ δειχθῇ ὅτι δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον. Ἀσφαλῶς ὅμως δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, διότι, ἐὰν ὑπῆρχε κοινὸν σημεῖον Σ, τοῦτο, ὡς σημεῖον τῆς εὐθείας (ζ), θὰ εὐρίσκετο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἀλλὰ τότε ἡ εὐθεῖα (ε) θὰ εἶχε τὸ σημεῖον τῆς Σ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π), ὅπερ ἄτοπον, διότι εἶναι $(ε) // (Π)$. Ἀρα εἶναι $(ε) // (ζ)$.

423. Θεώρημα. Ἐστω ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Α αὐτοῦ καὶ εὐθεῖα $(ε) // (Π)$. Ἐκ τοῦ Α θεωροῦμεν εὐθεῖαν (ζ) $//$ (ε). Τότε ἡ εὐθεῖα (ζ) εἶναι εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π).



Σχ. 419



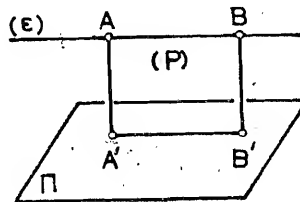
Σχ. 420

Ἀπόδειξις. Αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε) καὶ (ζ) καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ) (σχ. 420). Τὰ δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) ἔχουν κοινὸν σημεῖον τὸ Α. Ἐπομένως θὰ ἔχουν καὶ κοινὴν εὐθεῖαν καὶ μάλιστα αὕτη πρέπει νὰ εἶναι παράλληλος τῆς εὐθείας (ε) (§ 422). Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον πρέπει νὰ διέρχεται

από το σημείον Α, δὲν εἶναι ἄλλη παρὰ ἡ ἰδία ἡ εὐθεΐα (ζ). Ἄρα ἡ εὐθεΐα (ζ) ὡς κοινὴ διὰ τὰ δύο ἐπίπεδα, ἀνήκει καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π).

7 (242) **Θεώρημα.** Ἐὰν εὐθεΐα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π), ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἱσαπέχουν ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν Α καὶ Β δύο σημεῖα τῆς εὐθεΐας (ε) (σχ. 421). Φέρομεν $AA' \perp (\Pi)$ καὶ $BB' \perp (\Pi) \Rightarrow AA' \parallel BB'$. Αἱ παράλληλοι AA' καὶ BB' καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ). Τὸ (Ρ) τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) κατὰ τὴν εὐθεΐαν $A'B'$ καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $A'B' \parallel (\epsilon)$ (§ 422). Τότε τὸ τετράπλευρον $ABB'A'$ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὡς ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους. Ἐπομένως εἶναι $AA' = BB'$.



Σχ. 421

Ἀντιστρόφως. Ἐστω ὅτι τὰ σημεῖα Α καὶ Β τῆς εὐθεΐας (ε) ἱσαπέχουν ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον (Π), ἦτοι εἶναι $AA' = BB'$. Τότε τὸ τετράπλευρον $ABB'A'$ εἶναι παραλληλόγραμμον ὡς ἔχον τὰς AA' καὶ BB' ἴσας καὶ παραλλήλους (κάθετοι ἐπὶ τὸ (Π)). Ἄρα εἶναι $AB \parallel A'B'$ καὶ ἐπομένως $(\epsilon) \parallel (\Pi)$ (§ 421).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

735. Δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) τέμνονται κατὰ εὐθεΐαν ΑΒ. Ἐπίπεδον (Σ) παράλληλον τῆς ΑΒ τέμνει τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ τομαὶ εἶναι παράλληλοι.

736. Ἀπὸ δοθέν σημείον Α νὰ ἀχθῇ εὐθεΐα παράλληλος πρὸς δύο δοθέντα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ).

737. Δίδεται εὐθεΐα (ε) καὶ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ). Νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς εὐθεΐας (ε) ἐπίπεδον τέμνον τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) κατὰ εὐθείας παραλλήλους.

738. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ δοθείσης εὐθείας (ε) καὶ ἱσαπέχον ἐκ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β.

739. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ.

Β'.

740. Δίδονται τρεῖς ἀσύμβατοι εὐθεΐαι (ϵ_1) , (ϵ_2) καὶ (ε). Νὰ ἀχθοῦν διὰ τῶν (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ), τεμνόμενα κατὰ εὐθεΐαν $AB \parallel (\epsilon)$.

741. Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι τοποθετημένα οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $AB \parallel A'B'$, $B\Gamma \parallel B'\Gamma'$, $\Gamma A \parallel \Gamma'A'$. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεΐαι AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ εἶναι παράλληλοι.

742. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), εὐθεΐα $(\epsilon) \parallel (\Pi)$ καὶ σημείον Σ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Σ εὐθεΐα τέμνουσα τὴν εὐθεΐαν (ε) εἰς σημείον Α καὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημείον Β οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $AB = \lambda$, ὅπου λ δοθέν μῆκος.

743. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), δύο σημεῖα Α, Β καὶ εὐθύγραμμον τμήμα $\alpha \parallel (\Pi)$.

Διὰ τῶν σημείων A καὶ B νὰ ἀχθοῦν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι, τέμνουσαι τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὰ A' καὶ B' ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $A'B' // \alpha$.

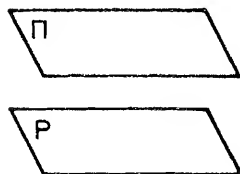
744. (Θεώρημα Desargues). Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι τοποθετημένα εἰς τρόπον, ὥστε αἱ εὐθεῖαι AB καὶ $A'B'$ νὰ τέμνονται εἰς σημεῖον K , αἱ $B\Gamma$ καὶ $B'\Gamma'$ νὰ τέμνονται εἰς σημεῖον Λ καὶ αἱ ΓA καὶ $\Gamma'A'$ νὰ τέμνονται εἰς σημεῖον M . Δείξατε ὅτι α) τὰ σημεῖα K, Λ, M εὐρίσκονται ἐπ' εὐθείας, β) αἱ εὐθεῖαι $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ εἶναι παράλληλοι.

745. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, ἐπίπεδον (Π) παράλληλον πρὸς τὰς δύο ἀπέναντι πλευράς του AB καὶ $\Gamma\Delta$, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς AD καὶ BC εἰς τὰ σημεῖα E καὶ Z ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι: $\frac{EA}{ED} = \frac{ZB}{Z\Gamma}$.

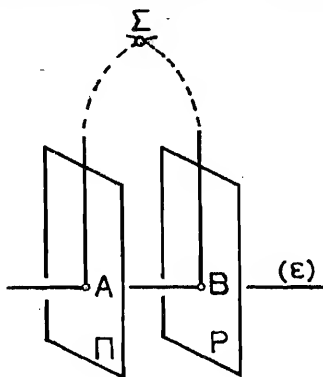
ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΕΠΙΠΕΔΑ

(425) Ορισμός. Δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) καλοῦνται παράλληλα, ἐὰν ἡ τομή των εἶναι τὸ κενὸν σύνολον: $(\Pi) \cap (P) = \emptyset$ (σχ. 422).

(426) Θεώρημα. Δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) , κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (ϵ) , εἶναι μεταξύ των παράλληλα.



Σχ. 422

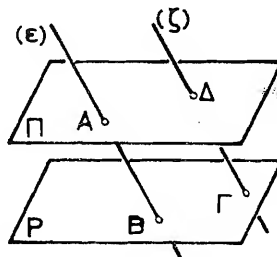


Σχ. 423

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι ἡ εὐθεῖα (ϵ) τέμνει τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B (σχ. 423). Τὰ ἐπίπεδα ἀποκλείεται νὰ τέμνονται. Διότι, ἐὰν ὑπῆρχε ἓν κοινὸν σημεῖον Σ αὐτῶν, ἐκ τοῦ Σ θὰ ὑπῆρχον δύο εὐθεῖαι ΣA καὶ ΣB κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ϵ) , ὅπερ ἄτοπον. Ἀρα τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) εἶναι παράλληλα.

(427) Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα (ϵ) , τέμνουσα τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, τέμνει καὶ τὸ ἄλλο.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι ἡ εὐθεῖα (ϵ) τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὸ σημεῖον A (σχ. 424). Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Γ τοῦ ἐπιπέδου (P) καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρομεν εὐθεῖαν $(\zeta) // (\epsilon)$. Τὸ ἐ-



Σχ. 424

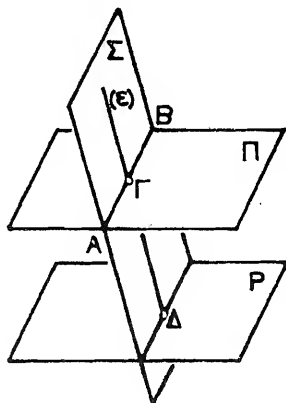
πίπεδον (Π), ὡς τέμνον τὴν εὐθεΐαν (ϵ), θὰ τέμνη καὶ τὴν παράλληλον αὐτῆς (ζ) εἰς σημεῖον Δ (§ 414). Ἄρα ἡ εὐθεΐα (ζ), ὡς ἔχουσα σημεῖον τῆς Δ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου (P), δὲν εἶναι εὐθεΐα τοῦ (P). Τὸ ἐπίπεδον (P) ὁμῶς τέμνει τὴν εὐθεΐαν (ζ) εἰς τὸ Γ καὶ ἐπομένως θὰ τέμνη καὶ τὴν παράλληλόν τῆς (ϵ) εἰς σημεῖον B .

(428) Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) εἶναι παράλληλα, πᾶν ἐπίπεδον (Σ) τέμνον τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, τέμνει καὶ τὸ ἄλλο.

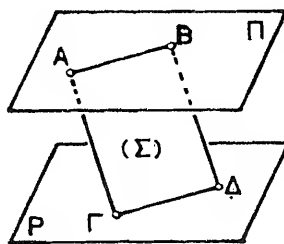
Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Σ) τέμνει τὸ (Π) κατὰ τὴν εὐθεΐαν AB (σχ. 425). Θεωροῦμεν τυχούσαν εὐθεΐαν (ϵ) τοῦ ἐπιπέδου (Σ) τέμνουσαν τὴν AB εἰς τὸ Γ . Ἡ εὐθεΐα (ϵ), τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὸ σημεῖον Γ , θὰ τέμνη καὶ τὸ παράλληλον αὐτοῦ ἐπίπεδον (P) εἰς σημεῖον Δ . Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Σ) ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ Δ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (P) καὶ ἐπομένως τὸ τέμνει.

(429) Θεώρημα. Αἱ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (P), ὑπὸ τρίτου ἐπιπέδου (Σ), εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Σ) τέμνει τὰ παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) κατὰ τὰς εὐθείας AB καὶ $\Gamma\Delta$ ἀντιστοίχως (σχ. 426). Αἱ εὐθεῖαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι συνεπίπεδοι, ὡς εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου (Σ). Ἀποκλείεται νὰ ἔχουν κοινὸν σημεῖον, διότι ἀνήκουν εἰς τὰ παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P). Ἄρα εἶναι $AB \parallel \Gamma\Delta$.



Σχ. 425



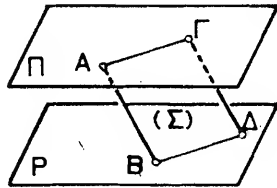
Σχ. 426

Πόρισμα. Δύο παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$, μὲ τὰ ἄκρα των ἐπὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (P) εἶναι ἴσα.

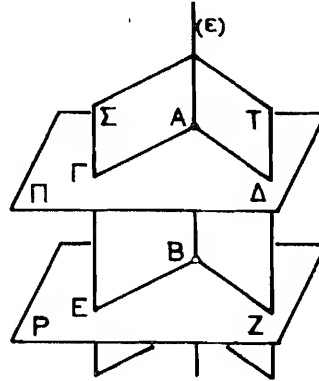
Ἀπόδειξις. Τὰ παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$ καθορίζουν ἐπίπεδον (Σ), τὸ ὁποῖον τέμνει τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) κατὰ τὰς AB καὶ $\Gamma\Delta$ (σχ. 427). Τότε θὰ εἶναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ (§ 429) καὶ ἐπομένως τὸ $AB\Gamma\Delta$ εἶναι παραλληλόγραμμον $\Rightarrow AB = \Gamma\Delta$.

430. Θεώρημα. Ἐὰν δύο επίπεδα (Π) καὶ (P) εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεΐα (ϵ) , κάθετος ἐπὶ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἄλλο.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι $(\epsilon) \perp (\Pi)$ (σχ. 428). Ἡ εὐθεΐα (ϵ) , ἐφ' ὅσον τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον A , θὰ τέμνη καὶ τὸ παράλληλον αὐτοῦ ἐπίπεδον (P) εἰς σημεῖον B . Ἐκ τοῦ σημείου A θεωροῦμεν δύο τυχούσας εὐθείας AG καὶ AD τοῦ ἐπιπέδου (Π) . Ἡ (ϵ) μετὰ τῶν AG καὶ AD καθο-



Σχ. 427

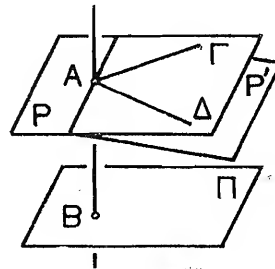


Σχ. 428

ρίζει δύο επίπεδα (Σ) καὶ (T) ἀντιστοίχως, τὰ ὅποια, ὡς τέμνοντα τὸ (Π) κατὰ τὰς AG καὶ AD , θὰ τέμνουν καὶ τὸ παράλληλόν του ἐπίπεδον (P) κατὰ τὰς BE καὶ BZ ἀντιστοίχως καὶ θὰ εἶναι μάλιστα $AG \parallel BE$ καὶ $AD \parallel BZ$ (§ 429). Ἐπειδὴ $(\epsilon) \perp (\Pi) \Rightarrow (\epsilon) \perp AG$ καὶ $(\epsilon) \perp AD$. Τότε ὅμως θὰ εἶναι καὶ $(\epsilon) \perp BE$ καὶ $(\epsilon) \perp BZ \Rightarrow (\epsilon) \perp (P)$.

431. Θεώρημα. Ἀπὸ σημείου A κείμενον ἐκτὸς ἐπιπέδου (Π) δύναται νὰ ἀχθῇ ἓν μόνον ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ (Π) .

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ σημείου A φέρομεν εὐθεΐαν $AB \perp (\Pi)$ (σχ. 429). Φέρομεν ἐπίσης $AG \perp AB$ καὶ $AD \perp AB$, αἱ ὅποια καθορίζουν τὸ μοναδικὸν κάθετον ἐπίπεδον (P) ἐπὶ τῆς AB εἰς τὸ σημεῖον A . Εἶναι φανερόν τῶρα ὅτι $(P) \parallel (\Pi)$, ὡς κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεΐαν AB . Τὸ (P) εἶναι καὶ τὸ μοναδικὸν ἐπίπεδον ἐκ τοῦ A παράλληλον πρὸς τὸ (Π) , διότι, ἐὰν ὑπῆρχε καὶ δεῦτερον ἐπίπεδον $(P') \parallel (\Pi) \Rightarrow (P') \perp AB$, διότι $AB \perp (\Pi)$. Ἀλλὰ τότε θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετα ἐπίπεδα ἐκ τοῦ A ἐπὶ τὴν AB τὸ (P) καὶ τὸ (P') , ὅπερ ἄτοπον. Ἀρα ἐκ τοῦ A ἓν μόνον ἐπίπεδον ὑπάρχει παράλληλον πρὸς τὸ (Π) .

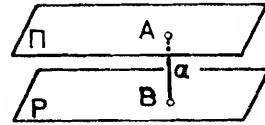


Σχ. 429

432. Ἀπόστασις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (P) καλεῖται τὸ μῆκος α τοῦ κάθετου εὐθυγράμμου τμήματος AB τῶν δύο ἐπιπέδων. Τὰ

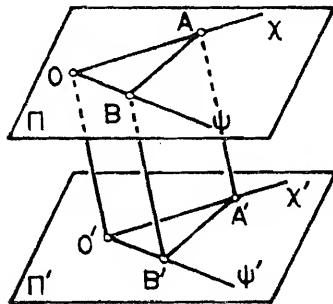
A και B είναι σημεία τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (P) ἀντιστοίχως (σχ. 430).

(433.) Θεώρημα. Δύο γωνίαι \widehat{xOy} καὶ $\widehat{x'O'y'}$, ἔχουσαι τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους, εἶναι ἴσαι, τὰ δὲ ἐπίπεδα, τὰ καθοριζόμενα ὑπ' αὐτῶν, εἶναι παράλληλα.

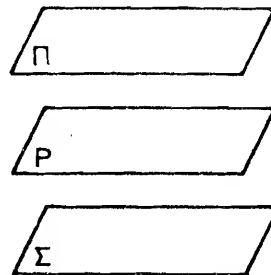


Σχ. 430

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν OX καὶ O'X' λαμβάνομεν σημεῖα A καὶ A' ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $OA = O'A' \Rightarrow$ τὸ $OAA'O'$ εἶναι παραλληλόγραμμον $\Rightarrow OO' \parallel AA'$ (1) (σχ. 431). Ὀμοίως ἐπὶ τῶν Oy καὶ O'y' λαμβάνομεν $OB = O'B' \Rightarrow$ τὸ $OBBO'$ εἶναι παραλληλόγραμμον $\Rightarrow OO' \parallel BB'$ (2). Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι $AA' \parallel BB' \Rightarrow$ τὸ $ABB'A'$ εἶναι παραλληλόγραμμον $\Rightarrow AB = A'B'$. Ἄρα $\triangle OAB = \triangle O'A'B'$, (Π - Π - Π). Ἐπομένως θὰ εἶναι καὶ $\widehat{O} = \widehat{O'} \Rightarrow \widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.



Σχ. 431



Σχ. 432

Αἱ δύο γωνίαι \widehat{xOy} καὶ $\widehat{x'O'y'}$ καθορίζουν τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Π') ἀντιστοίχως. Ἐπειδὴ $OX \parallel O'X' \Rightarrow OX \parallel (\Pi')$ (§ 421), ἤτοι ἡ OX ἀποκλείεται νὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον (Π'). Ὀμοίως ἡ Oy, διότι $Oy \parallel O'y' \Rightarrow Oy \parallel (\Pi')$. Τότε ἀποκλείεται νὰ τέμνωνται καὶ τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Π'), διότι, ἐὰν ἐτέμνοντο κατὰ εὐθεῖαν ΚΛ, αὕτη, ὡς εὐθεῖα τοῦ (Π), θὰ ἔπρεπε νὰ τέμνῃ τοῦλάχιστον μίαν ἐκ τῶν OX καὶ Oy καὶ αὐτὸ σημαίνει ὅτι μία τοῦλάχιστον ἐκ τῶν OX καὶ Oy θὰ εἶχε σημεῖον της ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π'), ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα εἶναι $(\Pi) \parallel (\Pi')$.

Πόρισμα. Ἐὰν δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ἐνὸς ἐπιπέδου εἶναι παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς δύο εὐθείας ἐνὸς ἄλλου ἐπιπέδου, τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα.

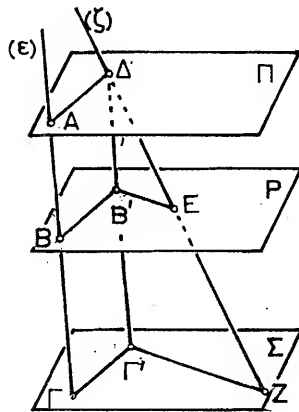
(434.) Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) εἶναι παράλληλα πρὸς τρίτον ἐπίπεδον (Σ), εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλα.

Ἀπόδειξις. $(\Pi) \parallel (\Sigma)$, $(P) \parallel (\Sigma)$ (σχ. 432). Τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ

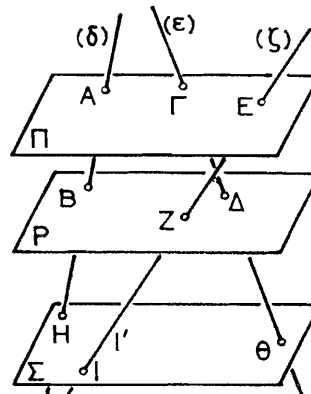
(P) ἀποκλείεται νὰ τέμνωνται, διότι, ἐὰν ἐτέμνοντο, ἐξ ἑνὸς τῶν κοινῶν σημείων τῶν θὰ ὑπῆρχον δύο παράλληλα ἐπίπεδα πρὸς τὸ (Σ), ὅπερ ἄτοπον (§ 431). Ἄρα εἶναι (Π) // (P).

435. Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ. Ἐὰν τρία τοῦλάχιστον ἐπίπεδα (Π), (P) καὶ (Σ) εἶναι παράλληλα καὶ τέμνωνται ὑπὸ δύο εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ) εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ, καὶ Δ, E, Z ἀντιστοίχως, τὰ ἀποκοπτόμενα τμήματα ἐκ τῶν εὐθειῶν ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι ἀνάλογα.

Ἀπόδειξις. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$ (σχ. 433). Ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν εὐθεῖαν ΔB'Γ' // ABΓ. Αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καθορίζουν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰ ἐπίπεδα (Π), (P) καὶ (Σ) κατὰ εὐθείας παραλλήλους ΑΔ // B'B' // ΓΓ'. Ἄρα τὰ τετραπλευρά ABB'Δ καὶ BΓΓ'B' εἶναι παραλληλόγραμμα $\Rightarrow AB = \Delta B'$ καὶ $B\Gamma = B'\Gamma'$.



Σχ. 433



Σχ. 434

Αἱ τεμνόμεναι εὐθεῖαι ΔEZ καὶ ΔB'Γ' καθορίζουν ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον, τέμνει τὰ ἐπίπεδα (P) καὶ (Σ) κατὰ εὐθείας παραλλήλους B'E // Γ'Z. Ἄρα θὰ εἶναι (θεώρημα τοῦ Θαλοῦ εἰς τὸ ἐπίπεδον) $\frac{\Delta B'}{B'\Gamma'} = \frac{\Delta E}{EZ} \Rightarrow \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$.

Τὸ θεώρημα δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ διὰ περισσότερα τῶν τριῶν ἐπιπέδων. *f*

436. Θεώρημα. Τρεῖς εὐθεῖαι (δ), (ε) καὶ (ζ) ὅχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τέμνουν δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ καὶ E, Z ἀντιστοίχως (σχ. 434). Ἐὰν ἐπ' αὐτῶν λάβωμεν σημεῖα H, Θ καὶ I ἀντιστοίχως καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου (P) τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι : $\frac{AB}{BH} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta\Theta} = \frac{EZ}{ZI}$, τὰ σημεῖα H, Θ καὶ I καθορίζουν ἐπίπεδον (Σ) παράλληλον πρὸς τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (P).

Άποδειξις. Ἐάν τὸ ἐπίπεδον (Σ) (σχ. 434), τὸ ὁποῖον καθορίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα H, Θ καὶ I , δὲν ᾗτο παράλληλον πρὸς τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) , ἐκ τῶν σημείων H καὶ Θ θὰ διήρχετο ἓν μόνον ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) καὶ θὰ ἔτεμνε τὴν εὐθεῖαν (ζ) εἰς σημεῖον I' , πρὸς τὸ μέρος τῶν H καὶ Θ ὡς πρὸς τὸ (P) (διατί;). Τότε θὰ ᾗτο (προηγούμενον θεώρημα) :

$$\frac{AB}{BH} = \frac{EZ}{ZI'} \quad (1).$$

Ἐξ ὑποθέσεως ὁμῶς ἔχομεν :

$$\frac{AB}{BH} = \frac{EZ}{ZI}$$

(2). Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται

$$\frac{EZ}{ZI'} = \frac{EZ}{ZI} \Leftrightarrow ZI' = ZI, \text{ ἥτοι}$$

θὰ ἔπρεπε τὸ σημεῖον I' νὰ συμπίπτῃ μετὰ τοῦ σημείου I . Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι $(\Sigma) // (\Pi) // (P)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

746. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθεῖα $(\epsilon) // (\Pi)$. Διὰ τῆς (ϵ) νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον $(P) // (\Pi)$.

747. Τρεῖς εὐθεῖαι τοῦ χώρου Ox, Oy , καὶ Oz ἔχουν κοινὸν σημεῖον O καὶ τέμνονται ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (P) εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ καὶ Δ, E, Z ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι $\text{τριγ. } AB\Gamma \approx \text{τριγ. } \Delta EZ$.

748. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθεῖα (ϵ) ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ τοποθετηθῇ τμήμα δοθέντος μήκους λ μὲ τὰ ἄκρα του ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) καὶ τῆς εὐθείας (ϵ) καὶ παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ) .

749. Δίδονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα $(\Pi) // (P)$ καὶ σημεῖον A τοῦ ἐπιπέδου (Π) . Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π) , τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἐκ τοῦ σημείου A καὶ τοῦ ἐπιπέδου (P) .

750. Ἀπὸ σημείου A νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π) , τέμνουσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ϵ) .

751. Τρία παράλληλα ἐπίπεδα $(\Pi), (P), (\Sigma)$ κατὰ σειρὰν ἀπέχουν τὰ μὲν (Π) καὶ (P) 12cm, τὰ δὲ (P) καὶ (Σ) 8cm. Εὐθεῖα (ϵ) τέμνει αὐτὰ εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ ἀντιστοίχως καὶ εἶναι $AB = 18\text{cm}$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος $B\Gamma$.

Β'.

752. Διὰ δοθέντος σημείου A νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ἰσαπέχον ἀπὸ τρία δοθέντα σημεῖα B, Γ, Δ .

753. Ἐπὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (P) εὐρίσκονται δύο κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) ἀντιστοίχως. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ) , ἥ ὁποία νὰ τέμνῃ τοὺς δύο κύκλους.

754. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα διακοῦν εἰς δεδομένον λόγον μ/ν τὰ τμήματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰ ἄκρα των ἐπὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (P) .

755. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) , δύο σημεῖα A, B αὐτοῦ καὶ σημεῖον K ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀντιστοίχως διὰ τῶν KA καὶ KB καὶ τέμνουν τὸ ἐπίπεδον (Π) κατὰ εὐθείας παραλλήλους.

756. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Συνδέομεν τὸ Α μὲ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου (Π) καὶ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΜ λαμβάνομεν σημεῖον Ι τοιοῦτον, ὥστε $\frac{IA}{IM} = \frac{\kappa}{\lambda}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Ι.

757. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ σημεῖον Α. Ἐὰν Μ εἴναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου Δ τοῦ τμήματος ΑΜ. Νὰ γίνῃ γενίκευσις ἐὰν $\frac{A\Delta}{AM} = \frac{\kappa}{\lambda}$.

758. Δίδονται τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Νὰ κατασκευασθοῦν τέσσαρα ἰσαπέχοντα ἐπίπεδα, διερχόμενα διὰ τῶν τεσσάρων δοθέντων σημείων ἀντιστοίχως.

759. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ δύο σημεῖα Β καὶ Γ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου του. Μεταβλητὸν σημεῖον Α διαγράφει τὸν κύκλον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κ. βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

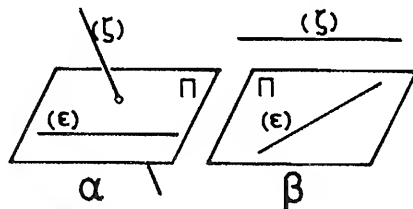
ΑΣΥΜΒΑΤΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

(437) Ὅρισμός. Εἰς τὴν § 396 εἶδομεν ὅτι ἀσύμβατοι εὐθεῖαι καλοῦνται δύο μὴ συνεπίπεδοι εὐθεῖαι.

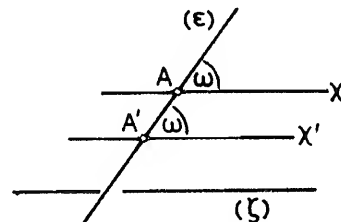
Πόρισμα. Πᾶν ἐπίπεδον (Π), περιέχον μίαν ἐκ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ), τέμνει τὴν ἄλλην ἢ εἶναι παράλληλον πρὸς αὐτὴν (σχ. 435 α καὶ β).

(438) Γωνία δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν. Ἐστωσαν (ε) καὶ (ζ) δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (σχ. 436). Ἐκ τυχόντος σημείου Α τῆς εὐθείας (ε) φέρομεν εὐθεῖαν Αχ // (ζ). Ἡ γωνία ω τῶν εὐθειῶν (ε) καὶ Αχ* εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ Α ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) καὶ καλεῖται γωνία τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ).

Πράγματι, ἐὰν Α' εἴναι ἐν ἄλλῳ σημείῳ τῆς εὐθείας (ε) καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρωμεν εὐθεῖαν Α'χ' // (ζ), θὰ εἴναι Αχ // Α'χ', ὡς παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (ζ). Ἀρα θὰ εἴναι καὶ $\widehat{A} = \widehat{A'} = \omega$.



Σχ. 435



Σχ. 436

(439) Ὁρθογώνιοι εὐθεῖαι καλοῦνται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων ἡ γωνία εἶναι ὀρθή.

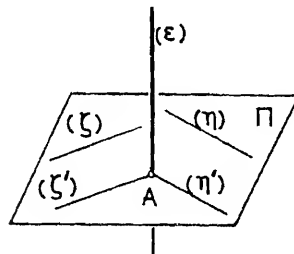
(440) Θεώρημα. Ἐὰν μία εὐθεῖα (ε) εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς δύο εὐθείας (ζ) καὶ (η) ἐνὸς ἐπιπέδου (Π), ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

* Ὑπενθυμίζομεν ὅτι γωνία δύο τεμνομένων εὐθειῶν καλεῖται ἡ μικροτέρα γωνία (ὀξεία) τὴν ὁποίαν σχηματίζουν.

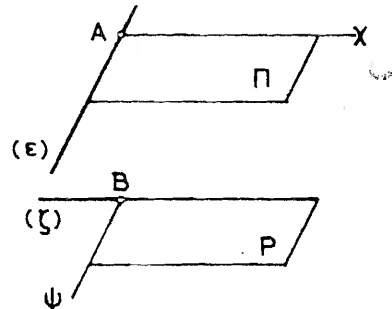
Ἀπόδειξις. Ἀπὸ τὸ ἴχνος A τῆς εὐθείας (ϵ) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) φέρομεν τὰς εὐθείας $(\zeta') // (\zeta)$ καὶ $(\eta') // (\eta)$ (σχ. 437). Αἱ εὐθεῖαι (ζ') καὶ (η') ἀνήκουν εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) (§ 394). Ἐπειδὴ εἶναι $(\epsilon) \perp (\zeta) \Rightarrow (\epsilon) \perp (\zeta')$. Ὁμοίως εἶναι καὶ $(\epsilon) \perp (\eta')$. Ἄρα ἡ εὐθεῖα (ϵ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) , ὡς κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας του.

441. Θεώρημα. Δοθεῖσων δύο ασυμβάτων εὐθειῶν (ϵ) καὶ (ζ) ὑπάρχουν δύο μόνον παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) , ἐξ ὧν ἕκαστον περιέχει ἀνὰ μίαν τῶν ασυμβάτων.

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ σημεῖα A καὶ B τῶν ασυμβάτων εὐθειῶν (ϵ) καὶ (ζ) ἀντιστοίχως φέρομεν ἀνὰ μίαν εὐθεῖαν Ax καὶ By παράλληλον τῆς (ζ) καὶ (ϵ) ἀντιστοίχως (σχ. 438). Τὰ δύο καθοριζόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) εἶναι παράλληλα, διότι δύο εὐθεῖαι τοῦ ἐνὸς εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας τοῦ ἄλλου.



Σχ. 437



Σχ. 438

Εἶναι καὶ τὰ μόνα παράλληλα ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα περιέχουν τὰς δύο ασυμβάτους, διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ οἰουδήποτε σημείου A' τῆς εὐθείας (ϵ) ἦγετο $A'x' // (\zeta) \Rightarrow A'x' \in (\Pi)$ (§ 423).

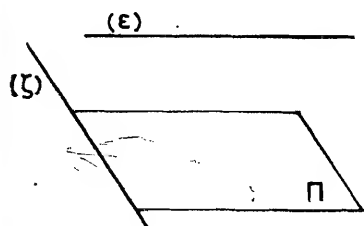
Πόρισμα. Δοθεῖσων δύο ασυμβάτων εὐθειῶν (ϵ) καὶ (ζ) ὑπάρχει ἓν μόνον παράλληλον ἐπίπεδον (Π) πρὸς τὴν εὐθεῖαν (ϵ) , τὸ ὁποῖον περιέχει τὴν εὐθεῖαν (ζ) (σχ. 439).

ΚΟΙΝΗ ΚΑΘΕΤΟΣ ΔΥΟ ΑΣΥΜΒΑΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

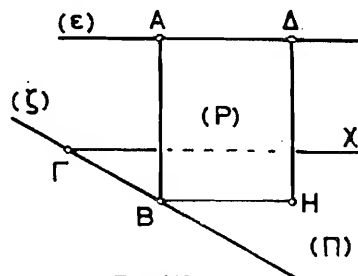
442. Θεώρημα. Δοθεῖσων δύο ασυμβάτων εὐθειῶν (ϵ) καὶ (ζ) , ὑπάρχει μία καὶ μόνον μία κοινὴ κάθετος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τυχόντος σημείου Γ τῆς εὐθείας (ζ) φέρομεν εὐθεῖαν $\Gamma x // (\epsilon)$ (σχ. 440). Αἱ δύο εὐθεῖαι (ζ) καὶ Γx καθορίζουν ἐπίπεδον (Π) . Ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς εὐθείας (ϵ) φέρομεν $\Delta H \perp (\Pi)$ καὶ ἐκ τοῦ H τὴν εὐθεῖαν $HB // (\epsilon)$. Ἡ εὐθεῖα HB ἀνήκει ἀσφαλῶς εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π) (§ 423) καὶ ἐπομένως τέμνει τὴν εὐθεῖαν (ζ) εἰς σημεῖον B (ἀποκλείεται νὰ εἶναι παράλληλοι, διότι τότε θὰ ἦτο καὶ $(\epsilon) // (\zeta)$). Αἱ δύο παράλληλοι (ϵ) καὶ BH καθορίζουν ἐπίπεδον (P) εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει προφανῶς καὶ ἡ ΔH . Ἀπὸ τὸ

σημείον Β φέρομεν ευθείαν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΗ, ἡ ὁποία, ὡς ευθεία τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), τέμνει τὴν ευθείαν (ε) εἰς σημείον Α. Τὸ τετράπλευρον ΑΔΗΒ εἶναι ἐκ κατασκευῆς παραλληλόγραμμον καὶ μάλιστα ὀρθογώνιον,



Σχ. 439



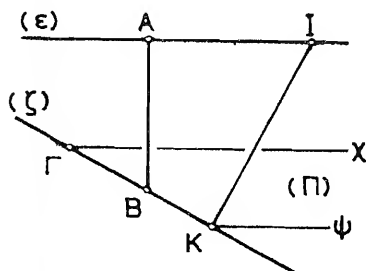
Σχ. 440

διότι εἶναι $\Delta H \perp (\Pi) \Rightarrow \Delta H \perp HB$. Ἀρα θὰ εἶναι καὶ $\widehat{A} = 1^{\circ} \Rightarrow AB \perp (\epsilon)$. Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον εἶναι $\Delta H \perp (\Pi) \Rightarrow AB \perp (\Pi) \Rightarrow AB \perp (\zeta)$. Ἐπομένως ἡ ΑΒ εἶναι κοινὴ κάθετος διὰ τὰς δύο ασυμβάτους ευθείας (ε) καὶ (ζ).

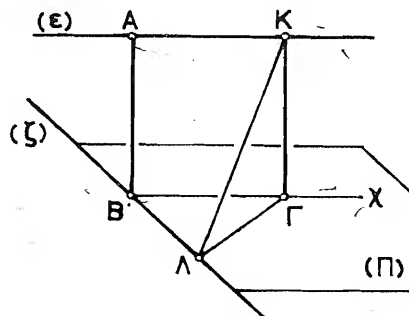
Ἡ κοινὴ κάθετος ΑΒ τῶν δύο ασυμβάτων ευθειῶν εἶναι καὶ ἡ μοναδική. Πράγματι ἔστω ὅτι ἡ ΙΚ (σχ. 441) εἶναι μία ἄλλη κοινὴ κάθετος τῶν δύο ασυμβάτων. Ἐκ τοῦ Κ φέρομεν $K\gamma \parallel (\epsilon)$. Τότε ἡ ΙΚ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $K\gamma$, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν παράλληλόν της (ε). Ἡ $K\gamma$ ὅμως ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π), διότι $K\gamma \parallel (\epsilon) \parallel \Gamma\chi$. Ἀρα $IK \perp (\Pi)$, ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς δύο ευθείας του (ζ) καὶ $K\gamma \Rightarrow AB \parallel IK$, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (Π) \Rightarrow αἱ ΑΒ καὶ ΙΚ καθορίζουν ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ἡ ΑΙ $\equiv (\epsilon)$ καὶ ἡ ΒΚ $\equiv (\zeta)$, ἥτοι αἱ ἀσύμβατοι ευθείαι (ε) καὶ (ζ) εἶναι συνεπίπεδοι, ὅπερ ἄτοπον. Ἀρα μία μόνον εἶναι ἡ κοινὴ κάθετος δύο ασυμβάτων ευθειῶν.

443. Θεώρημα. Ἐξ ὧν τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα εὐρίσκονται ἐπὶ δύο ασυμβάτων ευθειῶν (ε) καὶ (ζ), μικρότερον εἶναι τὸ κοινὸν κάθετον τμήμα ΑΒ τῶν δύο ασυμβάτων ευθειῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ΑΒ τὸ κοινὸν κάθετον τμήμα τῶν ασυμβάτων ευθειῶν (ε) καὶ (ζ) (σχ. 442). Ἐκ τοῦ Β φέρομεν τὴν Βχ $\parallel (\epsilon)$, ἡ ὁποία μετὰ τῆς



Σχ. 441



Σχ. 442

εὐθείας (ζ) καθορίζουν ἐπίπεδον (Π) //(ε). Ἐὰν ΚΛ εἶναι τυχὸν εὐθύγραμμον τμήμα μετὰ τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ), ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι $AB < ΚΛ$. Φέρομεν $ΚΓ \perp (Π) \Rightarrow AB = ΚΓ$ (§ 424). Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΓΛ λαμβάνομεν $ΚΓ < ΚΛ \Rightarrow AB < ΚΛ$.

444. Ἐλαχίστη ἀπόστασις δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν ἢ ἀπλῶς «ἀπόστασις δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν» καλεῖται τὸ μῆκος τοῦ κοινοῦ καθέτου εὐθυγράμμου τμήματος αὐτῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

760. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε₁) καὶ (ε₂) καὶ σημεῖον Α. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Α εὐθεῖα τέμνουσα τὰς δύο ἀσυμβάτους.

761. Ἡ κοινὴ κάθετος ΑΒ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε₁) καὶ (ε₂) ἔχει μῆκος 12cm, ἡ δὲ γωνία τῶν ἀσυμβάτων εἶναι 60°. Ἐπὶ τῆς (ε₁) λαμβάνομεν τμήμα ΑΓ = 6cm καὶ ἐπὶ τῆς (ε₂) τμήμα ΒΔ = 8cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΓΔ (δύο περιπτώσεις).

762. Ἀπὸ τὸ μέσον Γ τοῦ κοινοῦ καθέτου τμήματος ΑΒ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε₁) καὶ (ε₂) φέρομεν ἐπίπεδον (Π) παράλληλον πρὸς τὰς ἀσυμβάτους. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε τμήμα μετὰ τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δύο ἀσυμβάτων διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου (Π).

763. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε₁) καὶ (ε₂) παράλληλοι πρὸς τὸ (Π). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ κοινὴ κάθετος τῶν δύο ἀσυμβάτων εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π).

764. Εἰς στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι $AB = ΓΔ$ καὶ $AD = ΒΓ$. Δείξατε ὅτι ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του εἶναι ἡ κοινὴ κάθετος αὐτῶν.

Β'.

765. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε₁) καὶ (ε₂). Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς δύο ἀσυμβάτους καὶ ἔχουσα δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ).

766. Μεταβλητοῦ στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ διατηροῦνται σταθεραί, ἐνῶ ἡ κορυφή Δ διαγράφει εὐθεῖαν (ε). Νὰ εὐρεθῇ ἡ θέσις τοῦ Δ ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) οὕτως, ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, εἶναι : α) ὀρθογώνιον, β) ῥόμβος.

767. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Α αὐτοῦ καὶ εὐθεῖα (ε) τέμνουσα τὸ (Π) εἰς τὸ Β. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Α εὐθεῖα (ζ) τοῦ ἐπιπέδου (Π) τοιαύτη, ὥστε ἡ κοινὴ κάθετος τῶν ἀσυμβάτων (ε) καὶ (ζ) νὰ διέρχεται i) διὰ τοῦ σημείου Α, ii) διὰ τοῦ σημείου Β.

768. Διὰ νὰ εἶναι ὀρθογώνια δύο ἀσύμβατα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ, δείξατε ὅτι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $ΓΑ^2 - ΓΒ^2 = ΔΑ^2 - ΔΒ^2$.

769. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε₁) καὶ (ε₂) τέμνουσαι ἐπίπεδον (Π) εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως. Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα δοθέντος μήκους λ, παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) καὶ ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δύο ἀσυμβάτων.

770. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε) καὶ (ζ) τέμνουσαι αὐτὸ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Μεταβλητὸν εὐθύγραμμον τμήμα ΓΔ ἔχει τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν καὶ παραμένει παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ Ι.

771. Δίδονται τρεῖς ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε₁), (ε₂), (ε₃). Μεταβλητὸν ἐπίπεδον (Π),

τὸ ὅποιον παραμένει παράλληλον πρὸς δύο σταθερὰς διευθύνσεις, τέμνει τὰς ἀσυμβάτους εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ . Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κ. βάρους τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

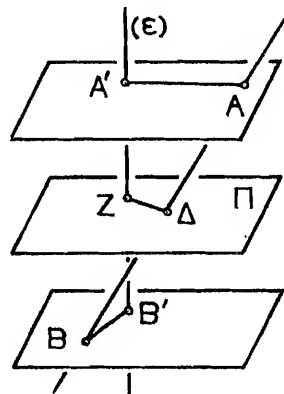
772. Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι $(\epsilon_1), (\epsilon_2), (\epsilon_3)$ τέμνουν δύο ἀσυμβάτους εὐθείας (δ_1) καὶ (δ_2) εἰς μέρη ἀνάλογα, δείξατε ὅτι ὑπάρχει ἐπίπεδον, πρὸς τὸ ὅποιον αἱ $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ καὶ (ϵ_3) εἶναι παράλληλοι.

773. Ἐὰν στρεβλοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ εἶναι $AB = \Gamma\Delta$ καὶ $A\Delta = B\Gamma$, δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ διερχομένη ἀπὸ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον πρὸς ὁρίζεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ στρεβλοῦ τετραπλεύρου.

ΟΡΘΑΙ ΠΡΟΒΟΛΑΙ

445. Ὅρθῃ προβολῇ σημείου A ἐπὶ εὐθείαν (ϵ) καλεῖται τὸ ἶχνος A' τῆς ἐκ τοῦ A καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθείαν (ϵ) .

Ὅρθῃ προβολῇ εὐθυγράμμου τμήματος AB ἐπὶ εὐθείαν (ϵ) καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ὀρθῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ τμήματος AB ἐπὶ τὴν εὐθείαν (ϵ) (σχ. 443). Τὸ σημειοσύνολον τοῦτο εἶναι εὐθύγραμμον τμήμα με ἄκρα τὰς ὀρθὰς προβολὰς A' καὶ B' τῶν A καὶ B ἐπὶ τὴν εὐθείαν (ϵ) . Κάθε σημεῖον Δ τοῦ τμήματος AB προβάλλεται εἰς ἓν σημεῖον Z τοῦ τμήματος $A'B'$ δι' ἐπιπέδου (Π) ἐκ τοῦ Δ καθέτου ἐπὶ τὴν (ϵ) καὶ ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖον Z τοῦ τμήματος $A'B'$ εἶναι ἡ προβολὴ ἑνὸς σημείου Δ τοῦ τμήματος AB , ὅπου τὸ Δ εἶναι ἡ τομὴ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου ἐπὶ τὴν (ϵ) ἐκ τοῦ Z .



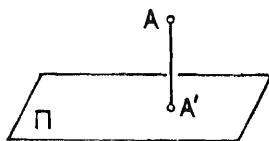
Σχ. 443

446. Ὅρθῃ προβολῇ σημείου A ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) καλεῖται τὸ ἶχνος A' τῆς ἐκ τοῦ A καθέτου εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 444).

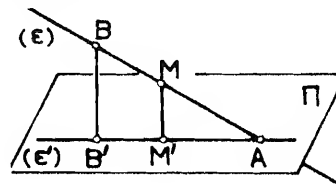
447. Ὅρθῃ προβολῇ σχήματος (Σ) ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) καλεῖται τὸ σύνολον τῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Σ) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) .

448. Θεώρημα. Ἡ ὀρθὴ προβολὴ εὐθείας (ϵ) ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἶναι ἓν γένει εὐθεῖα.

Ἀπόδειξις. Ἡ εὐθεῖα (ϵ) τέμνει ἓν γένει τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον A (σχ. 445). Ἐκ τυχόντος σημείου B τῆς εὐθείας (ϵ) φέρομεν τὴν $BB' \perp (\Pi)$.



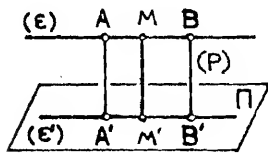
Σχ. 444



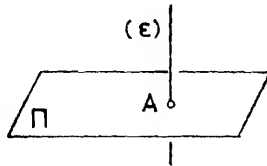
Σχ. 445

Ἡ εὐθεῖα BB' καὶ τὸ σημεῖον A καθορίζουν ἐπίπεδον (P) , τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) κατὰ τὴν εὐθεῖαν (ϵ') . Τὸ τυχὸν σημεῖον M τῆς εὐθείας (ϵ) προβάλλεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον M' ἐπὶ τῆς εὐθείας (ϵ') , διότι ἡ MM' , ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) , εἶναι παράλληλος τῆς εὐθείας BB' καὶ ἐπομένως εἶναι εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (P) . Ἐπομένως τὸ σημεῖον M' , κατὰ τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Π) , πρέπει νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ κοινὸν μέρος τῶν δύο ἐπιπέδων (Π) καὶ (P) , ἥτοι εἰς τὴν εὐθεῖαν (ϵ') .

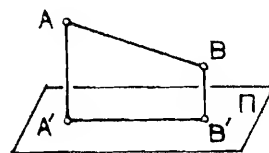
Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν M' εἶναι σημεῖον τῆς εὐθείας (ϵ') , φέρομεν ἐξ αὐτοῦ κάθετον ἐπὶ τὸ (Π) , ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος τῆς BB' καὶ ἐπομένως περιέχεται εἰς τὸ ἐπίπεδον $BB'A$. Ἄρα τέμνει τὴν AB εἰς σημεῖον M . Ἐξ αὐτῶν ἔπεται ὅτι ἡ ὀρθὴ προβολὴ τῆς εὐθείας (ϵ) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι ἡ εὐθεῖα (ϵ') .



Σχ. 446



Σχ. 447



Σχ. 448

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα (ϵ) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 446), ἡ ὀρθὴ προβολὴ τῆς (ϵ') ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) καθορίζεται ἀπὸ τὰς ὀρθὰς προβολὰς A' καὶ B' δύο σημείων A καὶ B τῆς εὐθείας (ϵ) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) . Πράγματι, αἱ $AA' \perp (\Pi)$ καὶ $BB' \perp (\Pi)$ εἶναι παράλληλοι καὶ ὀρίζουν ἐπίπεδον $(P) \perp (\Pi)$. Ἀπὸ κάθε σημείου M τῆς εὐθείας (ϵ) ἡ $MM' \perp (\Pi)$ ἀνήκει εἰς τὸ (P) καὶ ἐπομένως τέμνει τὸ (Π) εἰς $M' \in (\epsilon')$ καὶ ἀντιστρόφως, ἐκ τυχόντος σημείου M' τῆς (ϵ') ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ (Π) ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (P) καὶ ἐπομένως τέμνει τὴν (ϵ) εἰς σημεῖον M . Αἱ εὐθεῖαι (ϵ) καὶ (ϵ') , ὡς συνεπίπεδοι καὶ μὴ τεμνόμεναι, εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα (ϵ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 447), ἡ ὀρθὴ προβολὴ τῆς ἐπὶ τὸ (Π) εἶναι τὸ ἴχνος τῆς A ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) .

Παρατήρησις. Ἡ ὀρθὴ προβολὴ εὐθυγράμμου τμήματος AB ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἶναι εὐθύγραμμον τμήμα μὲ ἄκρα τὰς ὀρθὰς προβολὰς A' καὶ B' τῶν A καὶ B ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 448) (διὰ τὴν ;).

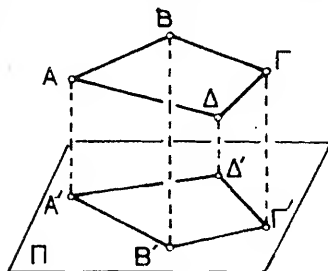
Πόρισμα. Ἡ ὀρθὴ προβολὴ εὐθυγράμμου σχήματος ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) εἶναι εὐθύγραμμον σχῆμα μὲ κορυφὰς τὰς ὀρθὰς προβολὰς τῶν κορυφῶν τοῦ ἀρχικοῦ σχήματος (σχ. 449).

449. Θεώρημα. Ἡ ὀρθὴ προβολὴ εὐθυγράμμου τμήματος AB ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση πρὸς τὸ τμήμα AB .

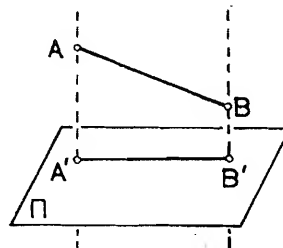
Ἀπόδειξις. Ἐστω $A'B'$ ἡ προβολὴ τοῦ τμήματος AB ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον

(Π) (σχ. 450). Τότε εἶναι $A'B' \leq AB$, διότι τὸ τμήμα $A'B'$ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων εὐθειῶν AA' καὶ BB' . Τὸ \equiv ἰσχύει μόνον εἰς τὴν περίπτωσηὶ τῆς παραλληλίας τοῦ τμήματος AB μετὰ τοῦ ἐπιπέδου (Π).

450. Θεώρημα. Αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν (ε) καὶ (ζ) ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.



Σχ. 449

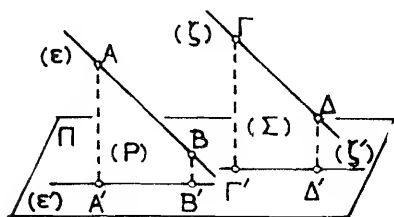


Σχ. 450

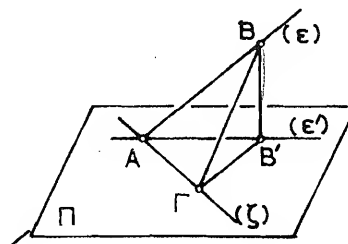
Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν δύο τυχόντα σημεῖα A καὶ B τῆς εὐθείας (ε) καὶ τὰ προβάλλομεν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὰ σημεῖα A' καὶ B' ἀντιστοιχῶς (σχ. 451). Τὰ σημεῖα A' καὶ B' καθορίζουν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) τὴν ὀρθὴν προβολὴν τῆς εὐθείας (ε). Ὀμοίως ἡ εὐθεῖα (ζ) προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τὴν εὐθεῖαν (ζ') διὰ τῶν ὀρθῶν προβολῶν Γ' καὶ Δ' δύο τυχόντων σημείων τῆς Γ καὶ Δ. Αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι AA' καὶ BB' καθορίζουν ἐπίπεδον (P), εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ἡ εὐθεῖα (ε). Ὀμοίως αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι $ΓΓ'$ καὶ $ΔΔ'$ καθορίζουν ἐπίπεδον (Σ), εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ἡ εὐθεῖα (ζ). Ἐπειδὴ εἶναι $(ε) \parallel (ζ)$ καὶ $AA' \parallel ΓΓ'$ ὥς κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (Π), ἔπεται ὅτι $(P) \parallel (Σ)$ (§ 433). Ἀρα θὰ εἶναι καὶ $(ε') \parallel (ζ')$, ὥς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου.

451. Θεώρημα. Ἐὰν εὐθεῖα (ε) τέμνῃ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὸ σημεῖον A, σχηματίζει γωνίας μὲ τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἐκ τῶν ὁποίων μικρότερα εἶναι ἡ σχηματιζομένη μὲ τὴν προβολὴν τῆς (ε').

Ἀπόδειξις. Ἐκ τυχόντος σημείου B τῆς εὐθείας (ε) φέρομεν $BB' \perp (Π)$ (σχ. 452). Ἡ εὐθεῖα $AB' \equiv (ε')$ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας (ε) ἐπὶ τὸ



Σχ. 451



Σχ. 452

ἐπίπεδον (Π). Ἄς θεωρήσωμεν καὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν (ζ) τοῦ ἐπιπέδου (Π), διερχομένην διὰ τοῦ σημείου Α. Ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $ΑΓ = ΑΒ'$ καὶ ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $\widehat{ΒΑΒ'} < \widehat{ΒΑΓ}$.

$ΒΒ' < ΒΓ$, διότι ἡ $ΒΓ$ εἶναι ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $ΒΒ'Γ$ ($\widehat{Β'} = 1^\circ$). Τότε ἀπὸ τὰ τρίγωνα $ΒΑΒ'$ καὶ $ΒΑΓ$, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν $ΒΑ$ κοινὴν, $ΑΒ' = ΑΓ$ καὶ $ΒΒ' < ΒΓ$, ἔπεται ὅτι $\widehat{ΒΑΒ'} < \widehat{ΒΑΓ}$.

452. Γωνία εὐθείας καὶ ἐπιπέδου καλεῖται ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἐν λόγῳ εὐθεῖα, μετὰ τὴν προβολὴν τῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Ἡ αὐτὴ γωνία καλεῖται καὶ γωνία κλίσεως τῆς εὐθείας ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

453. Τὰ σχήματα εἰς τὴν Στερεομετρίαν. Ἡ στερεομετρία, ἀποτελοῦσα ἐπέκτασιν τῆς ἐπιπεδομετρίας, μετὰ πρῶτην σκέψιν δὲν θὰ πρέπει νὰ παρουσιάσῃ μεγαλυτέραν δυσχέρειαν εἰς τὴν ἀντιμετώπισιν τῶν θεμάτων τῆς, ἀπὸ ἐκείνην τῆς ἐπιπεδομετρίας. Παρὰ ταῦτα ὅμως, ὑπάρχει μεγαλυτέρα δυσχέρεια καὶ τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονός ὅτι δὲν ἐργαζόμεθα μετὰ αὐτὰ τὰ ἴδια στερεὰ τῆς στερεομετρίας, ἀλλὰ ἀπεικονίζομεν αὐτὰ ἐπὶ ἐπιπέδου (φύλλου χάρτου ἢ πίνακος) καὶ ἐργαζόμεθα μετὰ τὰς εἰκόνας τῶν.

Αἱ εἰκόνες τῶν στερεῶν μετὰ τὰς ὁποίας ἐργαζόμεθα, δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο, παρὰ αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ τῶν ἐν λόγῳ στερεῶν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον σχεδιάσεως. Διὰ τὴν σχεδίασιν ἐπομένως τῶν σχημάτων, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὠρισμένους ἀπαραβάτους κανόνες, ἥτοι :

i) Ἐὰν τὸ πρὸς ἀπεικόνισιν στερεὸν περιέχῃ παραλλήλους εὐθείας, αὗται θὰ σχεδιασθῶν ὡς παράλληλοι (§ 450).

ii) Τὰ μήκη ἐν γένει δὲν διατηροῦνται, ἀλλὰ προβάλλονται εἰς μικρότερα (§ 449).

iii) Δύο παράλληλα καὶ ἴσα τμήματα ἔχουν παραλλήλους καὶ ἴσας προβολὰς (διὰ τί ;)

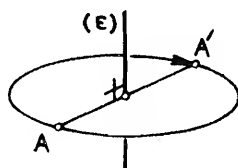
iv) Αἱ γωνίαι ἐν γένει δὲν διατηροῦνται, ἀλλὰ προβάλλονται εἰς μεγαλυτέρας ἢ μικροτέρας γωνίας καὶ τοῦτο θὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν φανταστικὴν θέσιν τοῦ στερεοῦ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον σχεδιάσεως. Τὰ ἐπίπεδα τμήματα, ἐπὶ παραδείγματι, τὰ ὁποῖα φανταζόμεθα ὡς ὀρθογώνια, τὰ σχεδιάζομεν συνήθως ὡς πλάγια παραλληλόγραμμα, δηλαδή ἐκ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν τῶν αἱ δύο ἀπέναντι προβάλλονται ὡς ἀμβλεῖαι καὶ αἱ ἄλλαι δύο ὡς ὀξεῖαι.

Ἐν τέλει, ἡ ὀρθὴ καὶ παραστατικὴ σχεδίασις τῶν σχημάτων ἐξαρτᾶται κατὰ πολὺ καὶ ἀπὸ τὴν ἐμπειρίαν τοῦ ἀσχολουμένου.

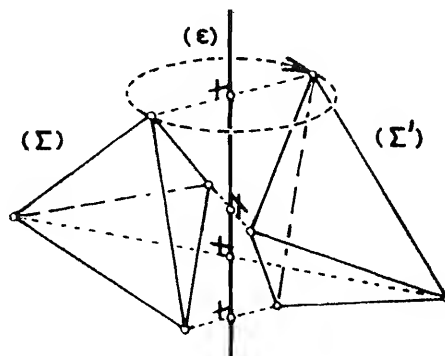
454. Ἀξονικὴ συμμετρία. Καθορίζεται ἐπακριβῶς, ὅπως καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον ὡς μετατόπισις. Οὕτω τὸ συμμετρικὸν σημείου Α, ὡς πρὸς ἄξονα εὐθεῖαν (ε) (σχ. 453), εἶναι σημεῖον Α', τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ σημείου Α περὶ τὴν εὐθεῖαν (ε), κατὰ γωνίαν 180° . Τὸ ἐπίπεδον

ἐπὶ τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ περιστροφή τοῦ A εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας (ε) . Τὸ τμήμα AA' ἔχει ὡς μεσοκάθετον τὸν ἄξονα συμμετρίας (ε)

Τὸ συμμετρικὸν (Σ') ἐνὸς στερεοῦ (Σ) ὡς πρὸς ἕνα ἄξονα συμμετρίας (ε) ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν συμμετρικῶν τῶν ση-



Σχ. 453



Σχ. 454

μείων τοῦ στερεοῦ (Σ) ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα (σχ. 454). Τὰ δύο στερεὰ (Σ) καὶ (Σ') εἶναι ἴσα, διότι τὸ (Σ') προκύπτει ἀπὸ μετατόπισιν (περιστροφήν) τοῦ στερεοῦ (Σ) .

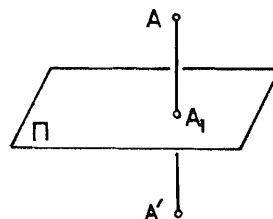
455. Ἀξων συμμετρίας στερεοῦ. Ἐὰν δι' ἓν στερεὸν (Σ) ὑπάρχῃ εὐθεῖα (ε) καὶ εἶναι τοιαύτη, ὥστε τὸ συμμετρικὸν M' τυχόντος σημείου M τοῦ στερεοῦ (Σ) , ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν (ε) , νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ (Σ) , τότε λέγομεν ὅτι τὸ στερεὸν (Σ) ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν (ε) .

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΝ (ΚΑΤΟΠΤΡΙΣΜΟΣ)

456. Ὅρισμός. Ἐστω ἐπίπεδον (Π) καὶ σημεῖον A ἐκτὸς αὐτοῦ (σχ. 455).

Συμμετρικὸν τοῦ σημείου A , ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) , καλεῖται ἓν σημεῖον A' , τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἐπίπεδον (Π) νὰ εἶναι τὸ μεσοκάθετον τοῦ τμήματος AA' .

Κατόπιν τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ, διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ συμμετρικὸν A' τοῦ σημείου A ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) , φέρομεν ἐκ τοῦ A τὴν $AA_1 \perp (\Pi)$ καὶ εἰς τὴν προέκτασιν λαμβάνομεν τμήμα $A_1A' = A_1A$.



Σχ. 455

Πόρισμα I. Τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου A' συμμετρικοῦ τοῦ A , ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) , εἶναι τὸ σημεῖον A .

Πόρισμα II. Τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π) παραμένουν ἀναλλοίωτα εἰς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὸ (Π) , ἥτοι συμπίπτουν μὲ τὰ συμμετρικά των.

457. Ὅρισμός. Συμμετρικὸν σχῆματος (Σ), ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π) καλεῖται ἓν σχῆμα (Σ'), τὸ ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Σ), ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).

Ἐὰν ὑπάρχῃ ἐπίπεδον, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον τὸ συμμετρικὸν (Σ') ἑνὸς σχήματος (Σ) συμπίπτει μὲ τὸ σχῆμα (Σ), θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σχῆμα (Σ) ἔχει ἐπίπεδον συμμετρίας.

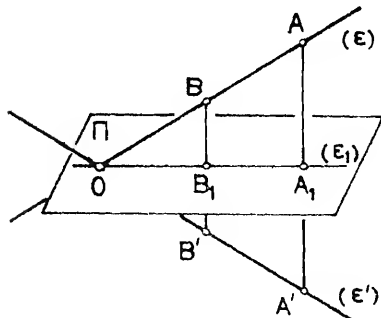
Παράδειγμα. Τὰ ἔμφυχα ὄντα τῆς φύσεως ἐν γένει ἔχουν ἐπίπεδον συμμετρίας.

458. Θεώρημα. Τὸ συμμετρικὸν εὐθείας, ὡς πρὸς ἐπίπεδον, εἶναι εὐθεῖα.

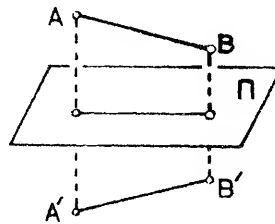
Ἀπόδειξις. Ἐστω εὐθεῖα (ϵ) καὶ (Π) τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας (σχ. 456). Λαμβάνομεν δύο σημεῖα A καὶ B τῆς εὐθείας (ϵ) καὶ κατασκευάζομεν τὰ συμμετρικά των A' καὶ B' ἀντιστοίχως, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π). Αἱ εὐθεῖαι AA' καὶ BB' τέμνουσιν τὸ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὰ σημεῖα A_1 καὶ B_1 ἀντιστοίχως, τὰ ὁποῖα καθορίζουν τὴν ὀρθὴν προβολὴν (ϵ_1) τῆς εὐθείας (ϵ) ἐπὶ τοῦ ἐπίπεδου (Π). Τότε ἡ συμμετρία τῆς εὐθείας (ϵ), ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ἀξονικὴ συμμετρία, ὡς πρὸς ἀξονα τὴν εὐθεῖαν (ϵ_1). Ἐπομένως, λόγῳ συνυπαρχούσης ἀξονικῆς συμμετρίας, τὸ συμμετρικὸν τῆς εὐθείας (ϵ), ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι εὐθεῖα (ϵ').

Πόρισμα I. Ἐὰν εὐθεῖα (ϵ) τέμνῃ ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον O , ἡ συμμετρικὴ εὐθεῖα (ϵ') τῆς (ϵ) ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) διέρχεται διὰ τοῦ σημείου O .

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα (ϵ) ἦτο παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), καὶ ἡ συμμετρικὴ τῆς θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς τὸ (Π).



Σχ. 456



Σχ. 457

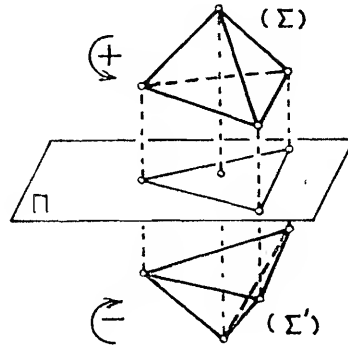
Πόρισμα II. Τὸ συμμετρικὸν εὐθύγραμμου τμήματος AB , ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π) εἶναι εὐθύγραμμον τμήμα $A'B'$, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἄκρα τὰ συμμετρικὰ τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος AB (σχ. 457) καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ AB .

Πόρισμα III. Τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π), εἶναι ἴσον τρίγωνον $A'B'\Gamma'$, διότι τὰ δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευράς των ἀντιστοίχως ἴσας. Κατὰ συνέπειαν καὶ τὸ συμμετρικὸν οἰουδήποτε ἐπιπέδου

εὐθυγράμμου σχήματος, ὡς πρὸς ἐπίπεδον, εἶναι ἴσον σχῆμα καὶ γενικώτερον τὸ συμμετρικὸν οἰουδήποτε ἐπιπέδου σχήματος εἶναι ἴσον σχῆμα.

Παρατηρήσεις.

i) Τὸ συμμετρικὸν (Σ') ἑνὸς στερεοῦ (Σ), ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), ἐν γένει δὲν εἶναι σχῆμα ἴσον πρὸς τὸ σχῆμα (Σ) καὶ τοῦτο, διότι τὰ δύο στερεὰ εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμένα (σχ. 458).



Σχ. 458

Παράδειγμα. Αἱ παλάμαι τῶν χειρῶν μας, τιθέμεναι ἀντιμέτωποι, δύνανται νὰ θεωρηθοῦν συμμετρικαὶ ἀλλήλων, ὡς πρὸς ἐνδιάμεσον ἐπίπεδον. Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι δὲν εἶναι ἴσαι, διότι, ἐὰν ᾤσαν ἄλλαι, δὲν θὰ ἠδύναντο νὰ ταυτισθοῦν τιθέμεναι ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης.

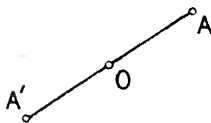
ii) Ἡ συμμετρία, ὡς πρὸς ἐπίπεδον, καλεῖται καὶ κατοπτρισμός, διότι δύο συμμετρικὰ μεταξύ των στερεὰ, ὡς πρὸς ἐπίπεδον, ἔχουν τοιαύτην σχέσιν, οἷαν σχέσιν ἔχει τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν μὲ τὸ κατοπτρικόν του εἶδωλον ἐντὸς ἐπιπέδου κατόπτρου.

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

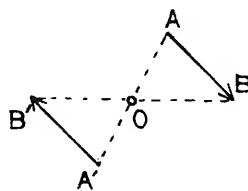
459. Ὅρισμός. Δοθέντος σημείου A καὶ σημείου O , καλουμένου κέντρου, καλοῦμεν συμμετρικὸν τοῦ σημείου A , ὡς πρὸς κέντρον τὸ σημεῖον O , ἓν σημεῖον A' τοιοῦτον, ὥστε τὸ τμήμα AA' νὰ ἔχη ὡς μέσον τὸ κέντρον O (σχ. 459).

Πόρισμα. Τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου A' , συμμετρικοῦ τοῦ A , ὡς πρὸς τὸ κέντρον O , εἶναι τὸ σημεῖον A .

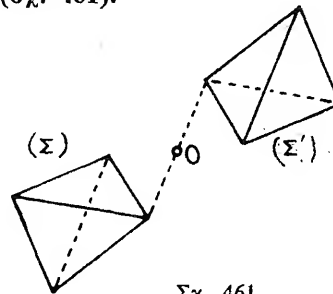
460. Ὅρισμός. Συμμετρικὸν σχήματος (Σ), ὡς πρὸς κέντρον σημεῖον O , καλεῖται ἓν σχῆμα (Σ'), τὸ ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἀπὸ τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Σ), ὡς πρὸς τὸ κέντρον O (σχ. 461).



Σχ. 459



Σχ. 460



Σχ. 461

Ἐάν τὸ σχῆμα (Σ') συνέπιπτε μὲ τὸ σχῆμα (Σ), λέγομεν ὅτι τὸ (Σ) ἔχει κέντρον συμμετρίας τὸ σημεῖον O .

461. Ἡ κεντρικὴ συμμετρία ἀπεικονίζει ἐν εὐθύγραμμον τμήμα AB εἰς ἴσον τμήμα $A'B'$ (§ 81), καὶ ἐπομένως τὰ ἐπίπεδα σχήματα γενικῶς τὰ ἀπεικονίζει εἰς ἴσα σχήματα. Ἐνα προσανατολισμένον τμήμα ὅμως \overrightarrow{AB} τὸ ἀπεικονίζει εἰς τὸ ἀντίθετόν του $\overrightarrow{A'B'}$ (σχ. 460), ἥτοι εἶναι $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$ καὶ ἐπομένως τὰ στερεὰ τὰ ἀπεικονίζει ἀντιθέτως προσανατολισμένα, ἥτοι μὴ ἐφαρμόσιμα \nleftrightarrow ὅχι ἴσα (σχ. 461).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

774. Ἐάν εὐθύγραμμον τμήμα AB προβάλλεται ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἰς τὸ $A'B'$, δείξατε ὅτι εἶναι $AB \geq A'B' \geq 0$.

775. Δείξατε ὅτι τὸ μέσον εὐθυγράμμου τμήματος προβάλλεται εἰς τὸ μέσον τῆς προβολῆς του ἐπὶ τυχὸν ἐπίπεδον.

776. Τρία σημεῖα A, B, Γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ προβάλλονται ἐπ' ἐπίπεδον (Π) εἰς τὰ A', B', Γ' ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι: $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$.

777. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), σημεῖον A ἐκτὸς αὐτοῦ καὶ σημεῖα B καὶ Γ τοῦ (Π). Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου A ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι 3λ καὶ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν $B\Gamma$ εἶναι 5λ. Ἐάν A' εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ A ἐπὶ τὸ (Π), δείξατε ὅτι: $(A'B\Gamma) = \frac{4}{5} (AB\Gamma)$.

778. Εὐθύγραμμον τμήμα AB μήκους 20cm ἔχει προβολὴν $A'B'$ ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) μήκους 10cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία κλίσεως τοῦ τμήματος, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

779. Σημεῖον A ἀπέχει ἀπὸ ἐπίπεδον (Π) 8cm καὶ σημεῖον B ἀπέχει ἀπὸ τὸ (Π) 10cm. Ἐάν ἡ γωνία κλίσεως τοῦ τμήματος AB , ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), εἶναι 30° , νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος τοῦ τμήματος AB , ὅταν: α) τὰ A καὶ B εὐρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπίπεδου (Π), β) τὰ A καὶ B εὐρίσκονται ἐκατέρωθεν τοῦ (Π).

780. Νὰ ἐξετασθῇ τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐάν ἡ γωνία κλίσεως τοῦ τμήματος AB , ὡς πρὸς τὸ (Π), εἶναι 45° .

Β'.

781. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ προβολαὶ δύο παραλλήλων καὶ ἴσων εὐθυγράμμων τμημάτων ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι ἴσαι.

782. Δίδεται ὀρθὴ γωνία \widehat{XKY} . Ἐάν ἡ μία πλευρὰ τῆς εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π), δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι ὀρθὴ γωνία.

783. Δίδεται εὐθεῖα (ϵ) καὶ σημεῖον A . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν ὀρθῶν προβολῶν τοῦ σημείου A ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, τὰ διερχόμενα διὰ τῆς εὐθείας (ϵ).

784. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο σημεῖα A καὶ B ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὐρεθῇ σημεῖον τοῦ ἐπίπεδου, τοῦ ὁποῦ τοῦ ὅποιον τὰ ὅθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

785. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα ὅταν ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B πρέπει νὰ εἶναι μεγίστη.

786. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμήμα, ἔχον ὡς μέσον δοθὲν σημεῖον O καὶ τὰ ἄκρα του νὰ εὐρίσκονται ἐπὶ εὐθείας (ϵ) καὶ ἐπὶ ἐπίπεδου (Π) ἀντιστοίχως.

787. Δίδεται ὀρθή γωνία \widehat{XKY} , τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ τέμνουν ἐπίπεδον (Π) εἰς τὰ A καὶ B . Δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἀμβλεῖα γωνία.

788. Πότε ἡ προβολὴ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι ὀξεῖα γωνία ;

789. Δίδεται ὀξεῖα γωνία \widehat{XOY} . Ἐὰν ἡ μία πλευρά της εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π) , δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ τῆς γωνίας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον εἶναι ὀξεῖα γωνία.

790. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὀρθῶν προβολῶν δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ τρεῖς εὐθείας, ἀνά δύο ὀρθογωνίους, ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ δοθέντος τμήματος.

791. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ καὶ σημεῖον Σ . Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Σ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου τὸ τετράπλευρον νὰ προβάλλεται κατὰ παραλληλόγραμμον.

792. Ὑπὸ ποίας συνθήκας ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας προβάλλεται ἐπὶ ἐπιπέδου κατὰ τὴν διχοτόμον τῆς προβολῆς της ;

793. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) . Μεταβλητὸν τμήμα σταθεροῦ μήκους λ ἔχει τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δύο ἀσυμβάτων. Δείξατε ὅτι ὑπάρχει ἐπίπεδον, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον τὸ τμήμα σχηματίζει σταθεράν γωνίαν κλίσεως καὶ προβάλλεται ἐπ' αὐτοῦ κατὰ σταθερὸν μήκος.

794. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) . Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν δύο ἄξονες συμμετρίας, ὅπου μέσῳ ἐκάστου ἐξ αὐτῶν ἡ μία ἐκ τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν ἀπεικονίζεται ἐπὶ τῆς ἄλλης.

795. Δίδεται εὐθεῖα (ϵ) καὶ σημεῖον A ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ . τόπος τῶν συμμετρικῶν τοῦ A , ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα, τὰ διερχόμενα διὰ τῆς εὐθείας (ϵ) .

796. Δίδονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) καὶ δύο σημεῖα A καὶ B ὅχι μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντομώτερος δρόμος ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B , ὅταν αὐτὸς πρέπει νὰ ἐγγίξῃ τὰ δύο ἐπίπεδα καὶ τὸ ἐντὸς τῶν ἐπιπέδων τμήμα του νὰ ἔχῃ καθωρισμένον μήκος λ .

797. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι (ϵ) καὶ (ζ) . Εὐθύγραμμον τμήμα σταθεροῦ μήκους λ ἔχει τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ . τόπος τοῦ μέσου M τοῦ τμήματος AB .

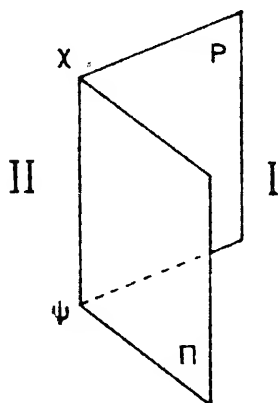
ΔΙΕΔΡΟΙ ΓΩΝΙΑΙ

462. Ὅρισμός. Δύο ἡμιεπίπεδα (Π) καὶ (P) μὲ κοινὴν ἀρχὴν εὐθεῖαν xy διαιροῦν τὸν χώρον εἰς δύο περιοχὰς I καὶ II (σχ. 462). Ἐκάστη ἐξ αὐτῶν καλεῖται διέδρος γωνία μὲ ἀκμὴν τὴν εὐθεῖαν xy καὶ μὲ ἕδρας τὰ ἡμιεπίπεδα (Π) καὶ (P)

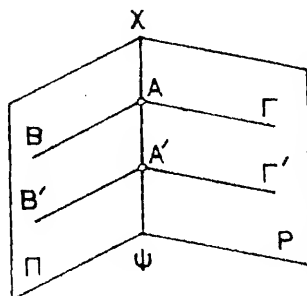
Τὴν διέδρον γωνίαν συμβολίζομεν μὲ $(\Pi)xy(P)$.

463. Ἀντίστοιχος ἐπίπεδος διέδρου. Ἐστω διέδρος γωνία $(\Pi)xy(P)$ καὶ A τυχὸν σημεῖον τῆς ἀκμῆς της xy (σχ. 463). Ἐκ τοῦ A θεωροῦμεν κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν xy , τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἕδρας τῆς διέδρου κατὰ τὰς ἡμιευθείας AB καὶ AG . Ἡ σχηματιζομένη ἐπίπεδος γωνία \widehat{BAG} εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ σημείου A ἐπὶ τῆς xy καὶ καλεῖται «ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου $(\Pi)xy(P)$ ».

Πράγματι, ἐὰν A' εἶναι ἐν ἄλλο σημεῖον τῆς ἀκμῆς xy καὶ φέρομεν ἐξ αὐτοῦ τὸ κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν xy , θὰ καθορισθῇ ἀντιστοίχως ἡ ἐπίπεδος



Σχ. 462



Σχ. 463

γωνία $B'A'\Gamma'$, ἡ ὁποία εἶναι προφανῶς ἴση μετὰ τὴν $B\hat{A}\Gamma$, ὥς ἔχουσαι τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους (§ 433).

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι αἱ πλευραὶ τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου γωνίας εὐρίσκονται ἐπὶ τῶν ἐδρῶν τῆς διέδρου καὶ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἀκμήν.

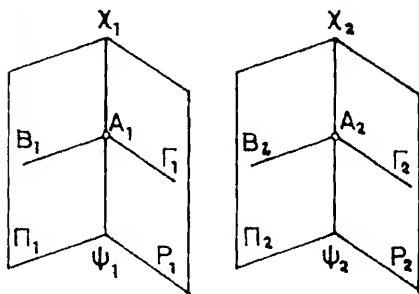
464. Θεώρημα. Ἐὰν δύο διέδροι γωνίαί $(\Pi_1)x_1y_1(P_1)$ καὶ $(\Pi_2)x_2y_2(P_2)$ εἶναι ἴσαι, τότε καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον αἱ διέδροι εἶναι ἴσαι, δύνανται νὰ ταυτισθοῦν μετὰ μετατόπισιν καὶ ἐπομένως δύνανται νὰ ἀποκτήσουν κοινὴν \Rightarrow ἴσην ἀντίστοιχον ἐπίπεδον γωνίαν, μετὰ κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμήν των.

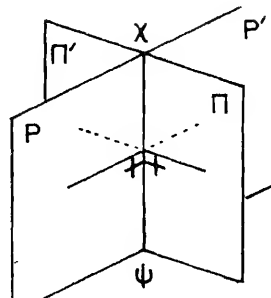
Ἀντιστρόφως. Ἐστω $B_1\hat{A}_1\Gamma_1 = B_2\hat{A}_2\Gamma_2$ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαὶ τῶν διέδρων (σχ. 464). Φανταζόμεθα μετατόπισιν τῆς ἐπιπέδου γωνίας $B_2\hat{A}_2\Gamma_2$ οὕτως, ὥστε νὰ ταυτισθῇ μετὰ τὴν $B_1\hat{A}_1\Gamma_1$. Τότε κατ' ἀνάγκην ἡ ἀκμὴ x_2y_2 θὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς ἀκμῆς x_1y_1 , διότι ἄλλως ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $B_1\hat{A}_1\Gamma_1$ θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι εὐθεῖαι εἰς τὸ σημεῖον A_1 , ὅπερ ἄτοπον. Τότε ὅμως τὸ ἡμιεπίπεδον (Π_2) εἰς τὴν νέαν θέσιν του θὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ (Π_1) , διότι θὰ ἔχη μετ' αὐτοῦ κοινὰς τὰς A_1B_1 καὶ x_1y_1 . Ὁμοίως καὶ τὸ ἡμιεπίπεδον (P_2) θὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ (P_1) . Ἄρα αἱ διέδροι εἶναι ἴσαι, ἐφ' ὅσον δύνανται νὰ ταυτισθοῦν.

465. Κατ' ἀκμήν διέδροι καλοῦνται δύο διέδροι γωνίαὶ $(\Pi)xy(P)$ καὶ $(\Pi')xy(P')$ (σχ. 465), αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν ἀκμήν xy καὶ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν ἀκμήν των xy . Ἐπομένως δύο κατ' ἀκμήν διέδροι γωνίαὶ εἶναι ἴσαι (§ 454). Αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαὶ

αὐτῶν, αἱ προκύπτουσαι ἀπὸ τὸ αὐτὸ κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν xy , εἶναι κατὰ κορυφὴν.



Σχ. 464

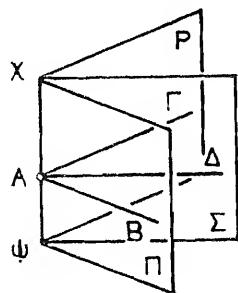


Σχ. 465

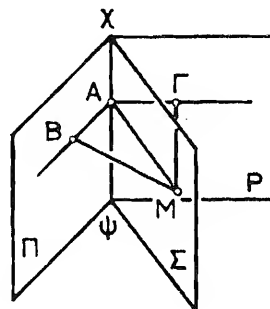
466. Διχοτομοῦν ἐπίπεδον. Ἐστω $(\Pi)xy(P)$ μία διέδρος γωνία καὶ $\widehat{BA\Gamma}$ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος αὐτῆς (σχ. 466). Ἡ διχοτόμος AD τῆς γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν xy ὡς εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου $BA\Gamma$ καὶ καθορίζει μετὰ τῆς xy ἐπίπεδον (Σ) . Τὸ ἐπίπεδον (Σ) καλεῖται ἐπίπεδον διχοτομοῦν τὴν διέδρον $(\Pi)xy(P)$ καὶ τὴν διαιρεῖ εἰς δύο ἴσας διέδρους. Πράγματι εἶναι $(\Pi)xy(\Sigma) = (P)xy(\Sigma) \iff \widehat{BA\Delta} = \widehat{GA\Delta}$.

467. Χαρακτηριστικὴ ιδιότης τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου. Πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διχοτομοῦντος διέδρον γωνίαν, ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς ἑδρας τῆς καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον ἐσωτερικὸν μιᾶς διέδρου καὶ ἰσαπέχον ἀπὸ τὰς ἑδρας τῆς ἀνήκει εἰς τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον.

Ἀπόδειξις. Ἐστω διέδρος γωνία $(\Pi)xy(P)$, (Σ) τὸ διχοτομοῦν αὐτὴν ἐπίπεδον καὶ M τυχὸν σημεῖον τοῦ (Σ) (σχ. 467). Ἐκ τοῦ M φέρομεν $MA \perp$



Σχ. 466



Σχ. 467

xy , $MB \perp (\Pi)$, $MG \perp (P) \Rightarrow AB \perp xy$ καὶ $AG \perp xy$ (θεώρ. τριῶν καθέτων), ἥτοι ἡ γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου $(\Pi)xy(P)$, ὡς καὶ αἱ \widehat{BAM} καὶ \widehat{GAM} αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῶν $(\Pi)xy(\Sigma)$ καὶ $(P)xy$

(Σ). Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον M ἀνήκει εἰς τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆς διέδρου $(\Pi)xy(P)$, ἔπεται ὅτι $\widehat{BAM} = \widehat{GAM}$. Ἀρα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα BAM καὶ GAM εἶναι ἴσα, διότι ἐπὶ πλέον ἔχουν καὶ τὴν MA κοινὴν $\Rightarrow MB = MG$.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω ὅτι αἱ ἀποστάσεις MB καὶ MG τοῦ σημείου M ἀπὸ τὰς ἑδρας τῆς διέδρου $(\Pi)xy(P)$ εἶναι ἴσαι. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ τότε τὰ αὐτὰ ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν $MB = MG$ καὶ MA κοινὴν. Ἀρα $\widehat{BAM} = \widehat{GAM}$ καὶ ἐπομένως τὸ σημεῖον M ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (Σ) τὸ διχοτομοῦν τὴν διέδρον $(\Pi)xy(P)$.

468. Μέτρησις διέδρου γωνίας. Ἐκ τῶν προηγουμένων (§ 464, 466) ἔπεται ὅτι ἡ διχοτόμησις μιᾶς διέδρου γωνίας συνεπάγεται τὴν διχοτόμησιν τῆς ἀντιστοίχου αὐτῆς ἐπιπέδου καὶ ἀντιστρόφως. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ διαίρεσις μιᾶς διέδρου εἰς n διέδρους συνεπάγεται τὴν διαίρεσιν εἰς n ἴσας ἐπιπέδους τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου. Ἀρα τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα «διέδροι γωνία» καὶ «ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι» εἶναι ἀνάλογα καὶ ἐπομένως δέχονται ἀριθμητικῶς μόνον τὰς ἰδίας μονάδας μετρήσεως. Λέγομεν, ἐπὶ παραδείγματι, ὅτι μία διέδρος γωνία εἶναι 60° , ἐὰν καὶ μόνον ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίπεδος εἶναι 60° . Εὐνόητον εἶναι ὅτι ὅλαι αἱ μονάδες μετρήσεως τῶν γωνιῶν ἔχουν τὰς ἀντιστοίχους τῶν διὰ τὴν μέτρησιν τῶν διέδρων γωνιῶν.

Αἱ πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως μεταξὺ διέδρων γωνιῶν ὡς καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διαιρέσεως διέδρου μὲ φυσικὸν ἀριθμὸν, ἀναγόνται εἰς τὰς ἀντιστοίχους πράξεις μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν.

469. Εἶδη διέδρων γωνιῶν. Ἀντιστοίχως πρὸς τὰ γνωστὰ εἶδη τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ὀρίζομεν καὶ διὰ τὰς διέδρους γωνίας :

- i) **Ὁξεῖα διέδρος**, ὅταν ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίπεδος γωνία εἶναι ὀξεῖα.
- ii) **Ὀρθὴ διέδρος**, ὅταν ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίπεδος γωνία εἶναι ὀρθή.
- iii) **Ἀμβλεῖα διέδρος** ὅταν ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίπεδος εἶναι ἀμβλεῖα γωνία.

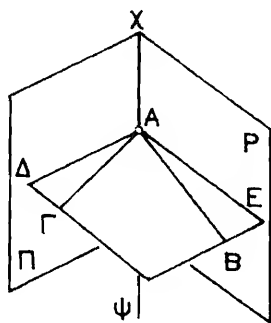
470. Συμπληρωματικαὶ διέδροι καλοῦνται δύο διέδροι γωνία, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μία ὀρθὴ διέδρος.

471. Παραπληρωματικαὶ διέδροι καλοῦνται δύο διέδροι γωνία, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μία πεπλατυσμένη διέδρος.

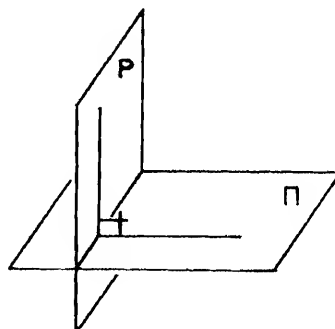
472. Θεώρημα. Ἐὰν ἀπὸ τυχόν σημείου A τῆς ἀκμῆς xy διέδρου γωνίας $(\Pi)xy(P)$ ἀχθοῦν ἡμιευθεῖαι AB καὶ AG κάθετοι ἐπὶ τὰς ἑδρας τῆς διέδρου καὶ πρὸς τὸ μέρος τῶν ἑδρῶν (P) καὶ (Π) ἀντιστοίχως, αἱ ἡμιευθεῖαι AB καὶ AG καθορίζουν διέδρον μὲ ἀκμὴν τὴν xy παραπληρωματικὴν τῆς διέδρου $(\Pi)xy(P)$.

Ἀπόδειξις. $AB \perp (\Pi) \Rightarrow AB \perp xy, AG \perp (P) \Rightarrow AG \perp xy$ (σχ. 468).

Ἄρα τὸ ἐπίπεδον τῶν ἡμιευθειῶν AB καὶ AG εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν xy καὶ ἐπομένως αἱ τομαὶ τοῦ AD καὶ AE μὲ τὰς ἑδρας τῆς διέδρου δίδουν τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον γωνίαν $\widehat{\Delta AE}$ τῆς διέδρου. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι



Σχ. 468



Σχ. 469

$$\begin{aligned} \widehat{BA\Gamma} + \widehat{\Delta AE} &= 2^{\circ}. \widehat{BA\Delta} = 1^{\circ}, \widehat{\Gamma AE} = 1^{\circ} \Rightarrow \widehat{BA\Delta} + \widehat{\Gamma AE} = 2^{\circ} \Rightarrow (\widehat{BA\Gamma} \\ &+ \widehat{\Gamma A\Delta}) + (\widehat{\Gamma AB} + \widehat{BAE}) = 2^{\circ} \Rightarrow \widehat{BA\Gamma} + (\widehat{\Gamma A\Delta} + \widehat{\Gamma AB} + \widehat{BAE}) = 2^{\circ} \\ &\Rightarrow \widehat{BA\Gamma} + \widehat{\Delta AE} = 2^{\circ}. \end{aligned}$$

ΚΑΘΕΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ

473. Ὅρισμός. Δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) καλοῦνται κάθετα μεταξύ των, ὅταν μία ἐκ τῶν τεσσάρων διέδρων, τὰς ὁποίας σχηματίζουν, εἶναι ὀρθή (σχ. 469).

Εὐνόητον εἶναι ὅτι καὶ αἱ τέσσαρες σχηματιζόμεναι διέδροι εἶναι ὀρθαί.

474. Θεώρημα. Ἐστω εὐθεῖα (ϵ) κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον (Π). Πᾶν ἐπίπεδον (P), περιέχον τὴν εὐθεῖαν (ϵ), εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

Ἀπόδειξις. Ἐστω A τὸ ἔχνος τῆς εὐθείας (ϵ) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) (σχ. 470). Τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (P), ὡς ἔχοντα κοινὸν τὸ σημεῖον A , ἔχουν κοινὴν εὐθεῖαν, τὴν xy . Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) φέρομεν εὐθεῖαν $AB \perp xy$.

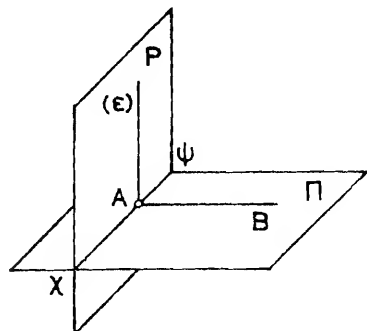
Ἐπειδὴ (ϵ) \perp (Π) \Rightarrow (ϵ) $\perp xy$ καὶ (ϵ) $\perp AB$. Ἄρα ἡ ὀρθὴ γωνία (ϵ) \widehat{AB} εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου (Π) $xy(P)$ καὶ ἐπομένως τὰ δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) εἶναι κάθετα.

475. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) εἶναι κάθετα μεταξύ των, πᾶσα εὐθεῖα (ϵ) τοῦ ἐπιπέδου (Π), κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν των xy , εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (P).

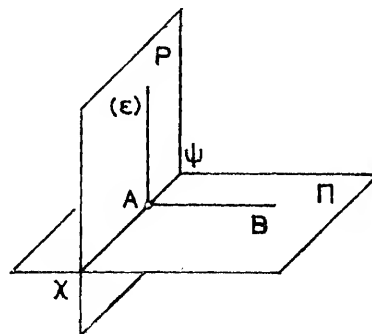
Ἀπόδειξις. Ἐστω A τὸ ἔχνος τῆς εὐθείας (ϵ) ἐπὶ τὴν xy (σχ. 471). Ἡ εὐθεῖα (ϵ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν xy τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἀρκεῖ

έπομένως νά δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ μίαν ἄλλην εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου (Π) .

Φέρομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) εὐθεῖαν $AB \perp \chi\gamma$. Τότε ἡ γωνία $(\varepsilon)\widehat{AB}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου $(\Pi)\chi\gamma(P)$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $(\Pi) \perp$



Σχ. 470

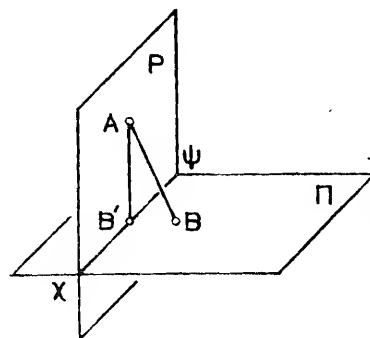


Σχ. 471

$(P) \Rightarrow (\varepsilon) \perp AB$. Ἀρα $(\varepsilon) \perp (\Pi)$, ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς δύο εὐθείας τοῦ $\chi\gamma$ καὶ AB .

476. Θεώρημα. Ἐστώσαν (Π) καὶ (P) δύο κάθετα μεταξύ των ἐπίπεδα καὶ A τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (P) . Φέρομεν $AB \perp (\Pi)$. Τότε ἡ εὐθεῖα AB ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (P) .

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα AB δὲν ἀνήκεν εἰς τὸ ἐπίπεδον (P) , δὲν θὰ ἔτεμνε τὴν τομὴν $\chi\gamma$ τῶν δύο ἐπιπέδων (σχ. 472). Θὰ ὑπῆρχεν ἐπομένως εὐθεῖα $AB' \perp \chi\gamma$. Τότε ὅμως, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ ἦτο $AB' \perp (\Pi)$, ἥτοι θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι AB καὶ AB' ἐκ τοῦ σημείου A πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) , ὅπερ ἄτοπον. Ἀρα ἡ $AB \perp (\Pi)$ ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (P) .



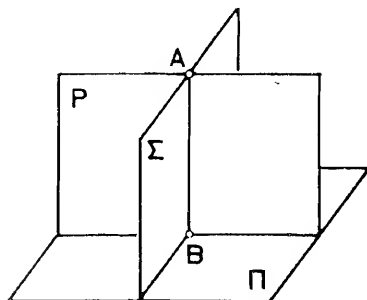
Σχ. 472

477. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα (P) καὶ (Σ) εἶναι κάθετα ἐπὶ ἐπιπέδον (Π) , τότε καὶ ἡ τομὴ των εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) .

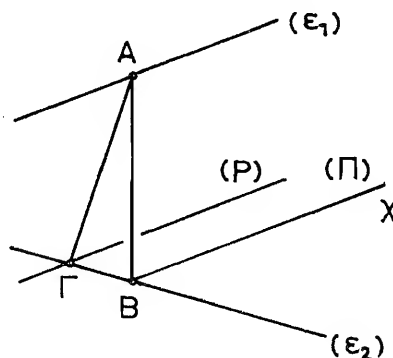
Ἀπόδειξις. Ἐστω A τυχὸν σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων (P) καὶ (Σ) (σχ. 473). Ἐξ αὐτοῦ φέρομεν $AB \perp (\Pi) \Rightarrow AB \in (P)$ καὶ $AB \in (\Sigma)$ (§ 476). Ἀρα ἡ εὐθεῖα AB εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων (P) καὶ (Σ) καὶ ἐπομένως εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) .

478. Θεώρημα. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι ὀρθογώνιοι, ὑπάρχει ἓν καὶ μόνον ἓν ἐπίπεδον διὰ τῆς μιᾶς κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ὀρθογώνιους εὐθείας (ε_1) καὶ (ε_2) (σχ. 474). Φέρομεν τὴν κοινὴν κάθετον AB αὐτῶν καὶ ἐκ τοῦ B τὴν $Bx \parallel (\varepsilon_1) \Rightarrow Bx \perp (\varepsilon_2)$. Αἱ δύο παράλληλοι Bx καὶ (ε_1) ὀρίζουν ἐπίπεδον (Π) , τὸ



Σχ. 473



Σχ. 474

ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν (ε_2) , διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν εἶναι $Bx \perp (\varepsilon_2)$, ἀφ' ἑτέρου δὲ $AB \perp (\varepsilon_2)$. Ἄρα ὑπάρχει ἐπίπεδον (Π) διὰ τῆς (ε_1) , κάθετον ἐπὶ τὴν (ε_2) .

Ἐκτὸς τοῦ (Π) δὲν ὑπάρχει ἄλλο. Διότι, ἐὰν ὑπῆρχε διὰ τῆς (ε_1) καὶ δεύτερον ἐπίπεδον $(P) \perp (\varepsilon_2)$, αὐτὸ θὰ ἔτεμνε τὴν (ε_2) εἰς σημεῖον Γ καὶ θὰ ἦτο $(\varepsilon_2) \perp (P) \Rightarrow (\varepsilon_2) \perp A\Gamma$. Αὐτὸ ὅμως εἶναι ἄτοπον, διότι ἐκ τοῦ A θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν (ε_2) , ἡ AB καὶ ἡ $A\Gamma$. Ἄρα δὲν ὑπάρχει δεύτερον ἐπίπεδον διὰ τῆς (ε_1) , κάθετον ἐπὶ τὴν (ε_2) .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

798. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα δύο κατ' ἀκμὴν διέδρων γωνιῶν ἀποτελοῦν ἓν ἐπίπεδον.

799. Ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) τμηθοῦν ὑπὸ τρίτου ἐπιπέδου (Σ) , δείξατε ὅτι αἱ ἐντὸς καὶ ἐναλλάξ σχηματιζόμεναι διέδροι εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη διέδροι εἶναι παραπληρωματικά.

800. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε εὐθεῖα, ἀνήκουσα εἰς τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον μιᾶς διέδρου γωνίας, εἶναι ἴσον κεκλιμένη πρὸς τὰς ἑδρας τῆς διέδρου.

801. Ἐὰν δύο διέδροι γωνίας ἔχουν τὰς ἑδρας των παραλλήλους, δείξατε ὅτι αἱ ἀκμαὶ των εἶναι παράλληλοι.

802. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὅποια ἰσαπέχουν ἀπὸ δύο δοθέντα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P) .

803. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα δύο ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικῶν διέδρων γωνιῶν εἶναι κάθετα.

804. Εὐθεῖα (ε) εἶναι πλαγία ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π). Δείξατε ὅτι διὰ τῆς (ε) διέρχεται ἓν μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ (Π).

805. Ἐὰν εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π), δείξατε ὅτι πᾶν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

806. Ἐὰν ἐν ἐπίπεδον (Π) εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν τομὴν δύο ἐπιπέδων (Ρ) καὶ (Σ), δείξατε ὅτι τὸ (Π) εἶναι κάθετον ἐπὶ τὰ (Ρ) καὶ (Σ).

807. Ἐὰν εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον (Π), δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ τῆς ἐπὶ ἐπίπεδον (Ρ), τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ (Π), εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων.

Β'.

808. Ἰσοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ πλευρᾶς α ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π). Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου σχηματίζῃ μὲ τὸ ἐπίπεδον (Π) γωνίαν 60° , νῦν υπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀρθῆς προβολῆς τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

809. Νὰ ἐξετασθῇ τὸ ἄνωτέρω πρόβλημα, ἐὰν ἡ σχηματιζομένη διέδρος γωνία εἶναι 45° ἢ 30° .

810. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας.

811. Δείξατε ὅτι, ἐὰν ἐν στερεὸν ἔχῃ δύο ἐπίπεδα συμμετρίας κάθετα μεταξὺ τῶν ἔχει καὶ ἄξονα συμμετρίας τὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων.

812. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), δύο σημεῖα Β καὶ Γ αὐτοῦ καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἐὰν Α' εἶναι ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π), δείξατε ὅτι εἶναι $(A'B\Gamma) = (AB\Gamma) \cdot \sin \varphi$, ὅπου φ εἶναι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ ἐπίπεδον (Π) μετὰ τοῦ ἐπιπέδου $(AB\Gamma)$.

813. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) ἔχουν λόγον $\mu : \nu$.

814. Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι ἐξ ἴσου κεκλιμένη πρὸς τὰς ἑδρας διέδρου γωνίας, δείξατε ὅτι τὰ ἴχνη τῆς ἐπὶ τῶν ἐδρῶν τῆς διέδρου ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὴν ἀκμὴν καὶ ἀντιστρόφως.

815. Δίδονται δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) τεμνόμενα καθέτως. Δείξατε ὅτι, ἵνα μία εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἶναι ὀρθογώνιος ὡς πρὸς μίαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), πρέπει καὶ ἀρκεῖ μία τοῦλάχιστον τῶν εὐθειῶν τούτων νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν $\chi\gamma$ τῶν δύο ἐπιπέδων.

816. Εὐθύγραμμον τμήμα AB ἔχει τὰ ἄκρα του Α καὶ Β ἐπὶ τῶν ἐδρῶν δοθείσης διέδρου γωνίας. Τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆς διέδρου τέμνει τὸ τμήμα AB εἰς σημεῖον Γ. Δείξατε ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τὰ Α καὶ Β εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τῶν Α καὶ Β ἀπὸ τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου.

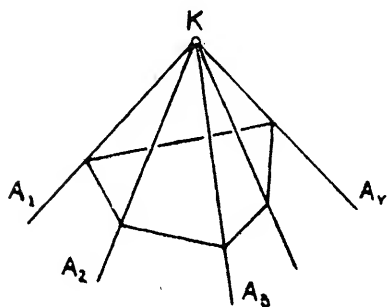
817. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν δοθέντος εὐθύγραμμου τμήματος ἐπὶ τρία ἐπίπεδα, ἀνὰ δύο κάθετα, ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον τετράγωνον τοῦ δοθέντος τμήματος.

ΣΤΕΡΕΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

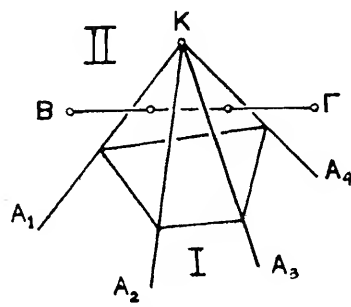
479. Ὅρισμός. Μὲ ἀρχὴν σημεῖον Κ θεωροῦμεν μίαν διαδοχὴν ἡμιευθειῶν $KA_1, KA_2, KA_3, \dots, KA_n, KA_1$, $n \geq 3$, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἀνὰ τρεῖς διαδοχικαί ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (σχ. 475). Τὸ σύνολον τῶν (ἐπιπέδων) γωνιῶν μὲ πλευρὰς δύο διαδοχικὰς ἡμιευθείας ἀπαρτίζει ἓν στερεὸν σχῆμα, τὸ ὁποῖον καλεῖται n -εδρος στερεά γωνία.

Τὸ σημεῖον K καλεῖται **κορυφή** τῆς στερεᾶς γωνίας, αἱ ἡμιευθεῖαι $KA_1, KA_2, KA_3, \dots, KA_n$ καλοῦνται **ἀκμαί** τῆς καὶ αἱ γωνίαι $\widehat{A_1KA_2}, \widehat{A_2KA_3}, \dots, \widehat{A_nKA_1}$ **ἔδραι** αὐτῆς.

Τὰ κύρια στοιχεῖα μιᾶς n -έδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι αἱ n ἔδραι τῆς (ἐπίπε-



Σχ. 475



Σχ. 476

δοι γωνίαι) καὶ αἱ n διέδροι αὐτῆς μετὰ ἀκμᾶς τὰς ἀκμᾶς τῆς στερεᾶς γωνίας. **Διαγώνιον** ἐπίπεδον καλεῖται κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ἀπὸ δύο μὴ διαδοχικὰς ἀκμᾶς. Τὰ διαγώνια ἐπίπεδα μιᾶς n -έδρου γωνίας εἶναι τόσα, ὅσας καὶ αἱ διαγώνιοι ἐνὸς n -γώνου, τὸ ὁποῖον προκύπτει μετὰ ἐπίπεδον τομῇ τῆς διέδρου, ἥτοι $\frac{n(n-3)}{2}$.

Μία n -έδρος στερεὰ γωνία καλεῖται **κανονική**, ἐὰν ἔχῃ ὅλας τὰς ἔδρας τῆς ἴσας καὶ ὅλας τὰς διέδρους τῆς ἐπίσης ἴσας.

480. Κυρτὴ στερεὰ γωνία. Μία στερεὰ γωνία καλεῖται **κυρτή**, ἐὰν εἶναι δυνατόν ὅλας αἱ ἔδραι τῆς νὰ τμηθοῦν ὑπὸ ἐπιπέδου καὶ ἡ τομὴ νὰ εἶναι κυρτὸν πολύγωνον (σχ. 476).

Μία κυρτὴ στερεὰ γωνία διαιρεῖ τὸν χώρον εἰς δύο περιοχάς I καὶ II. Ἐξ αὐτῶν ἡ περιοχή I ἔχει τὴν ἐξῆς ιδιότητα : Διὰ κάθε ζεύγος σημείων τῆς, τὸ εὐθύγραμμον τμήμα μετὰ ἄκρα τὰ σημεῖα ταῦτα, ἀνήκει εἰς τὴν περιοχήν. Ἡ περιοχή αὕτη καλεῖται **κυρτὴ περιοχή** τοῦ χώρου καὶ ἀποτελεῖ τὸ ἐσωτερικὸν τῆς κυρτῆς στερεᾶς γωνίας. Ἡ ἄλλη περιοχή II, ὅπου ὑπάρχει ἐν τοῦλάχιστον ζεύγος σημείων $\{B, \Gamma\}$ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τμήμα $B\Gamma$ δὲν ἀνήκει ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὴν περιοχήν II, καλεῖται **μὴ κυρτὴ περιοχή** καὶ ἀποτελεῖ τὸ ἐξωτερικὸν τῆς κυρτῆς στερεᾶς γωνίας.

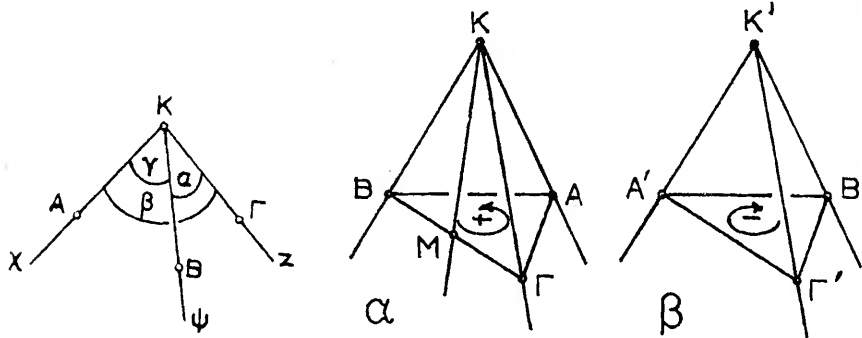
Αἱ δύο περιοχαί, εἰς τὰς ὁποίας μία μὴ κυρτὴ στερεὰ γωνία διαιρεῖ τὸν χώρον, εἶναι μὴ κυρταί περιοχαί.

481. Τριέδροι στερεαί γωνίαι. Εἶναι αἱ ἀπλούστεραι, ἀλλὰ καὶ αἱ βασικώτεραι ἐκ τῶν στερεῶν (πολυέδρων) γωνιῶν, διότι πᾶσα πολυέδρος γωνία δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς τριέδρους, μετὰ διαγώνια ἐπίπεδα ἐκ μιᾶς ἀκμῆς τῆς.

Ἐστω $K.xyz$ μία τριέδρος στερεά γωνία (σχ. 477). Ἄν τοποθετήσωμεν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τῆς τρία σημεῖα A, B καὶ Γ , τότε τὰ ἐξ κύρια στοιχεῖα τῆς τὰ συμβολίζομεν, ὡς ἐξῆς. Τὰς διέδρους γωνίας τῆς με $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ καὶ τὰς ἑδρας τῆς με $\widehat{\alpha}$, τὴν εὗρισκομένην ἀπέναντι τῆς διέδρου \widehat{A} , με $\widehat{\beta}$ καὶ $\widehat{\gamma}$ ἀντιστοίχως τὰς ἄλλας.

Τὰ θεωρήματα, τὰ ὅποια ἀφοροῦν τὰς τριέδρους γωνίας, εἶναι ἀντίστοιχα ἐκεῖνων, τὰ ὅποια ἀφοροῦν τὰ τρίγωνα, ὡς θὰ φανῇ εἰς τὰ ἐπόμενα καὶ αὐτὸ διευκολύνει εἰς τὴν ἀπομνημόνευσιν.

482. Προσανατολισμός τριέδρου στερεάς γωνίας. Ἄς θεωρήσωμεν τριέδρον στερεάν γωνίαν με κορυφὴν K (σχ. 478α). Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τῆς λαμβάνομεν τρία σημεῖα A, B, Γ καὶ θεωροῦμεν κινητὸν σημεῖον M , διαγράφον τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ κατὰ μίαν ὀρισμένην φορὰν διαγραφῆς,



Σχ. 477

Σχ. 478

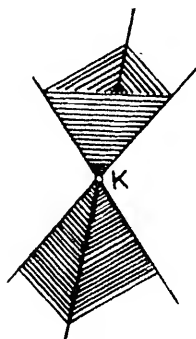
ἔστω τὴν $AB\Gamma A$. Τότε ἡ τριέδρος στερεά γωνία K θεωρεῖται προσανατολισμένη, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι διαγράφεται ὑπὸ τῆς ἡμιευθείας KM κατὰ τὴν φορὰν $AB\Gamma A$. Εἶναι φανερόν ὅτι δύο εἶναι αἱ δυναταὶ φοραὶ διαγραφῆς τῆς στερεάς γωνίας K , ὑπὸ τὴν ἔννοιαν $AB\Gamma A$ ἢ ὑπὸ τὴν ἔννοιαν $A\Gamma B A$. Μία ἐξ αὐτῶν, αὐθαριέτως ἐκλεγεῖσα, καλεῖται θετικὴ καὶ ἡ ἄλλη (ἀντίθετος τῆς πρώτης) ἀρνητικὴ. Αὐτό, ποῦ κυρίως μᾶς ἐνδιαφέρει, εἶναι δύο τριέδροι στερεαὶ γωνίαι ἐὰν εἶναι ὁμοιοστρόφως ἢ ἑτεροστρόφως προσανατολισμέναι, δηλαδὴ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ. Εἰς τὸ σχῆμα 478 αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι $K.AB\Gamma$ καὶ $K'.A'B'\Gamma'$ εἶναι ἑτεροστρόφως προσανατολισμέναι.

483. Κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι καλοῦνται δύο στερεαὶ γωνίαι με κοινὴν κορυφὴν K καὶ συμμετρικαὶ μεταξύ των ὡς πρὸς τὴν κοινὴν κορυφὴν των (σχ. 479).

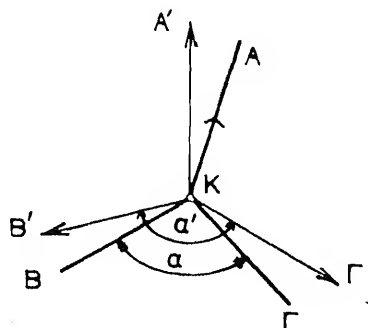
Δύο κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι ἔχουν τὰς ἑδρας των ἀντιστοίχως ἴσας καὶ τὰς διέδρους των ἐπίσης ἴσας, ἀλλὰ αἱ στερεαὶ γωνίαι δὲν εἶναι ἴσαι (ὑπὸ τὴν ἔννοιαν μὴ ἐφαρμοσίμοι), διότι εἶναι ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ (§ 461)

484. Παραπληρωματικὴ τριέδρου στερεάς γωνίας. Ἐστώ $K.AB\Gamma$

μία τριέδρος στερεᾶ γωνία (σχ. 480). Φέρομεν ἡμιευθεῖαν KA' κάθετον ἐπὶ τὴν ἑδραν BKG καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς ἀκμῆς KA . Ὀμοίως φέρομεν $KB' \perp AKG$ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς KB , ὡς ἐπίσης καὶ $KG' \perp AKB$ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς KG . Αἱ τρεῖς ἡμιευθεῖαι KA' , KB' καὶ KG' ὀρίζουν τριέδρον στερεᾶν γωνίαν, ἥ ὁποία καλεῖται παραπληρωματικὴ τῆς τριέδρου $K.ABG$.



Σχ. 479



Σχ. 480

Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τῆς παραπληρωματικῆς τριέδρου μιᾶς δοθείσης τριέδρου στερεᾶς γωνίας ἔπονται τὰ ἑξῆς :

i) Ἡ παραπληρωματικὴ $K.A'B'G'$ τῆς $K.ABG$ ὀρίζεται κατὰ ἓνα μόνον τρόπον καὶ ἐπομένως εἶναι μοναδική.

ii) Ἐκάστη ἑδρα τῆς $K.A'B'G'$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἀντιστοίχου διέδρου τῆς $K.ABG$, ἥτοι εἶναι $\hat{\alpha}' + \hat{A} = 2\text{r}$, $\hat{\beta}' + \hat{B} = 2\text{r}$, $\hat{\gamma}' + \hat{\Gamma} = 2\text{r}$ (διατί ;) (§ 472).

iii) Ἡ τριέδρος $K.ABG$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς $K.A'B'G'$. Πράγματι, εἶναι $KB' \perp AKG \Rightarrow KB' \perp KA$ (1) καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς KB καὶ $KG' \perp AKB \Rightarrow KG' \perp KA$ (2) καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς KG . Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται $KA \perp B'KG'$ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς KA' . Ὀμοίως εἶναι $KB \perp A'KG'$ καὶ $KG \perp A'KB'$ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῶν KB' καὶ KG' ἀντιστοίχως. Ἀρα ἡ $K.ABG$ εἶναι ἡ παραπληρωματικὴ τῆς $K.A'B'G'$ (ἔρα ἡ ἔννοια τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας εἶναι συμμετρικὴ καὶ διὰ τὰς τριέδρους).

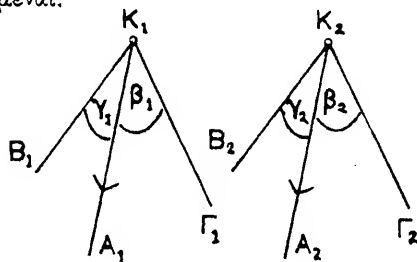
iv) Ἡ τριέδρος $K.ABG$, ὡς παραπληρωματικὴ τῆς $K.A'B'G'$, εἶναι τοιαύτη, ὥστε : $\hat{\alpha} + \hat{A}' = 2\text{r}$, $\hat{\beta} + \hat{B}' = 2\text{r}$, $\hat{\gamma} + \hat{\Gamma}' = 2\text{r}$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΤΑΣ ΤΡΙΕΔΡΟΥΣ ΣΤΕΡΕΑΣ

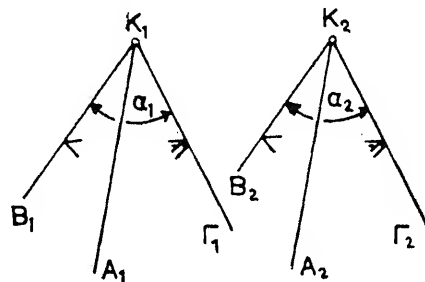
485. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τριέδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχουν δύο ἑδρας ἀντιστοίχως ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων ἑδρῶν περιεχομένας διέδρους ἴσας, αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ ἡ μία ἴσεται πρὸς τὴν κατὰ κορυ-

φήν τῆς ἄλλης, ἀναλόγως τοῦ ἔαν εἶναι ὁμοιοστρόφως ἢ ἑτεροστρόφως προσανατολισμέναι.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ δύο τριέδροι στερεαὶ γωνίαι μὲ $\widehat{\beta}_1 = \widehat{\beta}_2$, $\widehat{\gamma}_1 = \widehat{\gamma}_2$, $\widehat{\alpha}_1 = \widehat{\alpha}_2$ καὶ ἐπὶ πλέον τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ (σχ. 481). Αἱ δύο τριέδροι προφανῶς δύνανται νὰ ταυτισθοῦν μὲ μετατόπισιν τοιαύτην, ὥστε νὰ συμπίσουν αἱ δύο ἴσαι διέδροι \widehat{A}_1 καὶ \widehat{A}_2 . Διότι αὐτὸ θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν νὰ συμπίσουν καὶ αἱ ἐκατέρωθεν αὐτῶν ἴσαι ἔδραι $\widehat{\beta}_1$, $\widehat{\beta}_2$ καὶ $\widehat{\gamma}_1$, $\widehat{\gamma}_2$. Ἀρα αἱ τριέδροι εἶναι ἴσαι. Ἐὰν αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ, τότε ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης, διότι δύο κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι.



Σχ. 481



Σχ. 482

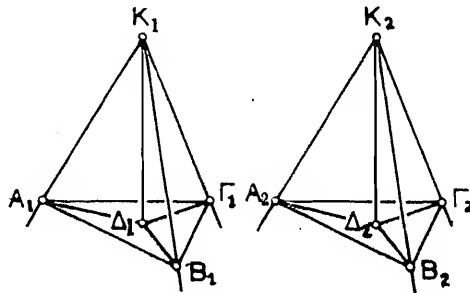
486. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τριέδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχουν μίαν ἔδραν ἀντιστοίχως ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς τὴν ἴσην ἔδραν διέδρους γωνίας ἀντιστοίχως ἴσας, αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης, ἀναλόγως τοῦ ἔαν εἶναι ὁμοιοστρόφως ἢ ἑτεροστρόφως προσανατολισμέναι.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ αἱ δύο τριέδροι μὲ $\widehat{\alpha}_1 = \widehat{\alpha}_2$, $\widehat{\beta}_1 = \widehat{\beta}_2$, $\widehat{\gamma}_1 = \widehat{\gamma}_2$ καὶ ἐπὶ πλέον τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ (σχ. 482). Αἱ δύο τριέδροι προφανῶς δύνανται νὰ ταυτισθοῦν μὲ μετατόπισιν τοιαύτην, ὥστε νὰ συμπίσουν αἱ ἴσαι ἔδραι $\widehat{\alpha}_1$ καὶ $\widehat{\alpha}_2$. Διότι αὐτὸ θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν νὰ συμπίσουν καὶ αἱ ἐκατέρωθεν αὐτῶν ἴσαι διέδροι $\widehat{\beta}_1$, $\widehat{\beta}_2$ καὶ $\widehat{\gamma}_1$, $\widehat{\gamma}_2$. Ἀρα αἱ τριέδροι εἶναι ἴσαι. Ἐὰν αἱ δύο τριέδροι στερεαὶ γωνίαι ᾗσαν ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ, τότε ἡ μία θὰ ᾗτο ἴση μὲ τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης.

487. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τριέδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχουν τὰς τρεῖς ἔδρας τῶν ἀντιστοίχως ἴσας, αἱ τριέδροι στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης, ἀναλόγως τοῦ ἔαν εἶναι ὁμοιοστρόφως ἢ ἑτεροστρόφως προσανατολισμέναι.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ αἱ τριέδροι στερεαὶ γωνίαι μὲ $\widehat{\alpha}_1 = \widehat{\alpha}_2$, $\widehat{\beta}_1 = \widehat{\beta}_2$ καὶ $\widehat{\gamma}_1 = \widehat{\gamma}_2$ (σχ. 483). Δὲν βλέπεται ἡ γενικό-

της, ἐὰν ἐπὶ πλέον ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι $K_1A_1 = K_1B_1 = K_1\Gamma_1 = K_2A_2 = K_2B_2 = K_2\Gamma_2$. Τότε εἶναι προφανῶς $A_1\overset{\Delta}{K}_1B_1 = A_2\overset{\Delta}{K}_2B_2$, $B_1\overset{\Delta}{K}_1\Gamma_1 = B_2\overset{\Delta}{K}_2\Gamma_2$, $\Gamma_1\overset{\Delta}{K}_1A_1 = \Gamma_2\overset{\Delta}{K}_2A_2$ ὡς ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσην. Ἄρα $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2$, $\Gamma_1A_1 = \Gamma_2A_2 \Rightarrow A_1\overset{\Delta}{B}_1\Gamma_1 = A_2\overset{\Delta}{B}_2\Gamma_2$. Φέρομεν $K_1\Delta_1 \perp (A_1B_1\Gamma_1) \Rightarrow$ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $K_1A_1\Delta_1$, $K_1B_1\Delta_1$, $K_1\Gamma_1\Delta_1$ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ἴσας ὑποτείνουσας καὶ τὴν $K_1\Delta_1$ κοινὴν $\Rightarrow \Delta_1A_1 = \Delta_1B_1 = \Delta_1\Gamma_1$, ἥτοι τὸ Δ_1 εἶναι περίκεντρον τοῦ τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$. Ὀμοίως φέρομεν τὴν $K_2\Delta_2 \perp (A_2B_2\Gamma_2)$ καὶ τὸ Δ_2 θὰ εἶναι τὸ περίκεντρον τοῦ τριγώνου $A_2B_2\Gamma_2$. Ἐξ αὐτοῦ ἐπεταὶ ὅτι μετατοπίζοντες τὴν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τρίγωνον $A_1B_1\Gamma_1$ νὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ ἴσου τοῦ $A_2B_2\Gamma_2$ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σημεῖον Δ_1 θὰ συμπίσῃ μετὰ τοῦ Δ_2 . Ἐπὶ πλέον ἀπὸ τὴν παρατήρησιν ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $K_1A_1\Delta_1$ καὶ $K_2A_2\Delta_2$ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα $K_1A_1 = K_2A_2$ καὶ $\Delta_1A_1 = \Delta_2A_2$, ἐπεταὶ ὅτι $\Delta_1K_1 = \Delta_2K_2$. Ἄρα εἰς τὴν μετατόπισιν ἡ κορυφὴ K_1 θὰ συμπίσῃ μετὰ τῆς K_2 . Ἐπομένως, αἱ τριέδροι εἶναι ἴσαι, ἐφ' ὅσον δύνανται νὰ ταυτισθοῦν. Ἐὰν αἱ δύο τριέδροι εἶναι ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ, τότε ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης.



Σχ. 483

488. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τριέδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχουν τὰς τρεῖς διέδρους των ἀντιστοίχως ἴσας, εἶναι ἴσαι ἢ ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης, ἀνάλογως τοῦ ἐὰν εἶναι ὁμοιοστρόφως ἢ ἑτεροστρόφως προσανατολισμένοι.

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ αἱ δύο τριέδροι στερεαὶ γωνίαι μὲ $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$ (σχ. 483). Φανταζόμεθα τὰς παραπληρωματικὰς αὐτῶν τριέδρους (§ 484), αἱ ὁποῖαι κατ' ἀνάγκην θὰ ἔχουν τὰς ἑδρας των ἴσας, ἐφ' ὅσον αἱ ἀρχικαὶ ἔχουν τὰς διέδρους των ἴσας καὶ ἐπομένως, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ εἶναι ἴσαι. Τότε ὅμως καὶ αἱ τριέδροι $K_1.A_1B_1\Gamma_1$, $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ θὰ εἶναι ἴσαι ὡς παραπληρωματικαὶ ἴσων τριέδρων. Ἐὰν αἱ δύο τριέδροι εἶναι ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ, τότε ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης.

ΑΝΙΣΟΤΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΣΤΕΡΕΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

489. Θεώρημα. Εἰς πᾶσαν τριέδρον στερεὰν γωνίαν ἐκάστη ἑδρα εἶναι :

i) Μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

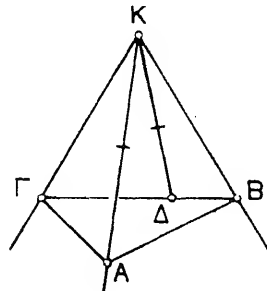
ii) Μεγαλύτερα τῆς ἀπολύτου διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων.

Ἀπόδειξις. i) Τὸ θεώρημα ἔχει προφανῶς ἀνάγκη ἀποδείξεως μόνον διὰ τὴν μεγαλύτεραν ἑδραν (σχ. 484). Ἄς θεωρήσωμεν ὅτι εἶναι: $\widehat{\alpha} \geq \widehat{\beta}$ καὶ $\widehat{\alpha} \geq \widehat{\gamma}$. Ἐντὸς τῆς ἑδρας α λαμβάνομεν ἡμισυθεῖαν $K\Delta$, τοιαύτην ὥστε νὰ εἶναι: $\widehat{ΓΚΔ} = \widehat{ΓΚΑ} = \widehat{\beta} \Rightarrow \widehat{ΒΚΔ} = \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}$ (1). Δὲν βλάπτεται ἡ γενικότης, ἐὰν θεωρήσωμεν ὅτι εἶναι $KA = K\Delta$ καὶ ὅτι τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ εἶναι συνεπίπεδα. Τότε εἶναι $\triangle ΓΚΑ = \triangle ΓΚΔ$, ὡς ἔχοντα τὴν $ΓΚ$ κοινήν, $KA = K\Delta$ καὶ $\widehat{ΓΚΑ} = \widehat{ΓΚΔ}$. Ἄρα $\Gamma A = \Gamma \Delta \Rightarrow \Delta B = \Gamma B - \Gamma A$ (2). Ἐκ τοῦ $\triangle AB\Gamma$ λαμβάνομεν: $AB > \Gamma B - \Gamma A$ (3). Ἡ σχέσις (3), λόγῳ τῆς (2) γράφεται $AB > \Delta B \Rightarrow \widehat{ΒΚΑ} > \widehat{ΒΚΔ}$, διότι τὰ τρίγωνα BKA καὶ BKD ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς τρίτας πλευρὰς τῶν ἀνίσους. Ἄρα $\widehat{\gamma} > \widehat{ΒΚΔ}$ καὶ λόγῳ τῆς σχέσεως (1) $\Rightarrow \widehat{\gamma} > \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} \Rightarrow \widehat{\alpha} < \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}$. Ἐπίσης εἶναι $\widehat{\beta} < \widehat{\alpha} + \widehat{\gamma}$ καὶ $\widehat{\gamma} < \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}$.

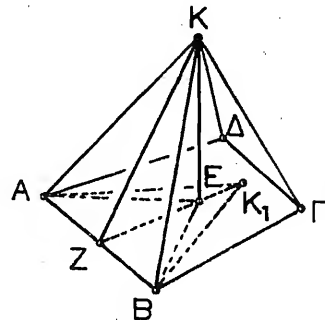
ii) Ἀπεδείχθη ὅτι εἶναι $\widehat{\beta} < \widehat{\alpha} + \widehat{\gamma} \Rightarrow \widehat{\alpha} > \widehat{\beta} - \widehat{\gamma}$ (4) καὶ $\widehat{\gamma} < \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} \Rightarrow \widehat{\alpha} > \widehat{\gamma} - \widehat{\beta}$ (5). Ἐκ τῶν σχέσεων (4) καὶ (5) ἔπεται ὅτι $\widehat{\alpha} > |\widehat{\beta} - \widehat{\gamma}|$. Ὁμοίως εἶναι $\widehat{\beta} > |\widehat{\alpha} - \widehat{\gamma}|$ καὶ $\widehat{\gamma} > |\widehat{\alpha} - \widehat{\beta}|$.

Αἱ ἀνωτέρω ἑξ ἀνισοτικά σχέσεις δύνανται νὰ συγχωνευθοῦν εἰς τὴν διπλὴν ἀνισοτικὴν σχέσιν: $|\widehat{\beta} - \widehat{\gamma}| < \widehat{\alpha} < \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}$.

490. Θεώρημα. Πάσης πολυέδρου κυρτῆς στερεᾶς γωνίας, τὸ ὅθροισμα τῶν ἑδρῶν τῆς εἶναι μικρότερον τῶν 4° .



Σχ. 484



Σχ. 485

Ἐστω ἡ κυρτὴ στερεὰ γωνία $K.AB\Gamma\Delta$. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι :

$$\widehat{ΑΚΒ} + \widehat{ΒΚΓ} + \widehat{ΓΚΔ} + \widehat{ΔΚΑ} < 4^\circ$$

Ἀπόδειξις. Ἐντὸς τῆς στερεᾶς γωνίας λαμβάνομεν ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα KE καὶ ἐκ τοῦ E φέρομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν KE , τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἀκμὰς εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ (σχ. 485) καὶ οὕτω σχηματίζεται τὸ κυρτὸν πολύγωνον $AB\Gamma\Delta$. (Τὴν θέσιν τῆς KE τὴν ἐκλέγομεν, ὥστε τὸ

ἐκ τοῦ Ε ἀγόμενον κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν ΚΕ νὰ τέμνη ὅλας τὰς ἀκμὰς τῆς στερεᾶς γωνίας). Φέρομεν $EZ \perp AB$ καὶ ἄρα $KZ \perp AB$. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΕΚΖ ἔχομεν $ZE < ZK$. Ἄν περιστρέψωμεν τὸ τρίγωνον ΚΑΒ περὶ τὴν ΑΒ οὕτως, ὥστε τὸ ἐπίπεδόν του νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ, τότε ἡ ΖΚ, μένουσα κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΖΕ καί, ἐπειδὴ εἶναι $ZE < ZK$, ἄρα τὸ Κ θὰ πέσῃ εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΖΕ, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Κ₁. Φέρομεν καὶ τὰς ΕΑ καὶ ΕΒ. Ἔχομεν (§ 116).

$$\widehat{AK_1Z} < \widehat{AEZ}, \quad \widehat{ZK_1B} < \widehat{ZEB}.$$

Καὶ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$(1) \quad \widehat{AK_1B} < \widehat{AEB}, \quad \text{ἤτοι} \quad \widehat{AKB} < \widehat{AEB}.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι εἶναι :

$$(2) \quad \widehat{BK\Gamma} < \widehat{BEG}, \quad \widehat{K\Delta\Gamma} < \widehat{GED}, \quad \widehat{\Delta KA} < \widehat{\Delta EA}.$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ὁμοιομόρφους ἀνισότητας (1) καὶ (2) εὐρίσκομεν :

$$(3) \quad \widehat{AKB} + \widehat{BK\Gamma} + \widehat{K\Delta\Gamma} + \widehat{\Delta KA} < \widehat{AEB} + \widehat{BEG} + \widehat{GED} + \widehat{\Delta EA}$$

καί, ἐπειδὴ αἱ περὶ τὸ Ε γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 4 ὀρθὰς γωνίας, ἡ (3) γίνεται :

$$\widehat{AKB} + \widehat{BK\Gamma} + \widehat{K\Delta\Gamma} + \widehat{\Delta KA} < 4L$$

★ 491. Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν τὸ θεώρημα δύναται νὰ ἀποδειχθῇ, ὡς ἀκολούθως :

Ἀπόδειξις. Ἐστω ἡ κυρτὴ στερεὰ γωνία $KA_1A_2...A_n$ (σχ. 486), ὅπου τὰ σημεῖα $A_1, A_2, ..., A_n$ εὐρίσκονται ἐπὶ ἐπιπέδου τομῆς. Θὰ συμβολίσωμεν μὲ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ τὰς ἑδρας τῆς στερεᾶς γωνίας καὶ μὲ $\widehat{A_1}, \widehat{A_2}, ..., \widehat{A_n}$ τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου $A_1A_2A_3...A_n$ ἀντιστοίχως. Τότε, ἀπὸ τὰ τρίγωνα $KA_1A_2, KA_2A_3, ..., KA_nA_1$, ἔχομεν :

$$\alpha_1 = 2L - (\widehat{KA_1A_2} + \widehat{KA_2A_1}), \quad \alpha_2 = 2L - (\widehat{KA_2A_3} + \widehat{KA_3A_2}), \quad ..., \quad \alpha_n = 2L - (\widehat{KA_nA_1} + \widehat{KA_1A_n}).$$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἀνωτέρω ν ἰσότητας καὶ λαμβάνομεν :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 2nL - (\widehat{KA_1A_2} + \widehat{KA_2A_1} + \widehat{KA_2A_3} + \widehat{KA_3A_2} + ... + \widehat{KA_nA_1} + \widehat{KA_1A_n}) \quad (1).$$

Τὰ σημεῖα $A_1, A_2, ..., A_n$ εἶναι κορυφαὶ τριέδρων στερεῶν γωνιῶν καὶ ἐπομένως (§ 485) θὰ εἶναι :

$$\widehat{A_1} < \widehat{KA_1A_n} + \widehat{KA_1A_2}, \quad \widehat{A_2} < \widehat{KA_2A_1} + \widehat{KA_2A_3}, \quad ..., \quad \widehat{A_n} < \widehat{KA_nA_{n-1}} + \widehat{KA_nA_1}.$$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἀνωτέρω ν ἀνισότητας καὶ λαμβάνομεν :

$$\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + ... + \widehat{A_n} < \widehat{KA_1A_2} + \widehat{KA_2A_1} + \widehat{KA_2A_3} + \widehat{KA_3A_2} + ... + \widehat{KA_nA_1} + \widehat{KA_1A_n}.$$

Γνωρίζομεν ὅτι $A_1 + A_2 + ... + A_n = (2n - 4)L$ καὶ ἐπομένως ἡ τελευταία ἀνισότης γράφεται :

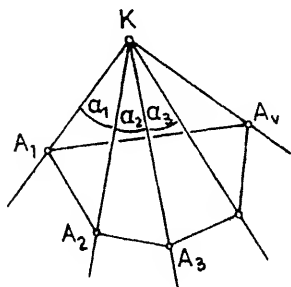
$$(2n - 4)L < \widehat{KA_1A_2} + \widehat{KA_2A_1} + \widehat{KA_2A_3} + \widehat{KA_3A_2} + ... + \widehat{KA_nA_1} + \widehat{KA_1A_n} \quad (2)$$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) καὶ λαμβάνομεν :

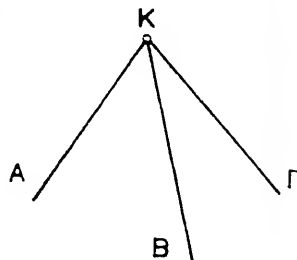
$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n + (2n - 4)L < 2nL \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_n < 4L.$$

492. Θεώρημα. Εἰς πᾶσαν τριέδρον στερεάν γωνίαν τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν της εὐρίσκεται μεταξὺ 2 καὶ 6 ὀρθῶν γωνιῶν, ἐκάστη δὲ αὐξανόμενη κατὰ 2° ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων διέδρων.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $K.AB\Gamma$ μία τριέδρος στερεὰ γωνία (σχ. 487). Ἄς



Σχ. 486



Σχ. 487

φαντασθῶμεν τὴν παραπληρωματικὴν της $K.A'B'\Gamma'$ (§ 484), τῆς ὁποίας αἱ ἔδραι εἶναι $\hat{\alpha}', \hat{\beta}', \hat{\gamma}'$. Γνωρίζομεν ὅτι $\hat{A} + \hat{\alpha}' = 2^\circ$, $\hat{B} + \hat{\beta}' = 2^\circ$, $\hat{\Gamma} + \hat{\gamma}' = 2^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{\alpha}' + \hat{B} + \hat{\beta}' + \hat{\Gamma} + \hat{\gamma}' = 6^\circ$ (1) $\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} < 6^\circ$ (2). Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα γνωρίζομεν ὅτι εἶναι $\hat{\alpha}' + \hat{\beta}' + \hat{\gamma}' < 4^\circ \Rightarrow 4^\circ > \hat{\alpha}' + \hat{\beta}' + \hat{\gamma}'$ (3). Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς σχέσεις (1) καὶ (3) καὶ λαμβάνομεν: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\alpha}' + \hat{\beta}' + \hat{\gamma}' + 4^\circ > 6^\circ + \hat{\alpha}' + \hat{\beta}' + \hat{\gamma}' \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} > 2^\circ$. Αἱ ἀνισότητες (2) καὶ (4) συγχωνεύονται εἰς τὴν διπλὴν ἀνισότητα $2^\circ < \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} < 6^\circ$.

Ἐπίσης εἶναι (§ 489) $\hat{\beta}' + \hat{\gamma}' > \hat{\alpha}' \Rightarrow 2^\circ - \hat{B} + 2^\circ - \hat{\Gamma} > 2^\circ - \hat{A} \Rightarrow \hat{A} + 2^\circ > \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Ὀμοίως εὐρίσκομεν $\hat{B} + 2^\circ > \hat{A} + \hat{\Gamma}$ καὶ $\hat{\Gamma} + 2^\circ > \hat{A} + \hat{B}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

818. Εἰς κάθε τριέδρον στερεάν γωνίαν δείξατε ὅτι μία τοῦλάχιστον ἔδρα εἶναι μικρότερα τῶν 120° .

819. Εἰς κάθε τριέδρον στερεάν γωνίαν δείξατε ὅτι μία τοῦλάχιστον διέδρος εἶναι μεγαλύτερα τῶν 60° .

820. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας (μὲ τὰς ἔδρας της ὀρθὰς) λαμβάνομεν τμήματα $KA = KB = K\Gamma = \alpha$. Δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἰσόπλευρον, τοῦ ὁποίου τὸ ἔμβαδόν εἶναι διπλάσιον τοῦ ἔμβαδου ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α .

821. Τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας αἱ ἀκμαὶ τέμνονται δι' ἐπιπέδου εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ . Ἐὰν εἶναι $KA = 3\alpha$, $KB = 4\alpha$, $K\Gamma = 5\alpha$, ὅπου K εἶναι ἡ κορυφή τῆς στερεᾶς γωνίας, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

822. Τέμνομεν τὰς ἀκμὰς τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας K δι' ἐπιπέδου εἰς τὰ

σημεία Α, Β, Γ. Δείξτε ότι η προβολή της κορυφής Κ επί το επίπεδο ΑΒΓ συμπίπτει με το ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

823. Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, ἐάν Η εἴναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, δείξτε ὅτι :

$$\alpha) (KAB)^2 = (TAB)(HAB), \beta) (KAB)^2 + (KB\Gamma)^2 + (K\Gamma A)^2 = (AB\Gamma)^2.$$

824. Τρισσορθώνιος στερεὰ γωνία τέμνεται δι' ἐπιπέδου εἰς τὰ σημεία Α, Β, Γ. Ἐάν α, β, γ εἴναι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ὑπολογισθοῦν ἐξ αὐτῶν τὰ τμήματα ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ὅπου Κ εἴναι ἡ κορυφή τῆς τρισσορθωνίου.

825. Ἐάν αἱ ἔδραι μιᾶς στερεᾶς γωνίας εἴναι 60° ἑκάστη, πόσας τὸ πολὺ ἔδρας δύναται νὰ ἔχῃ ἡ στερεὰ γωνία ;

826. Τὸ αὐτὸ νὰ ἐξετασθῇ, ἐάν αἱ ἔδραι τῆς εἴναι 90° ἑκάστη.

827. Μιᾶς τριέδρου στερεᾶς γωνίας αἱ δύο ἔδραι εἴναι 70° καὶ 90°. Ποῖαι εἴναι αἱ δύναται τιμαὶ διὰ τὴν τρίτην ἔδραν αὐτῆς ;

Β.

828. Εἰς πᾶσαν τριέδρου στερεὰν γωνίαν δείξτε ὅτι τὰ τρία διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν διέδρων τῆς διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

829. Δείξτε ὅτι τὰ τρία ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀνὰ ἓν ἀπὸ τὰς ἀκμὰς μιᾶς τριέδρου στερεᾶς γωνίας καὶ ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν, τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

830. Δείξτε ὅτι, ἐάν δύο τριέδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχουν τὰς διέδρους γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τότε αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν θὰ ἔχουν τὰς ἔδρας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ ἀντιστρόφως.

831. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Κ δοθείσης τρισσορθωνίου στερεᾶς γωνίας φέρομεν τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν ΚΧ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς στερεᾶς γωνίας. Δείξτε ὅτι αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ΚΧ μὲ τὰς τρεῖς ἀκμὰς καὶ μὲ τὰς τρεῖς ἔδρας τῆς στερεᾶς γωνίας, ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

832. Δείξτε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἶναι μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν γωνιῶν.

833. Ἐάν δύο ἔδραι μιᾶς τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἴναι ἴσαι, δείξτε ὅτι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν διέδροι εἴναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως.

834. Ἐάν μία τριέδρος στερεὰ γωνία ἔχῃ τὰς τρεῖς ἔδρας τῆς ἴσας, δείξτε ὅτι θὰ ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς διέδρους τῆς ἴσας καὶ ἀντιστρόφως.

835. Ἐάν μία τριέδρος στερεὰ γωνία ἔχῃ δύο ἴσας διέδρους, δείξτε ὅτι τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆς τρίτης διέδρου εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἔδραν.

836. Δίδεται κυρτὴ τετράεδρος στερεὰ γωνία καὶ σημεῖον Σ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Σ ἐπίπεδον (Π), τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ τὴν δοθεῖσαν στερεὰν γωνίαν κατὰ παραλληλόγραμμον.

837. Δείξτε ὅτι εἰς πᾶσαν τριέδρου στερεὰν γωνίαν ἀπέναντι μεγαλυτέρας διέδρου κεῖται μεγαλυτέρα ἔδρα καὶ ἀντιστρόφως.

838. Δίδεται τριέδρος στερεὰ γωνία Κ.ΑΒΓ. Φέρομεν ἡμιευθεῖαν ΚΧ ἐντὸς τῆς στερεᾶς γωνίας. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι $\widehat{XKA} + \widehat{XKB} < \widehat{\Gamma KA} + \widehat{\Gamma KB}$.

839. Δείξτε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν μιᾶς κυρτῆς στερεᾶς γωνίας μὲ ν ἀκμὰς περιέχεται μεταξὺ 2ν - 4 καὶ 6ν - 12 ὀρθῶν γωνιῶν.

840. Δίδεται τετράεδρος στερεὰ γωνία κορυφῆς Κ καὶ δύο σταθερὰ σημεία Α καὶ Β ἐπὶ δύο διαδοχικῶν ἀκμῶν τῆς. Μεταβλητὸν ἐπίπεδον διέρχεται πάντοτε διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ τέμνει τὰς ἄλλας δύο ἀκμὰς τῆς εἰς τὰ Μ καὶ Ν. i) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΝ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου. ii) Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς τομῆς τῶν ΑΜ καὶ ΒΝ. iii) Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς τομῆς τῶν ΑΝ καὶ ΒΜ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΠΟΛΥΕΔΡΑ

493. Ὅρισμός. Πολύεδρον καλεῖται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον περατοῦται πανταχόθεν εἰς ἐπίπεδα τμήματα.

Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα τμήματα εἶναι κατ' ἀνάγκην πολύγωνα καὶ καλοῦνται ἔδραι τοῦ πολυέδρου (σχ. 488). Αἱ πλευραὶ τῶν πολυγώνων ἐδρῶν καλοῦνται ἄκμαί τοῦ πολυέδρου καὶ εἶναι αἱ τομαὶ δύο προσκειμένων ἐδρῶν. Αἱ κορυφαὶ τῶν πολυγώνων ἐδρῶν καλοῦνται **κορυφαί** τοῦ πολυέδρου. Αὗται ἀνήκουν εἰς τρεῖς τοῦλάχιστον ἔδρας καὶ εἶναι σημεῖα, εἰς τὰ ὅποια συμβάλλουν τρεῖς τοῦλάχιστον ἄκμαί. Ἐν εὐθύγραμμον τμήμα με ἄκρα δύο κορυφάς, αἱ ὁποῖαι δὲν ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν ἔδραν, καλεῖται **διαγώνιος** τοῦ πολυέδρου. Διαγώνιοι δὲν ὑπάρχουν εἰς ὅλα τὰ πολύεδρα.

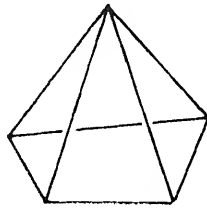
Ἐν πολύεδρον καλεῖται **κυρτόν**, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τῆς οἰασθήποτε ἔδρας τοῦ ἀφήνει πρὸς τὴν αὐτὴν περιοχὴν τοῦ χώρου ὁλόκληρον τὸ πολύεδρον.

Παντὸς κυρτοῦ πολυέδρου αἱ ἔδραι εἶναι κυρτὰ πολύγωνα καὶ ἀντιστρέφως.

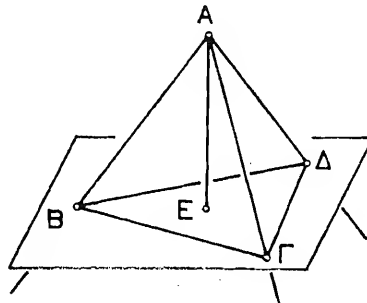
Ἡ τομὴ κυρτοῦ πολυέδρου με ἐπίπεδον εἶναι κυρτὸν πολύγωνον, ἐνῷ μία εὐθεῖα, μὴ ἀνήκουσα εἰς ἔδραν, ἔχει τὸ πολὺ δύο κοινὰ σημεῖα με τὴν πολυεδρικήν ἐπιφάνειαν.

ΤΟ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΝ

494. Τὰ στοιχεῖα τοῦ τετραέδρου. Τὸ τετράεδρον εἶναι τὸ ἀπλούστερον ἐκ τῶν πολυέδρων. Ἐχει τέσσαρας τριγωνικάς ἔδρας, τέσσαρας κορυφάς καὶ ἕξ ἄκμας. Τετράεδρον δυνάμεθα νὰ λάβωμεν, ἐὰν τμήσωμεν τὰς ἄκμας τριέδρου στερεᾶς γωνίας δι' ἐπίπεδον (σχ. 489).



Σχ. 488



Σχ. 489

Κάθε τετράεδρον είναι κυρτόν πολύεδρον, έχει έξ διέδρους γωνίας, αί οποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς έξ ἀκμάς του καὶ τέσσαρας τριέδρους στερεάς, γωνίας αἱ οποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τέσσαρας κορυφάς του.

Ύψος τετράεδρου καλεῖται τὸ κάθετον τμήμα, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἐξ ἐκάστης κορυφῆς πρὸς τὴν ἀπέναντι ἔδραν (σχ. 489). Τὸ τετράεδρον ἐπομένως ἔχει τέσσαρα ὕψη. Τὰ ὕψη ἐνὸς τετράεδρου ἐν γένει δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Διάμεσος τετράεδρου καλεῖται τὸ τμήμα μὲ ἄκρα μίαν κορυφήν, καὶ τὸ κέντρον βάρους τῆς ἀπέναντι ἔδρας. Τὸ τετράεδρον ἐπομένως ἔχει τέσσαρας διαμέσους.

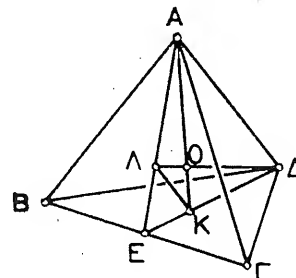
495. Εἶδη τετράεδρων. Εἰς τὸ σύνολον τῶν τυχόντων τετράεδρων ἀξιοσημεῖωτα εἶναι τὰ κανονικὰ καὶ τὰ ὀρθοκεντρικὰ τετράεδρα.

Κανονικὸν τετράεδρον καλεῖται ἐν τετράεδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ τὰς έξ ἀκμάς του ἴσας. Αἱ ἔδραι ἐνὸς κανονικοῦ τετράεδρου εἶναι ἴσα ἰσόπλευρα τρίγωνα.

Ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον καλεῖται ἐν τετράεδρον, τοῦ ὁποῖου τὰ τέσσαρα ὕψη διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ὕψων του καλεῖται **ὀρθόκεντρον** τοῦ τετράεδρου. Εἰς τὰ ὀρθοκεντρικὰ μόνον τετράεδρα καὶ τὰ τρία ζεύγη τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του εἶναι ὀρθογώνια (βλ. ἄσχ. 846).

496. Θεώρημα. Εἰς κάθε τετράεδρον αἱ τέσσαρες διάμεσοι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον καλεῖται κέντρον βάρους τοῦ τετράεδρου καὶ ἀπέχει ἐξ ἐκάστης κορυφῆς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου τοῦ τετράεδρου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ Κ, Λ τὰ κέντρα βάρους τῶν ἐδρῶν του ΒΓΔ, ΑΒΓ ἀντιστοίχως (σχ. 490). Τὸ σημεῖον Κ εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς διαμέσου ΔΕ τῆς ἔδρας ΒΓΔ καὶ τὸ σημεῖον Λ ἐπὶ τῆς διαμέσου ΑΕ τῆς ἔδρας ΑΒΓ. Ἐπομένως αἱ διάμεσοι ΑΚ καὶ ΔΛ τοῦ τετράεδρου τέμνονται εἰς σημεῖον Ο, διότι εἶναι ἐσωτερικὰ τμήματα τοῦ τριγώνου ΑΔΕ.



Σχ. 490

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ εἶναι κέντρα βάρους ἐδρῶν, ἔπεται ὅτι $\frac{ΕΔ}{ΕΚ} = \frac{ΕΑ}{ΕΛ} = \frac{3}{1} \Rightarrow \Delta A // K\Lambda \Rightarrow \text{τριγ. } ΕΔΑ \approx \text{τριγ. } ΕΚΛ \Rightarrow \frac{\Delta A}{ΚΛ} = \frac{3}{1}$.

Ἐπίσης, ἀπὸ τὴν παραλληλίαν τῶν τμημάτων ΔΛ καὶ ΚΛ, ἔπεται ὅτι $\overset{\Delta}{Ο}ΑΔ \approx$

$$\begin{aligned} \frac{OA}{OK} &= \frac{OA}{OK} = \frac{AK}{OK} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{OA}{OK} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{AO}{AO + OK} = \frac{3}{3+1} \\ &\Rightarrow \frac{AO}{AK} = \frac{3}{4} \Rightarrow AO = \frac{3}{4} AK. \end{aligned}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ αὐτὴ σχέσηος καὶ διὰ τὰς ἄλλας διαμέσους τοῦ τετραέδρου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου O .

Ἡ ὀνομασία **κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου** διὰ τὸ σημεῖον O ἔχει ληφθῇ ἐκ τῆς φυσικῆς, διότι συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον βάρους τετραέδρου ἐξ ὁμογενοῦς ὕλικου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β'.

841. Εἰς κάθε τετραέδρον : α) Δείξατε ὅτι τὰ τμήματα μὲ ἄκρα τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. β) Ἐὰν αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ εἶναι ἀνὰ δύο ἴσαι, τὰ τμήματα ταῦτα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι ἀκμαὶ τρισορθογώνιου στερεᾶς γωνίας.

842. Εἰς κανονικὸν τετραέδρον δείξατε ὅτι τὰ μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν ἐξ ἀκμῶν τοῦ εἶναι ἐπίπεδα συμμετρίας καὶ αἱ κοιναὶ κάθετοι τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τοῦ εἶναι ἄξονες συμμετρίας.

843. **Περίκεντρον τετραέδρου.** Εἰς πᾶν τετραέδρον δείξατε ὅτι αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐπὶ τὰς ἑδρας τοῦ εἰς τὰ περίκεντρα αὐτῶν, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται περίκεντρον τοῦ τετραέδρου καὶ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ.

844. **Ἐγκεντρον τετραέδρου.** Εἰς πᾶν τετραέδρον δείξατε ὅτι τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν ἐξ διέδρων γωνιῶν τοῦ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται ἔγκεντρον τοῦ τετραέδρου καὶ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰς ἑδρας τοῦ.

845. **Παράκεντρον τετραέδρου.** Εἰς πᾶν τετραέδρον δείξατε ὅτι ἐντὸς ἐκάστης στερεᾶς γωνίας τοῦ καὶ ἐκτὸς τοῦ τετραέδρου ὑπάρχει σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον διέρχονται τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν τριῶν διέδρων, τῶν ὁποίων αἱ ἀκμαὶ συγκλίνουν εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ἐν λόγῳ στερεᾶς γωνίας, καὶ τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν ὑπολοίπων τριῶν ἐξωτερικῶν διέδρων. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται παράκεντρον τοῦ τετραέδρου καὶ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν τοῦ στερεοῦ. Κάθε τετραέδρον ἔχει τέσσαρα παράκεντρα.

846. Δείξατε ὅτι, ἐὰν ἐν τετραέδρον εἶναι ὀρθοκεντρικόν, αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ τοῦ εἶναι ὀρθογώνιοι καὶ ἀντιστρόφως.

847. Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν ὀρθοκεντρικὸν τετραέδρον τὰ ἔχνη τῶν τεσσάρων ὑψῶν τοῦ εἶναι ὀρθόκεντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ.

848. Δείξατε ὅτι αἱ κοιναὶ κάθετοι τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου διέρχονται διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τετραέδρου.

849. Δίδεται τετραέδρον $AB\Gamma\Delta$. Νὰ εὐρεθῇ σημεῖον M , διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2$ εἶναι ἐλάχιστον.

850. Δείξατε ὅτι τὰ ἐξ μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν ἀκμῶν τετραέδρου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

851. Ἐὰν τετραέδρου $KAB\Gamma$ ἡ στερεὰ γωνία K εἶναι τρισορθογώνιος, δείξατε ὅτι τὸ ὕψος KH πληροῖ τὴν σχέσιν : $\frac{1}{KH^2} = \frac{1}{KA^2} + \frac{1}{KB^2} + \frac{1}{K\Gamma^2}$.

852. Εἰς κάθε τετράεδρον δείξατε ὅτι τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὀριζόμενα ὑπὸ ἐκάστης ἀκμῆς καὶ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

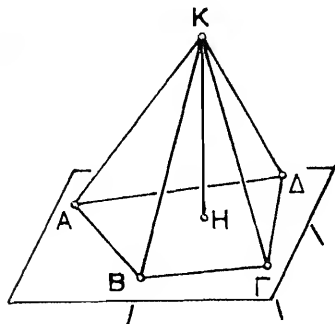
853. Δίδεται τετράεδρον $AB\Gamma\Delta$. Ἐπίπεδον παραμένει παραλλήλον πρὸς τὴν ἑδραν $B\Gamma\Delta$ καὶ τέμνει τὸ τετράεδρον κατὰ τὸ τρίγωνον $B'\Gamma'\Delta'$. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $B'\Gamma'\Delta'$ μετὰς ἀπέναντι αὐτῶν κορυφᾶς τοῦ τετραέδρου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Η ΠΥΡΑΜΙΣ

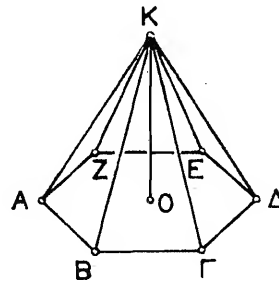
497. Ὅρισμοί. Πυραμὶς καλεῖται τὸ πολύεδρον, τοῦ ὁποίου ἡ μία ἑδρα εἶναι τυχὸν πολύγωνον, τὸ ὁποῖον καλεῖται **βάσις** τῆς πυραμίδος, αἱ δὲ λοιπαὶ ἑδραι εἶναι τρίγωνα μετὰ κοινὴν κορυφὴν ἐν σημείῳ, τὸ ὁποῖον καλεῖται **κορυφή** τῆς πυραμίδος.

Πυραμίδα δυνάμεθα νὰ λάβωμεν, ἐὰν τμήσωμεν τὰς ἀκμὰς στερεᾶς γωνίας κορυφῆς K δι' ἐπίπεδον εἰς τὰ σημεία A, B, Γ, \dots (σχ. 491).

Μία πυραμὶς εἶναι κυρτὴ ἢ μὴ κυρτὴ, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν ἡ βάσις τῆς $AB\Gamma\Delta$ εἶναι κυρτὸν ἢ μὴ κυρτὸν πολύγωνον ἀντιστοίχως. Αἱ τριγωνικαὶ ἑδραι $KAB, KB\Gamma, \dots$ καλοῦνται **παράπλευροι ἑδραι** τῆς πυραμίδος, αἱ δὲ ἀκμαὶ $KA, KB, K\Gamma, \dots$, αἱ ὁποῖαι συγκλίνουν εἰς τὴν κορυφὴν K τῆς πυραμίδος, καλοῦνται **παράπλευροι ἀκμαί**.



Σχ. 491



Σχ. 492

Μία πυραμὶς χαρακτηρίζεται ὡς τριγωνική, τετραπλευρική, πένταγωνική κλπ., ἀναλόγως τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεώς της.

Ὑψος τῆς πυραμίδος καλεῖται τὸ κάθετον τμήμα KH ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς K πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως.

Κανονικὴ καλεῖται κάθε πυραμὶς, ἡ ὁποία ἔχει ὡς βάσιν κανονικὸν πολύγωνον, ἡ δὲ κορυφή της προβάλλεται ὀρθῶς εἰς τὸ κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως (σχ. 492).

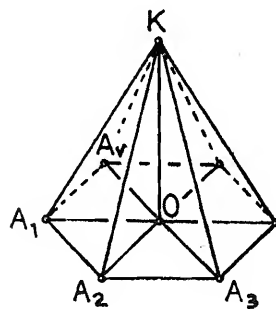
498. Θεώρημα. Κάθε κανονικής πυραμίδος αἱ παράπλευροι ἔδραι εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα.

Ἀπόδειξις. Ὡς θεωρήσωμεν κανονικὴν πυραμίδα $K.A_1A_2...A_n$ (σχ. 493). Φέρομεν τὸ ὕψος KO , ὅπου τὸ O εἶναι κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως, ἐπομένως εἶναι $OA_1 = OA_2$. Τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα KOA_1 καὶ KOA_2 εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν KO κοινὴν καὶ $OA_1 = OA_2$. Ἄρα $KA_1 = KA_2$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $KA_1 = KA_2 = ... = KA_n$. Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον εἶναι $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{n-1}A_n$, ἔπεται ὅτι τὰ παράπλευρα τρίγωνα εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ.

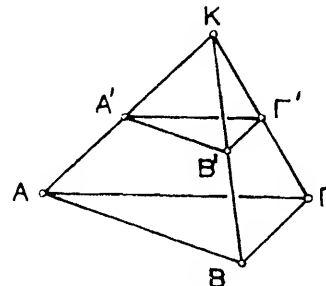
Ἀντιστρόφως. Ἐστω ὅτι εἰς τὴν πυραμίδα $K.A_1A_2...A_n$ εἶναι $KA_1 = KA_2 = ... = KA_n$ καὶ $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{n-1}A_n$. Φέρομεν πάλιν τὸ ὕψος $KO \Rightarrow KOA_1 = KOA_2 = ... = KOA_n$, ὡς ὀρθογώνια μὲ ἴσας τὰς ὑποτείνουσας καὶ τὴν KO κοινὴν. Ἄρα $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$. Τότε τὰ τρίγωνα $OA_1A_2, OA_2A_3, ..., OA_nA_1$ εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ καὶ ἐπομένως τὸ πολύγωνον $A_1A_2...A_n$ εἶναι κανονικὸν μὲ κέντρον τὴν προβολὴν O τοῦ A ἐπὶ αὐτό. Ἄρα ἡ πυραμὶς εἶναι κανονικὴ.

499. Θεώρημα. Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν τῆς, ἡ τομὴ εἶναι πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ πολύγωνον τῆς βάσεως.

Ἀπόδειξις. Τὸ θεώρημα θὰ ἀποδειχθῇ κατ' ἀρχὰς διὰ τριγωνικὴν πυραμίδα $K.AB\Gamma$ (σχ. 494). Ἐὰν $A'B'\Gamma'$ εἶναι ἡ παράλληλος τομὴ πρὸς τὴν



Σχ. 493



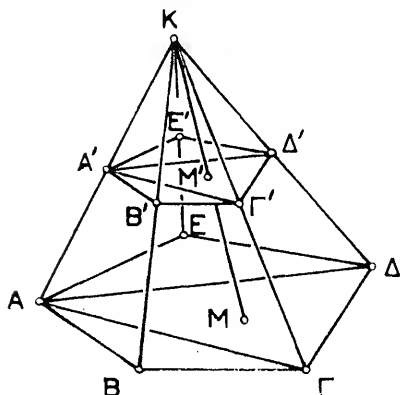
Σχ. 494

βάσιν $AB\Gamma$, παρατηροῦμεν ὅτι $A'B' \parallel AB$, $B'\Gamma' \parallel B\Gamma$ καὶ $\Gamma'A' \parallel \Gamma A$, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου. Ἄρα εἶναι $\text{τριγ. } A'B'\Gamma' \approx \text{τριγ. } AB\Gamma$, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς των παραλλήλους (τὸ σχετικὸν θεώρημα τῆς ἐπιπεδομετρίας ἰσχύει αὐτούσιον καὶ εἰς τὸν χώρον, ὡς ἔπεται ἐκ τῆς § 433).

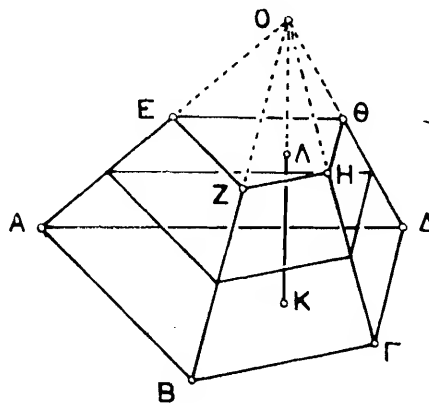
Ὡς θεωρήσωμεν τώρα τυχοῦσαν πυραμίδα $K.AB\Gamma\Delta E$ καὶ τὴν τομὴν $A'B'\Gamma'\Delta'E'$ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν (σχ. 495). Μὲ τὰ ἐπίπεδα $AK\Gamma$, $AK\Delta$, τὰ ὅποια τέμνουν τὴν βάσιν καὶ τὴν παράλληλον τομὴν κατὰ διαγωνίους διαιρεῖται ἡ πυραμὶς εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας. Ἄρα εἶναι $A'B'\Gamma' \approx AB\Gamma$, $A'\Gamma'\Delta' \approx A\Gamma\Delta$, $A'\Delta'E' \approx A\Delta E$ καὶ ἐπομένως $A'B'\Gamma'\Delta'E' \approx AB\Gamma\Delta E$.

Παρατηρήσεις :

i) 'Ο λόγος ομοιότητος $\frac{A'B'}{AB}$ τῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον $\frac{KA'}{KA}$, διότι εἶναι $KA'B' \approx KAB$. 'Ο ἴδιος λόγος μεταφέρεται καὶ ἐπὶ τοῦ τυχόντος τμήματος $KM'M$, μετὰ M' καὶ M ἐπὶ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ ἀσφαλῶς καὶ ἐπὶ τῶν ὑπολοίπων παραπλευρῶν ἀκμῶν $KB'B$, $KG'Γ$, κλπ. Τοῦτο ἐπεταὶ ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ.



Σχ. 495



Σχ. 496

ii) Τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων ἔχουν λόγον ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ομοιότητος, ἥτοι $\frac{(A'B'Γ'D'E')}{(ABΓΔΕ)} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 = \left(\frac{KM'}{KM}\right)^2$.

ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΠΥΡΑΜΙΣ

500. 'Ορισμοί. Κόλουρος πυραμὶς καλεῖται τὸ μέρος μιᾶς πυραμίδος, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ μιᾶς παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν τομῆς τῆς πυραμίδος.

Μία κόλουρος πυραμὶς $ABΓΔ.EZHΘ$ (σχ. 496) ἔχει τὰς ἑδρας τῆς $ABΓΔ$ καὶ $EZHΘ$ παραλλήλους. Αὗται καλοῦνται **βάσεις** τῆς πυραμίδος καὶ εἶναι ὅμοια πολύγωνα (§ 499). Αἱ παράπλευροι ἑδραι τῆς εἶναι τραπέζια.

'Η ἀπόστασις $ΚΛ$ τῶν δύο παραλλήλων βάσεων καλεῖται **ὕψος** τῆς κολούρου πυραμίδος.

Μία κόλουρος πυραμὶς, καλεῖται **κανονικὴ**, ἐὰν ἔχῃ προκύψει ἀπὸ κανονικὴν, πυραμίδα. "Αρα μία κανονικὴ κόλουρος πυραμὶς ἔχει ὡς βάσεις κανονικὰ ὅμοια πολύγωνα, τὸ δὲ τμήμα, μετὰ ἄκρα τὰ κέντρα βάσεων τῶν δύο βάσεων, εἶναι κάθετον ἐπ' αὐτάς.

Μεσαία τομή ἡ μέση τομή τῆς κολούρου πυραμίδας καλεῖται ἡ τομή αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις της καὶ ἰσαπέχοντος ἀπ' αὐτάς. Ἡ μεσαία τομή εἶναι πολύγωνον ὁμοιον πρὸς τὰς βάσεις καὶ διχοτομεῖ τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς της κολούρου πυραμίδας, ὡς καὶ τὸ ὕψος της, καὶ γενικῶς κάθε τμήμα μὲ τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν βάσεων.

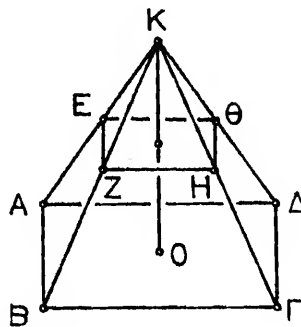
501. Θεώρημα. Κάθε κολούρου κανονικῆς πυραμίδας αἱ παράπλευροι ἔδραι εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τραπέζια καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν μίαν κολούρου κανονικὴν πυραμίδα $AB\Gamma\Delta$. $EZH\Theta$ (σχ. 497). Αὕτη ἔχει προκύψει ἀπὸ κανονικὴν πυραμίδα $K.AB\Gamma\Delta$ δι' ἐπιπέδου τομῆς $EZH\Theta$ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν. Τότε συμβαίνουν τὰ ἑξῆς :

i) Τὸ πολύγωνον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι κανονικόν $\Rightarrow AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$.

ii) Τὸ πολύγωνον $EZH\Theta$, ὡς ὁμοιον πρὸς τὸ $AB\Gamma\Delta$, εἶναι κανονικόν $\Rightarrow EZ = ZH = H\Theta = \Theta E$.

iii) Αἱ γωνίαι τῶν τραπέζιων εἰς τὰς κορυφὰς A, B, Γ, Δ εἶναι ἴσαι, ὡς παρὰ τὰς βάσεις γωνίαι ἴσων ἰσοσκελῶν τριγώνων. Ἄρα τὰ παράπλευρα τραπέζια εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ.



Σχ. 497

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ἡ κολούρος πυραμὶς $AB\Gamma\Delta.EZH\Theta$ ἔχῃ τὰ παράπλευρα τραπέζια ἴσα ἰσοσκελῆ, εἶναι κανονικὴ. Πράγματι κατ' ἀρχὴν παρατηροῦμεν ὅτι αἱ παράπλευροι ἔδραι συγκλίνουν εἰς σημεῖον K , διότι κάθε κολούρος πυραμὶς ἔχει προκύψει ἀπὸ πυραμίδα. Ἀρκεῖ ἐπομένως νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ πυραμὶς $K.AB\Gamma\Delta$ εἶναι κανονικὴ. Τοῦτο ὁμῶς συμβαίνει, διότι τὰ τρίγωνα $KAB, KB\Gamma, K\Gamma\Delta, K\Delta A$, ὡς ἔχοντα ἐξ ὑποθέσεως ἴσας βάσεις $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$ καὶ τὰς παρὰ τὰς βάσεις τῶν γωνίας ἴσας (ἐκ τῶν ἴσων ἰσοσκελῶν τραπέζιων), ἔπεται ὅτι εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα \Rightarrow ἡ $K.AB\Gamma\Delta$ εἶναι κανονικὴ \Rightarrow ἡ κολούρος πυραμὶς $AB\Gamma\Delta.EZH\Theta$ εἶναι κανονικὴ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

854. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη ἐνὸς κανονικοῦ τετραέδρου ἐκ τῆς ἀκμῆς α αὐτοῦ. Συμπεράνατε ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα.

855. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κανονικὸν τετράεδρον εἶναι κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμὶς. Κατὰ τί διαφέρει τὸ κανονικὸν τετράεδρον ἀπὸ μίαν κανονικὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ;

856. Πυραμὶς ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως E . Τέμνομεν αὐτὴν δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν καὶ διερχομένου ἀπὸ τὸ μέσον μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ E τῆς βάσεως.

857. Πυραμίδα έχει έμβαδόν βάσεως E και ύψος u . Τέμνομεν αὐτὴν δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάση εἰς ἀπόστασιν α ἀπὸ τῆς κορυφῆς ($\alpha < u$). Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ έμβαδὸν τῆς τομῆς ἐκ τῶν E , α καὶ u .

858. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος μιᾶς τῶν παραπλευρῶν ἀκμῶν κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ἐκ τῆς ἀκμῆς α τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους $u = \frac{\alpha \sqrt{7}}{2}$.

859. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ κανονικὴ πυραμὶς εἶναι α) τριγωνικὴ, β) ἑξαγωνικὴ.

860. Κολούρου πυραμίδος δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν βάσεων ἔχουν λόγον $1/3$ καὶ τὰ έμβαδὰ τῶν βάσεων εἶναι E_1 καὶ E_2 . Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ έμβαδὸν τῆς μεσαίας τομῆς. Νὰ γίνῃ ἐφαρμογή, ἐὰν αἱ βάσεις εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα μετὰ πλευράς α καὶ 3α ἀντιστοίχως.

B'.

861. Δείξατε ὅτι τὸ κανονικὸν τετράεδρον εἶναι ὀρθοκεντρικόν.

862. Κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ἀκμὴν βάσεως 2α καὶ ὕψος $\frac{4\alpha}{3}$. Τέμνομεν αὐτὴν δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ μιᾶς ἀκμῆς τῆς βάσεως καὶ σχηματίζοντος γωνίαν 45° μετὰ τὴν βάση. α) Δείξατε ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον. β) Νὰ εὑρεθῇ τὸ έμβαδὸν τῆς τομῆς.

863. Δείξατε ὅτι τὰ τμήματα, μετὰ ἀκρὰ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τῆς μιᾶς βάσεως κολούρου τριγωνικῆς πυραμίδος καὶ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς τῆς ἄλλης βάσεως, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

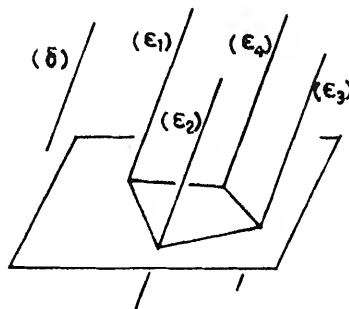
864. Κόλουρος πυραμὶς ἔχει έμβαδὰ βάσεων E_1 καὶ E_2 . Τέμνομεν αὐτὴν δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις, τὸ ὅποιον διαιρεῖ τὸ ὕψος εἰς δύο τμήματα μετὰ λόγον μ/ν . Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ έμβαδὸν τῆς τομῆς.

865. Εἰς κανονικὸν τετράεδρον $AB\Gamma\Delta$ δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ μέσον E τοῦ ὕψους AH μετὰ τὰς κορυφὰς B , Γ καὶ Δ , εἶναι ἀκμαὶ τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας.

ΤΟ ΠΡΙΣΜΑ

502. Πρισματικὴ ἐπιφάνεια. Θεωροῦμεν μίαν διαδοχὴν εὐθειῶν (ϵ_1) , (ϵ_2) , (ϵ_3) , ..., (ϵ_n) παραλλήλων πρὸς μίαν διεύθυνσιν (δ) (σχ. 498). Ἀνὰ δύο, διαδοχικαὶ σχηματίζουν ἐπιπέδους ζώνας, τὸ σύνολον τῶν ὁποίων ἀπαρτίζει μίαν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία καλεῖται **πρισματικὴ**. Αἱ ἐπίπεδοι ζῶναι καλοῦνται **ἔδραι** τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας καὶ αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι καλοῦνται **ἀκμαὶ** αὐτῆς. Ἡ πρισματικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται **κυρτή**, ἐὰν ἡ τομὴ τῆς ὑπὸ τυχόντος ἐπιπέδου εἶναι κυρτὸν πολύγωνον, ἄλλως ἡ πρισματικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται **μὴ κυρτή**.

Κάθετος τομὴ πρισματικῆς ἐπιφανείας καλεῖται ἡ τομὴ αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὰς ἀκμάς τῆς. Ἡ κάθετος τομὴ εἶναι πολύγωνον.



Σχ. 498

503. Πρίσμα. Ἐάν πρισματική ἐπιφάνεια τμηθῇ ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (P) (σχ. 499), ἀποκόπτεται στερεόν, τὸ ὁποῖον καλεῖται **πρίσμα**.

Αἱ παράλληλοι τομαὶ εἶναι πολύγωνα ($ΑΒΓΔ$ καὶ $ΕΖΗΘ$), τὰ ὁποῖα καλοῦνται **βάσεις** τοῦ πρίσματος, ἐνῶ αἱ λοιπαὶ ἔδραι τοῦ στερεοῦ καλοῦνται **παράπλευροι ἔδραι**.

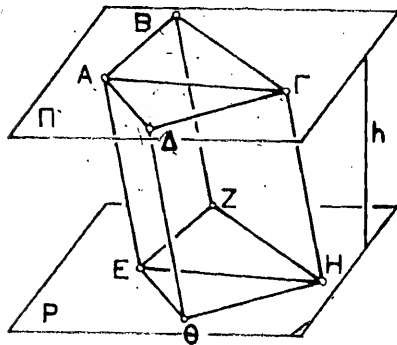
Κάθετος τομὴ πρίσματος καλεῖται ἡ κάθετος τομὴ τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας, ἐκ τῆς ὁποίας προῆλθεν τὸ πρίσμα.

Αἱ ἀκμαὶ τοῦ πρίσματος ($ΑΕ$, $ΒΖ$, $ΓΗ$ καὶ $ΔΘ$), αἱ ὁποῖαι δὲν ἀνήκουν εἰς τὰς βάσεις του, καλοῦνται **παράπλευροι ἀκμαί**.

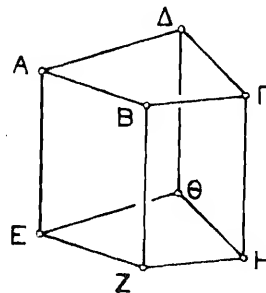
Ύψος τοῦ πρίσματος καλεῖται ἡ ἀπόστασις h τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ.

Ἐν πρίσμα χαρακτηρίζεται ὡς **τριγωνικόν**, **τετραπλευρικόν**, **πενταγωνικόν** κλπ. ἀναλόγως τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων αὐτοῦ.

Διαγώνιον ἐπίπεδον καλεῖται ἓν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον καθορίζεται ἀπὸ δύο παραπλεύρους ἀκμὰς ($ΑΕ$ καὶ $ΓΗ$), μὴ κειμένας ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἔδρας. Ἐν διαγώνιον ἐπίπεδον τέμνει τὰς βάσεις τοῦ πρίσματος κατὰ διαγωνίους. Τὰ τριγωνικά πρίσματα δὲν ἔχουν οὐδένα διαγώνιον ἐπίπεδον.



Σχ. 499



Σχ. 500

Ὅρθον καλεῖται ἓν πρίσμα, ἐὰν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ του εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις του. Εἰς τὰ ὀρθὰ μόνον πρίσματα τὸ ὕψος εἶναι ἶσον μὲ ἐκάστην παράπλευρον ἀκμὴν καὶ ἡ κάθετος τομὴ ἴση πρὸς ἐκάστην βάσιν του.

Κανονικόν καλεῖται ἓν ὀρθὸν πρίσμα, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι κανονικά πολύγωνα.

504. Θεώρημα. Αἱ παράπλευροι ἔδραι κάθε πρίσματος εἶναι παραλλήλογραμμα.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τυχὸν πρίσμα $ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ$ (σχ. 500). Ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι $ΑΕ // ΒΖ // ΓΗ // ΔΘ$. Ἐπὶ πλέον εἶναι $ΑΒ // ΕΖ$, ὡς τομαὶ παραλλή-

λων ἐπιπέδων (τῶν βάσεων) ὑπὸ τρίτου. Ἄρα τὸ τετράπλευρον $ABZE$ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ὅμοιως καὶ αἱ λοιπαὶ παράπλευροι ἔδραι τοῦ εἶναι παραλληλόγραμμα.

Πόρισμα I. Αἱ παράπλευροι ἄκμαί κάθε πρίσματος εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα II. Αἱ παράπλευροι ἔδραι ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ὀρθογώνια.

Πόρισμα III. Αἱ παράπλευροι ἔδραι κανονικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσα ὀρθογώνια.

505. Θεώρημα. Αἱ βάσεις κάθε πρίσματος εἶναι ἴσα πολύγωνα.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τυχὸν πρίσμα $AB\Gamma\Delta.EZH\Theta$ (σχ. 500). Ἐπειδὴ αἱ παράπλευροι ἄκμαί τοῦ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ἔπεται ὅτι, ἐὰν ἡ βάση $AB\Gamma\Delta$ μετατοπισθῇ κατὰ τὸν δείκτην \vec{AE} , θὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς ἄλλης βάσεως $EZH\Theta$. Ἄρα αἱ βάσεις εἶναι ἴσαι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

866. Ἐὰν πρίσμα τηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς παραπλεύρους ἄκμας τοῦ, δείξατε ὅτι ἡ τομὴ εἶναι παραλληλόγραμμον.

867. Δείξατε ὅτι ἡ τομὴ δύο διαγωνίων ἐπιπέδων πρίσματος εἶναι παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὰς παραπλεύρους ἄκμας τοῦ.

868. Κανονικὸν τριγωνικὸν πρίσμα τέμνεται δι' ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ μιᾶς ἄκμης τῆς βάσεως καὶ διὰ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς τῆς ἄνω βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος ἐκ τῆς ἄκμης α τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τομῆς σχηματίζῃ μετὰ τὴν βάσιν γωνίαν 60° .

869. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τομῆς σχηματίζῃ γωνία 45° μετὰ τὴν βάσιν.

870. Κανονικὸν τριγωνικὸν πρίσμα ἔχει ἄκμην βάσεως α καὶ ὕψος α . Τέμνομεν αὐτὸ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ μιᾶς ἄκμης τῆς βάσεως καὶ σχηματίζοντος γωνίαν 60° μετὰ τὴν βάσιν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐκ τῆς ἄκμης α .

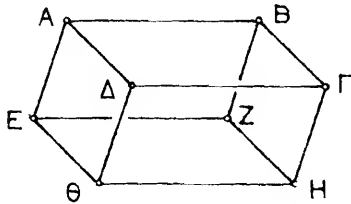
871. Δίδεται τριγωνικὸν πρίσμα $AB\Gamma.\Delta EZ$. Τέμνομεν αὐτὸ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν ἔδραν $B\Gamma ZE$. Δείξατε ὅτι α) ἡ τομὴ εἶναι παραλληλόγραμμον β) ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραλλήλου ἔδρας ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τῆς ἄκμης AD ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τομῆς καὶ τῆς παραλλήλου ἔδρας.

506. Παραλληλεπίπεδον καλεῖται ἓν πρίσμα, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα (σχ. 501).

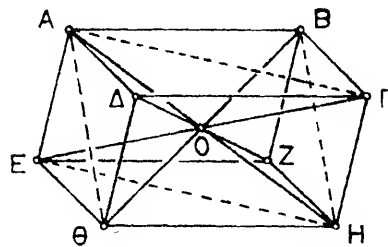
Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἔπεται ὅτι ὅλαι αἱ ἔδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμα. Ἄρα τὸ παραλληλεπίπεδον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὑπὸ τριπλῇ ἔννοίᾳ πρίσμα μετὰ βάσεις δύο οἵασδήποτε ἀπέναντι ἔδρας τοῦ. Ἐπομένως αἱ ἀπέναντι ἔδραι τοῦ εἶναι ἴσα παραλληλόγραμμα καὶ αἱ ἄκμαί τοῦ ἀποτελοῦν τρεῖς ομάδας ἐκ τεσσάρων παραλλήλων καὶ ἴσων ἄκμῶν. Τὸ παραλληλεπίπεδον ἔχει τρία ὕψη.

507. Θεώρημα. Αἱ διαγώνιοι κάθε παραλληλεπιπέδου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον καλεῖται κέντρον βάρους τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ$ τυχὸν παραλληλεπίπεδον (σχ. 502).



Σχ. 501



Σχ. 502

Αἱ ἀκμαὶ τοῦ $ΑΕ$ καὶ $ΓΗ$ εἶναι ἴσαι καὶ παραλλήλοι καὶ ἐπομένως τὸ τετράπλευρον $ΑΕΗΓ$ εἶναι παραλληλόγραμμον \Rightarrow αἱ διαγώνιοι $ΑΗ$ καὶ $ΓΕ$ τέμνονται εἰς σημεῖον $Ο$, τὸ ὁποῖον μάλιστα εἶναι καὶ μέσον ἐκάστης.

Ὁμοίως ἐκ τῶν παραλληλογράμμων $ΑΒΗΘ$ καὶ $ΑΖΗΔ$ ἔπεται ὅτι καὶ αἱ διαγώνιοι $ΒΘ$ καὶ $ΔΖ$ ἀντιστοίχως διέρχονται ἀπὸ τοῦ μέσου $Ο$ τῆς διαγωνίου $ΑΗ$. Ἄρα αἱ τέσσαρες διαγώνιοι τοῦ παραλληλεπιπέδου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου $Ο$, τὸ ὁποῖον καλεῖται **κέντρον βάρους** τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Παρατήρησις. Τὸ σημεῖον $Ο$, ὡς μέσον τῆς κάθε διαγωνίου τοῦ παραλληλεπιπέδου, εἶναι καὶ κέντρον συμμετρίας τοῦ στερεοῦ, ἐξ οὗ καὶ καλεῖται ἀπλῶς κέντρον αὐτοῦ.

508. Ὁρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καλεῖται τὸ παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποῖου αἱ ἔδραι εἶναι ὀρθογώνια (σχ. 503).

Αἱ στερεαὶ γωνίαι ἐνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι τρισσορθογώνιοι καὶ τὰ τρία ὕψη του εἶναι ἴσα πρὸς τρεῖς ἀκμάς του, αἱ ὁποῖαι συντρέχουν εἰς τὴν αὐτὴν στερεὰν γωνίαν, καλοῦνται δὲ καὶ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

509. Θεώρημα. Αἱ διαγώνιοι ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι.

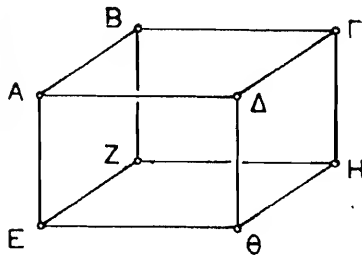
Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν α, β, γ αἱ διαστάσεις ἐνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 504) καὶ $ΑΗ = \delta$ ἡ τυχούσα διαγώνιος αὐτοῦ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΑΕΗ$ λαμβάνομεν: $\delta^2 = ΕΗ^2 + \gamma^2$ (1). Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΕΘΗ$ λαμβάνομεν: $ΕΗ^2 = \alpha^2 + \beta^2$ (2). Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται:

$$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

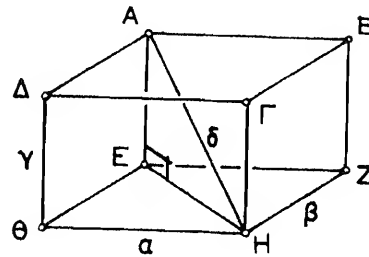
Τὸ αὐτὸ ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὰς λοιπὰς διαγωνίους. Ἄρα αἱ τέσσαρες διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι.

510. Κύβος καλεῖται τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποῖου αἱ ἔδραι εἶναι τετράγωνα.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἔπεται ὅτι αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι.



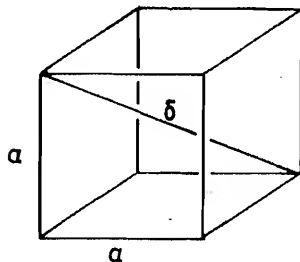
Σχ. 503



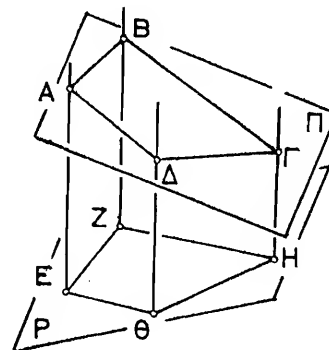
Σχ. 504

Ἐὰν α εἶναι ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου (σχ. 505) καὶ δ ἡ διαγώνιος αὐτοῦ, ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἔπεται ὅτι $\delta = \alpha\sqrt{3}$.

511. Κολοβὸν πρίσμα. Ἐὰν πρισματική ἐπιφάνεια τμηθῇ ὑπὸ δύο μὴ παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) (σχ. 506), ἀποκόπτεται στερεόν, τὸ ὁποῖον καλεῖται κολοβὸν πρίσμα.



Σχ. 505

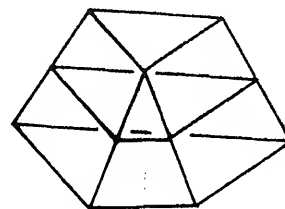


Σχ. 506

Αἱ τομαὶ ὑπὸ τῶν δύο ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) εἶναι πολύγωνα (ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ ὄχι ἴσα), τὰ ὁποῖα καλοῦνται **βάσεις** τοῦ κολοβοῦ πρίσματος. Αἱ λοιπαὶ ἔδραι καλοῦνται **παράπλευροι** ἔδραι καὶ εἶναι ἐν γένει τραπέζια. Ὑψος εἰς τὸ κολοβὸν πρίσμα δὲν ὀρίζεται.

512. Πρισματοειδὲς καλεῖται τὸ πολυέδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο παραλλήλους ἔδρας, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται **βάσεις** καὶ δὲν ἔχει ἄλλας κορυφὰς ἐκτὸς ἀπὸ τὰς κορυφὰς τῶν βάσεων (σχ. 507).

Αἱ λοιπαὶ ἔδραι, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται **παράπλευροι**, εἶναι τρίγωνα ἢ τραπέζια. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων καλεῖται **ὕψος** τοῦ πρισματοειδοῦς.



Σχ. 507

Μεσαία τομή καλείται ή τομή του στερεοῦ ὑπὸ τοῦ μεσοπαράλληλου ἐπιπέδου τῶν βάσεων αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

872. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν παραλληλεπιπέδου ἀπὸ ἐπίπεδον, μὴ τέμνον αὐτό, ἰσοῦται πρὸς τὸ ὀκταπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου βάρους τοῦ παραλληλεπιπέδου ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον.

+ 873. Ἐὰν αἱ διαγώνιοι παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι, δείξατε ὅτι τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

874. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων διαγωνίων ἐνὸς ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δώδεκα ἄκμῶν του.

875. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει τρία ἐπίπεδα συμμετρίας.

876. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ κύβος ἔχει κέντρον συμμετρίας τὴν τομὴν τῶν διαγωνίων του.

877. Δίδεται τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία $Oxyz$ καὶ ἐντὸς τῆς γωνίας τυχὸν τμήμα OA μήκους δ . Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν τοῦ τμήματος ἐπὶ τὰς τρεῖς ἑδρας τῆς τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας παραμένει σταθερόν.

878. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου ἀπὸ τὰς ὀκτὼ κορυφὰς ἐνὸς παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ ὀκταπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου, ἡῤ̄ξημένον κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ ἄθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του.

879. Διὰ μιᾶς ἄκμης παραλληλεπιπέδου θεωροῦμεν τυχὸν ἐπίπεδον μὴ τέμνον τὸ στερεὸν καὶ ἐπ' αὐτοῦ φέρομεν καθέτους ἀπὸ τὰς ὑπολοίπους ἑξ κορυφὰς τοῦ παραλληλεπιπέδου. Δείξατε ὅτι ἐκ τῶν ἑξ καθέτων τμημάτων τὰ δύο μεγαλύτερα ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὰ τέσσαρα ὑπόλοιπα κάθετα τμήματα.

880. Δείξατε ὅτι εἰς κάθε κύβον ἡ προβολὴ μιᾶς ἄκμης ἐπὶ τὴν διαγώνιον ἰσοῦται πρὸς τὸ $1/3$ τῆς διαγωνίου.

881. Ἐὰν εἰς ἓν παραλληλεπίπεδον δύο προσκείμεναι ἑδραι εἶναι ἰσοδύναμοι, δείξατε ὅτι ἡ τομή τοῦ παραλληλεπιπέδου ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν κοινὴν ἄκμην τῶν ἰσοδυνάμων ἑδρῶν εἶναι ρόμβος.

882. Κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος δίδονται τὰ μήκη α, β, γ τῶν τριῶν παραπλευρῶν ἄκμῶν του. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν βαρυκέντρων τῶν βάσεων αὐτοῦ.

Β'.

883. Δίδονται τρεῖς ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι $(e_1), (e_2), (e_3)$ καὶ μεταβλητὸν κατὰ θέσιν εὐθύγραμμον τμήμα σταθεροῦ μήκους δ . Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν του ἐπὶ τὰς τρεῖς ἀσυμβάτους εὐθείας παραμένει σταθερόν.

884. Δίδεται κύβος ἄκμης α . Τέμνομεν αὐτὸν διὰ τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου μιᾶς τῶν διαγωνίων του. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τομή εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν του ἐκ τῆς ἄκμης α τοῦ κύβου.

885. Δίδεται παραλληλεπίπεδον $AB\Gamma\Delta EZ\eta\Theta$. Δείξατε ὅτι ἡ διαγώνιος $A\eta$ τριχοτομεῖται ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων $B\Delta E$ καὶ $\Gamma Z\Theta$.

886. Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποῖου τρεῖς ἄκραι νὰ εὐόισκονται ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν.

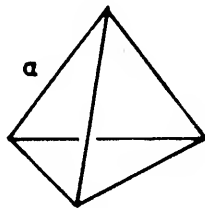
ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

513. Μέτρησης τῆς ἐπιφανείας πολυέδρου. Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς τυχόντος πολυέδρου, μετρώμεν τὰς ἐπιφανείας τῶν ἐδρῶν του (ἐμβαδὰ ἐπιπέδων πολυγώνων) καὶ ἀθροίζομεν. Ἡ ἐργασία αὕτη ὁμῶς, εἰς εἰδικὰς τινὰς περιπτώσεις τυποποιεῖται καὶ συνεπῶς ἀπλουστεύεται, ὥς θὰ φανῇ εἰς τὰ ἐπόμενα.

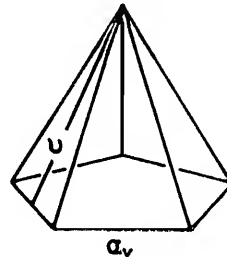
514. Ἐπιφάνεια κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α . Ἀποτελεῖται ἀπὸ τέσσαρα ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς α (σχ. 508). Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ καὶ ἐπομένως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι $4 \cdot \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \alpha^2\sqrt{3}$, ἥτοι

$$E = \alpha^2\sqrt{3}$$

515. Ἐπιφάνεια κανονικῆς πυραμίδος. Εἰς κανονικὴν πυραμίδα, ὅπου ὅλαι αἱ παράπλευροι ἑδραι εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα, ὑπολογίζομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μόνον τριγώνου καὶ ἐν συνεχείᾳ τὸ πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸ



Σχ. 508



Σχ. 509

πλῆθος v τῶν παραπλεύρων ἐδρῶν. Ἐὰν α_v εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως καὶ u εἶναι τὸ παράπλευρον ὕψος (σχ. 509), μία παράπλευρος ἑδρα ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{1}{2} \alpha_v u$ καὶ ἐπομένως ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια

εἶναι $v \frac{1}{2} \alpha_v u = \frac{v \alpha_v}{2} u = \frac{P_v}{2} u$, ὅπου P_v εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως. Ἀρα ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια κανονικῆς πυραμίδος δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$E_{\pi} = \frac{P_v}{2} u$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτὴν προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν E_v τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως, λαμβάνομεν τὸν τύπον :

$$E_{\text{ολ.}} = \frac{P_v}{2} u + E_v$$

τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς κανονικῆς πυραμίδος.

516. Ἐπιφάνεια κολούρου κανονικῆς πυραμίδος. Αἱ παράπλευροι ἔδραι μιᾶς κολούρου κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τραπέζια. Ἐὰν α_n , β_n καὶ ν εἶναι αἱ βάσεις καὶ τὸ ὕψος ἀντιστοίχως ἐνὸς ἐξ αὐτῶν (σχ. 510), τὸ ἐμβαδὸν του θὰ εἶναι $\frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \cdot \nu$ καὶ ἐπομένως ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια

τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι : $\nu \cdot \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \cdot \nu = \frac{\nu \alpha_n + \nu \beta_n}{2} \cdot \nu = \frac{P_n + p_n}{2} \nu$,

ὅπου P_n καὶ p_n εἶναι αἱ περίμετροι τῶν κανονικῶν πολυγώνων τῶν βάσεων. Ἄρα ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια κανονικῆς κολούρου πυραμίδος δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

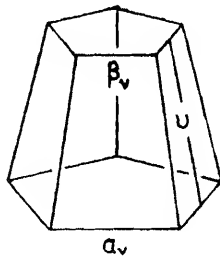
$$E_{\pi} = \frac{P_n + p_n}{2} \cdot \nu$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτὴν προσθέσωμεν καὶ τὰ ἐμβαδὰ E_n καὶ ϵ_n τῶν δύο βάσεων, λαμβάνομεν τὸν τύπον :

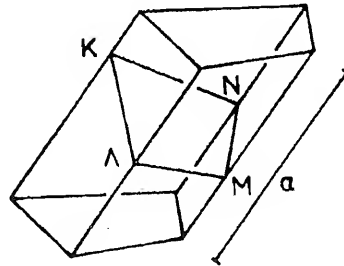
$$E_{ολ} = \frac{P_n + p_n}{2} \nu + E_n + \epsilon_n$$

τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ.

517. Πρισματικὴ ἐπιφάνεια. Αἱ παράπλευροι ἔδραι κάθε πρίσματος εἶναι παραλληλόγραμμα, τῶν ὁποίων ἡ μία πλευρὰ ἔχει μῆκος α ἴσον πρὸς τὴν παράπλευρον ἀκμὴν τοῦ πρίσματος (σχ. 511). Φέρομεν μίαν κάθετον τομὴν KLMN καὶ εἶναι φανερόν ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου KLMN εἶναι ὕψη



Σχ. 510



Σχ. 511

διὰ τὰς παραπλεύρους ἔδρας τοῦ πρίσματος. Τότε ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια, ὡς ἄθροισμα τῶν παραπλεύρων ἐδρῶν, ἰσοῦται πρὸς $\alpha \cdot KL + \alpha \cdot LM + \alpha \cdot MN + \alpha \cdot NK = \alpha (KL + LM + MN + NK) = \alpha \cdot P$. Ἄρα ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια παντὸς πρίσματος δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$E_{\pi} = \alpha \cdot P$$

ὅπου α εἶναι ἡ παράπλευρος ἀκμὴ τοῦ πρίσματος καὶ P ἡ περίμετρος τῆς καθέτου τομῆς του.

Ἐάν εἰς τὴν προηγουμένην ἐπιφάνειαν προσθέσωμεν καὶ τὰς δύο ἴσας βάσεις B τοῦ πρίσματος, λαμβάνομεν τὸν τύπον :

$$E_{ολ} = a \cdot P + 2B$$

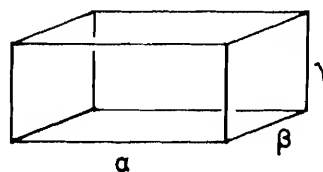
τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος.

518. Ἐπιφάνεια ὀρθοῦ πρίσματος. Οἱ τύποι τῆς προηγουμένης παραγράφου ἰσχύουν βεβαίως καὶ διὰ τὰ ὀρθὰ πρίσματα, ὅπου ὁμῶς ἡ περίμετρος P τῆς καθέτου τομῆς εἶναι ἡ αὐτὴ μετὰ τὴν περίμετρον τῆς βάσεως, ἐνῶ τὸ μήκος a τῆς παραπλεύρου ἀκμῆς δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ μετὰ τὸ ὕψος h τοῦ πρίσματος. Οὕτω λαμβάνομεν :

$$E_{π} = P \cdot h \quad \text{καὶ} \quad E_{ολ} = P \cdot h + 2B$$

519. Ἐπιφάνεια ὀρθογωνίου παραλληλεπίπεδου. Ἐάν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπίπεδου εἶναι α , β , γ (σχ. 512), ὁ τύπος τῆς προηγουμένης παραγράφου διὰ τὴν ὀλικὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ γίνεται : $E_{ολ} = (2\alpha + 2\beta)\gamma + 2\alpha\beta = 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$, ἥτοι :

$$E_{ολ} = 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$



Σχ. 512

Πόρισμα. Ἡ ἐπιφάνεια κύβου ἀκμῆς a ἰσοῦται πρὸς $6a^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

887. Κανονικὴ ἐξαγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ἀκμὴν βάσεως 5α καὶ ὕψος 6α . Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς.

888. Κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος τὸ παράπλευρον ὕψος ἰσοῦται πρὸς τὰ $5/6$ τῆς ἀκμῆς τῆς βάσεως. Ἐάν ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια αὐτῆς εἶναι 384cm^2 , νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκμὴ τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος τῆς.

889. Κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν πλευρᾶς α καὶ αἱ παράπλευροι ἔδραι τῆς σχηματίζουν μετὰ τῆς βάσεως γωνίας 30° . Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς.

890. Κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ἀκμὴν βάσεως α καὶ παράπλευρον ἀκμὴν α . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια αὐτῆς.

891. Τετραέδρου $AB\Gamma\Delta$ αἱ ἔδραι $AB\Gamma$ καὶ $\Delta B\Gamma$ εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς α καὶ ἡ διέδρος $\widehat{B\Gamma}$ εἶναι 60° . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

892. Ὄρθου τριγωνικοῦ πρίσματος ἡ βάσις εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον μετὰ καθέτους πλευρᾶς 9α καὶ 12α . Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, ἐάν τὸ ὕψος τοῦ ἰσοῦται πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν τῆς τριγωνικῆς βάσεως.

893. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια ὀρθοῦ πρίσματος μετὰ ὕψος 2α , ὅταν ἡ βάσις τοῦ εἶναι κανονικὸν α) τρίγωνον, β) τετράγωνον, γ) ἐξάγωνον, ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον ἀκτίνος α .

894. Ὄρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποῦ αἱ βάσεις εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς

α και τὸ ὕψος εἶναι 2α τέμνεται δι' ἐπίπεδου διερχομένου διὰ τῶν ἄκρων τῶν ἀκμῶν τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ὀλική ἐπιφάνεια τῆς ἀποκοπτομένης πυραμίδος.

895. Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπίπεδου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 1,3,4 καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ εἶναι 342cm^2 . Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις του.

896. Ἐξάγωνος κύβου εἶναι $\frac{12}{\sqrt{3}}\text{cm}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνειά του.

B'.

897. Τριέδρος στερεὰ γωνία μὲ κορυφὴν Κ ἔχει τὰς ἔδρας τῆς 60° ἐκάστην. Ἐπὶ μιᾶς ἀκμῆς τῆς λαμβάνομεν τμήμα ΚΛ = α καὶ φέρομεν ἐπίπεδον (ΑΒΓ) \perp ΚΑ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἄλλας ἀκμὰς τῆς τριέδρου εἰς τὰ Β καὶ Γ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραέδρου ΚΑΒΓ.

898. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο κανονικῶν πρισμάτων, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι τετράγωνον τοῦ ἑνὸς, ἑξαγώνου τοῦ ἄλλου, ἐγγεγραμμένα εἰς ἴσους κύκλους ἀκτίνος R καὶ τὰ ὕψη των εἶναι ἴσα πρὸς τὰ ἀποστήματα τῶν βάσεων ἀντιστοίχως.

899. Τέμνομεν κύβον δι' ἐπίπεδου διερχομένου διὰ τῶν ἄκρων τριῶν ἀκμῶν, συντρεχουσῶν εἰς τὴν αὐτὴν στερεὰν γωνίαν. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν στερεῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κύβος.

900. Ὄρθον κολοβὸν πρίσμα ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α. Αἱ δύο παράπλευροι ἀκμαὶ του εἶναι $\alpha(1 + \sqrt{3})$ καὶ ἡ τρίτη α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ.

901. Δείξατε ὅτι τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον μιᾶς διέδρου ἑνὸς τετραέδρου διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι ἀκμὴν εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν ἐμβαδῶν τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὰ ἐδρῶν.

ΟΓΚΟΙ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

520. Θεώρημα. Εἰς κάθε τετραέδρον τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἔδρας του ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς ὕψος εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ὅλας τὰς ἔδρας.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ΑΒΓΔ τυχὸν τετραέδρον. Φέρομεν τὰ ὕψη ΑΕ, ΒΖ (σχ. 513) καὶ ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι $(ΒΓΔ) \cdot ΑΕ = (ΑΓΔ) \cdot ΒΖ$.

Φέρομεν $AH \perp ΓΔ$ καὶ $B\Theta \perp ΓΔ \Rightarrow EH \perp ΓΔ$ καὶ $Z\Theta \perp ΓΔ$ (θεώρ. τριῶν καθέτων). Ἀρα αἱ γωνίαι \widehat{AHE} καὶ $\widehat{B\Theta Z}$ εἶναι ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῆς διέδρου $ΓΔ$, $\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{B\Theta Z}$. Τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΗΕ καὶ ΒΘΖ εἶναι ὅμοια \Rightarrow

$$(1) \quad \frac{ΑΕ}{ΒΖ} = \frac{ΑΗ}{ΒΘ}.$$

Τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ ἔχουν τὴν ΓΔ κοινήν. Ἀρα

$$(2) \quad \frac{(ΑΓΔ)}{(ΒΓΔ)} = \frac{ΑΗ}{ΒΘ}.$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἔπεται: $\frac{ΑΕ}{ΒΖ} = \frac{(ΑΓΔ)}{(ΒΓΔ)} \Rightarrow (ΒΓΔ) \cdot ΑΕ = (ΑΓΔ) \cdot ΒΖ.$

521. Όρισμός. Όγκος τετραέδρου καλείται τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἐκ τῶν ἐδρῶν του ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς ὕψος, ἐπὶ σταθερόν τινα συντελεστήν k , ἐξαρτώμενον ἀπὸ τὴν αὐθαίρετον ἐκλογὴν τῆς μονάδος μετρήσεως τῶν ὀγκῶν*.

Ὁ ὀγκος τετραέδρου $AB\Gamma\Delta$ συμβολίζεται με $(AB\Gamma\Delta)$ ἢ $V_{(AB\Gamma\Delta)}$ ἢ ἀπλῶς με V , ὅταν προηγουμένως ἔχῃ μνημονευθῇ τὸ τετράεδρον εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται ὁ ὀγκος. Οἱ αὐτοὶ συμβολισμοὶ ἐπεκτείνονται καὶ διὰ τὸν ὀγκον τυχόντος πολυέδρου.

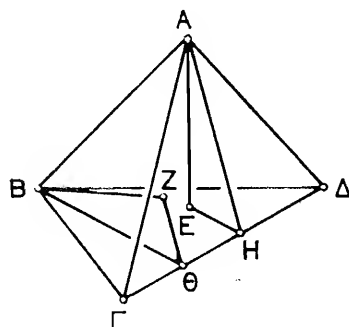
Δύο τετράεδρα ἢ ἐν γένει δύο στερεὰ με ἴσους ὀγκους καλοῦνται ἰσοδύναμα.

Πόρισμα I. Δύο τετράεδρα, με ἰσεμβαδικὰς βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμα.

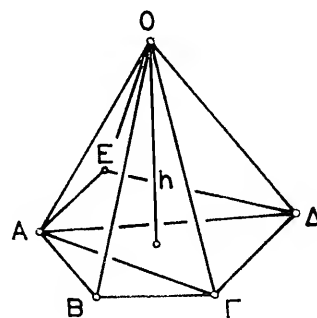
Πόρισμα II. Ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν δύο τετραέδρων με ἰσεμβαδικὰς βάσεις εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς μονάδος μετρήσεως (τοῦ συντελεστοῦ k) καὶ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοιχῶν πρὸς τὰς βάσεις ὕψων.

Πόρισμα III. Ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν δύο τετραέδρων, με ἴσα ὕψη, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοιχῶν πρὸς αὐτὰ βάσεων.

522. Θεώρημα. Ὁ ὀγκος πυραμίδος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον $k \cdot B \cdot h$, ὅπου B ἡ βάση καὶ h τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος.



Σχ. 513



Σχ. 514

Ἀπόδειξις. Ἐστω $O.AB\Gamma\Delta E$ τυχοῦσα πυραμὶς με ὕψος h (σχ. 514). Τὴν διαιροῦμεν εἰς τετράεδρα με τὰ ἐπίπεδα OAG , OAD . Τότε ἔχομεν :

$$(1) \quad (O.AB\Gamma\Delta E) = (O.AB\Gamma) + (O.A\Gamma\Delta) + (O.A\Delta E).$$

Κατὰ τὸν ὅρισμόν ὅμως (§ 521) εἶναι : $(O.AB\Gamma) = k(AB\Gamma)h$, $(O.A\Gamma\Delta) = k(A\Gamma\Delta)h$, $(O.A\Delta E) = k(A\Delta E)h$ καὶ ἐπομένως ἡ σχέσις (1) γράφεται : $(O.AB\Gamma\Delta E) = k \{ (AB\Gamma) + (A\Gamma\Delta) + (A\Delta E) \} h = k (AB\Gamma\Delta E) h \Rightarrow (O.AB\Gamma\Delta E) = kB.h$

(*) Ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ k ὀρίζεται κατωτέρω (§ 525) ἀφοῦ προηγουμένως ὀρισθῇ ἡ μονὰς μετρήσεως τῶν ὀγκῶν.

523. Θεώρημα. Κάθε τριγωνικόν πρίσμα δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία ἰσοδύναμα τετράεδρα.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $AB\Gamma\Delta EZ$ τυχόν τριγωνικόν πρίσμα (σχ. 515). Διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς τρία τετράεδρα :

$$(1) \quad (AB\Gamma\Delta EZ) = (\Delta\cdot AB\Gamma) + (\Gamma\Delta EZ) + (\Delta\cdot B\Gamma E)$$

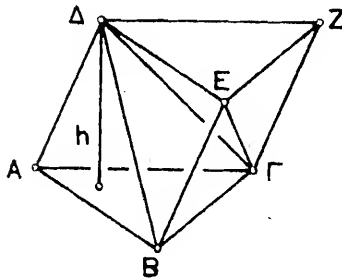
Παρατηροῦμεν ὅτι $(\Delta\cdot AB\Gamma) = (\Gamma\Delta EZ)$, διότι ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη. Ἐπίσης εἶναι $(\Gamma\Delta EZ) = (\Delta\cdot B\Gamma E)$, διότι ἔχουν ἴσας βάσεις τὰς ΓEZ καὶ ΓEB καὶ ἴσα ὕψη ἐκ τῆς κοινῆς κορυφῆς των Δ . Ἄρα τὸ τριγωνικόν πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρία ἰσοδύναμα τετράεδρα καὶ ἐπομένως ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$(AB\Gamma\Delta EZ) = 3(\Delta\cdot AB\Gamma)$$

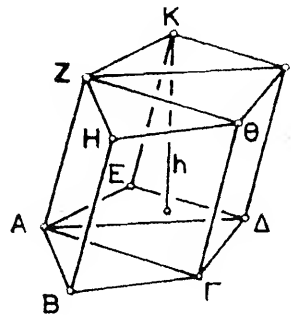
Πόρισμα. Ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς $3k\cdot B\cdot h$, ὅπου B ἡ βάση του καὶ h τὸ ὕψος του.

224. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος τυχόντος πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἐπὶ τὸν σταθερὸν συντελεστὴν $3k$.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $AB\Gamma\Delta E\cdot ZH\Theta IK$ τυχόν πρίσμα μὲ ὕψος h (σχ. 516). Διὰ μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς του τῆς AZ φέρομεν ἕλα τὰ διαγώνια ἐπίπεδα καὶ τὸ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τριγωνικά πρίσματα.



Σχ. 515



Σχ. 516

Τότε ἔχομεν : $(AB\Gamma\Delta E\cdot K) = 3k(AB\Gamma)h + 3k(A\Gamma\Delta)h + 3k(A\Delta E)h = 3k(AB\Gamma\Delta E)h$. Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον $3kBh$, ὅπου B ἡ βάση τοῦ πρίσματος.

Πόρισμα. Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις α, β, γ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον $3\cdot k\alpha\beta\gamma$.

525. Μονὰς μετρήσεως τῶν ὀγκων. Προσδιορισμὸς συντελεστοῦ k . Πρακτικοὶ λόγοι ἔχουν ἐπιβάλλει ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν ὀγκων τὴν κυβικήν, ἥτοι ἕνα κύβον μὲ ἀκμὴν τὴν μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν. Ὁ ὄγκος

τῆς μονάδος μετρήσεως, κατὰ τὸ προηγούμενον πόρισμα. ἰσοῦται πρὸς $3k \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ καὶ βεβαίως πρέπει νὰ εἶναι $3k \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Ἄρα :

$$k = \frac{1}{3}$$

Πόρισμα. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἔπεται ὅτι :

i) Ὁ ὄγκος πυραμίδος δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $V = \frac{1}{3} Bh$.

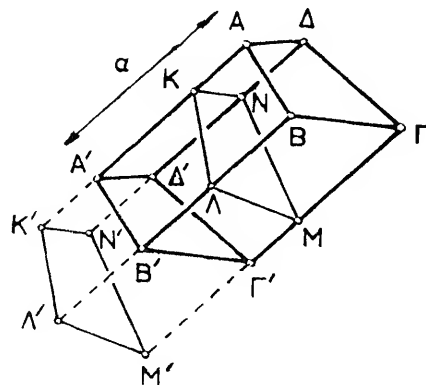
ii) Ὁ ὄγκος πρίσματος δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $V = Bh$, ὅπου B εἶναι ἡ βάσις τοῦ στερεοῦ καὶ h τὸ ὕψος του.

iii) Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις α, β, γ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $V = \alpha\beta\gamma$.

iv) Ὁ ὄγκος τοῦ κύβου ἀκμῆς α δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $V = \alpha^3$

526. Θεώρημα. Κάθε πρίσμα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθὸν πρίσμα μὲ βάσιν τὴν κάθετον τομὴν καὶ ὕψος τὴν παράπλευρον ἀκμὴν του.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $AB\Gamma\Delta.A'B'\Gamma'\Delta'$ ἐν (πλάγιον) πρίσμα μὲ παράπλευρον ἀκμὴν $AA' = \alpha$ καὶ $K\Lambda MN$ μία κάθετος τομὴ αὐτοῦ (σχ. 517). Προεκτείνοντες τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς του κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν λαμβάνομεν τμήματα $A'K' = AK$, $B'\Lambda' = B\Lambda$, $\Gamma'M' = \Gamma M$ καὶ $\Delta'N' = \Delta N$. Τότε παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι $KK' = AA' = \alpha$, διότι ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ κοινὸν τμήμα KA' καὶ ἀπὸ τὰ ἴσα τμήματα AK καὶ $A'K'$ ἀντιστοίχως. Ὀμοίως εἶναι $\Lambda\Lambda' = MM' = NN' = \alpha$. Ἄρα δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ στερεὸν τμήμα $AB\Gamma\Delta.K\Lambda MN$ ἔχει μετατοπισθῇ κατὰ τὸν δεσχυτὴν $\vec{AA'}$ εἰς τὴν θέσιν $A'B'\Gamma'\Delta'.K'\Lambda'M'N'$ καὶ ἐπομένως εἶναι : $(AB\Gamma\Delta.A'B'\Gamma'\Delta') = (K\Lambda MN.K'\Lambda'M'N')$ (1). Ἀλλὰ τὸ $K\Lambda MN.K'\Lambda'M'N'$ εἶναι ὀρθὸν πρίσμα, μὲ βάσιν τὴν κάθετον τομὴν $(K\Lambda MN) = B$ καὶ ὕψος τὴν ἀκμὴν $KK' = \alpha$. Ἐπομένως εἶναι $(K\Lambda MN.K'\Lambda'M'N') = B \cdot \alpha$ καὶ τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται : $(AB\Gamma\Delta.A'B'\Gamma'\Delta') = B \cdot \alpha$.



Σχ. 517

227. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τετράεδρα ἔχουν μίαν στερεὰν γωνίαν ἴσην, ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν των εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν ἀκμῶν τῶν περιεχουσῶν τὰς ἴσας στερεὰς γωνίας.

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν $AB\Gamma\Delta$ καὶ $A'B'\Gamma'\Delta'$ τὰ δύο τετράεδρα (χ. 518) τοποθετημένα εἰς τρόπον, ὥστε νὰ συμπίπτουν αἱ ἴσαι στερεαὶ γωνία εἰς τὸ A . Φέρομεν $BE \perp (A\Gamma\Delta)$ καὶ $B'E' \perp (A\Gamma'\Delta')$. Τότε θὰ εἶναι :

$$(1) \quad \frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')} = \frac{\frac{1}{3} (A\Gamma\Delta) BE}{\frac{1}{3} (A\Gamma'\Delta') B'E'} = \frac{(A\Gamma\Delta) BE}{(A\Gamma'\Delta') B'E'}$$

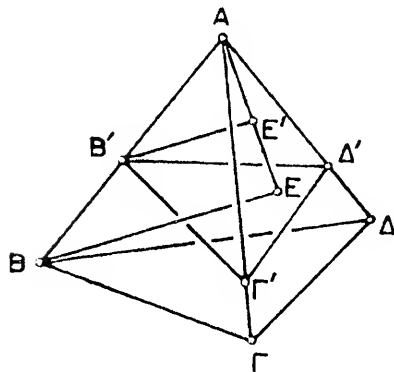
Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ καὶ $A\Gamma'\Delta'$ ἔχουν κοινὴν τὴν γωνίαν \widehat{A} , ἔχομεν $\frac{(A\Gamma\Delta)}{(A\Gamma'\Delta')} = \frac{A\Gamma \cdot A\Delta}{A\Gamma' \cdot A\Delta'}$, ἐνῶ ἀπὸ τὰ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα ABE

καὶ $AB'E'$ λαμβάνομεν $\frac{BE}{B'E'} = \frac{AB}{AB'}$. Τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται :

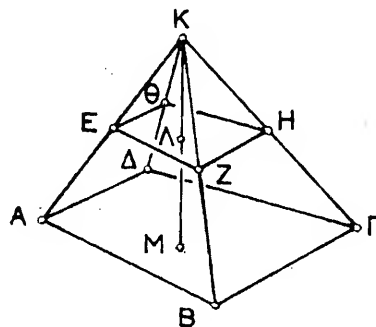
$$\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')} = \frac{A\Gamma \cdot A\Delta}{A\Gamma' \cdot A\Delta'} \cdot \frac{AB}{AB'} \Rightarrow \frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')} = \frac{AB \cdot A\Gamma \cdot A\Delta}{AB' \cdot A\Gamma' \cdot A\Delta'}$$

528. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος κολούρου πυραμίδος δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον :

$$V = \frac{1}{3} (B + \sqrt{B\beta} + \beta)h.$$



Σχ. 518



Σχ. 519

Ἀπόδειξις. Ἐστω $AB\Gamma\Delta \cdot EZH\Theta$ μία κολούρος πυραμὶς μὲ βάσεις τὰ ὅμοια πολύγωνα $(AB\Gamma\Delta) = B$, $(EZH\Theta) = \beta$ καὶ ὕψος h (σχ. 519).

Θεωροῦμεν τὸ σημεῖον K , εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς, καὶ τὸ κάθετον τμήμα KM ἐπὶ τὰς βάσεις τῆς κολούρου πυραμίδος. Ὁ ὄγκος V αὐτῆς ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ὀγκῶν τῶν δύο πυραμίδων $K \cdot AB\Gamma\Delta$ καὶ $K \cdot EZH\Theta$, ἥτοι εἶναι

$$(1) \quad V = \frac{1}{3} B \cdot KM - \frac{1}{3} \beta \cdot KL$$

$$\text{Γνωρίζομεν ὅτι (§ 499) } \frac{B}{\beta} = \frac{KM^2}{KL^2} \Rightarrow$$

$$(2) \quad \frac{KM}{KL} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{\beta}}$$

$$\text{Από την σχέση (2) λαμβάνομεν ἄφ' ἑνὸς μὲν} \quad \frac{KM}{KM - KL} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}} \Rightarrow$$

$$\frac{KM}{h} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}} \Rightarrow KM = \frac{h \sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}, \text{ ἄφ' ἑτέρου δὲ} \quad \frac{KM - KL}{KL} =$$

$$\frac{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}} \Rightarrow \frac{h}{KL} = \frac{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}} \Rightarrow KL = \frac{h \sqrt{\beta}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}. \text{ Ἀντικαθι-}$$

στῶμεν ἐξ αὐτῶν τὰς τιμὰς τῶν KM καὶ KL εἰς τὴν σχέσηιν (1) καὶ λαμβάνομεν :

$$V = \frac{1}{3} \left[B \frac{h \sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}} - \beta \frac{h \sqrt{\beta}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}} \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{\sqrt{B}^3 - \sqrt{\beta}^3}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}} \right] h =$$

$$\frac{1}{3} (\sqrt{B}^2 + \sqrt{B}\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}^2) h = \frac{1}{3} (B + \sqrt{B}\sqrt{\beta} + \beta) h, \text{ ἥτοι :}$$

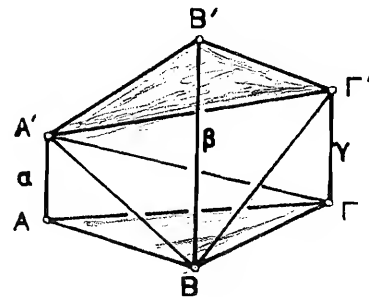
$$V = \frac{1}{3} (B + \sqrt{B}\sqrt{\beta} + \beta)h$$

529. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος κολοβού τριγωνικού πρίσματος δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$V = \frac{1}{3} B(a + \beta + \gamma),$$

ὅπου B εἶναι ἡ κάθετος τομῇ αὐτοῦ καὶ α, β, γ αἱ παράπλευροι ἄκμαί του.

Ἀπόδειξις. i) Ἐστω ὅτι τὸ κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα $AB\Gamma.A'B'\Gamma'$ (σχ. 520) εἶναι ὀρθόν. Τότε ἡ βᾶσις του $(AB\Gamma) = B$ εἶναι καὶ κάθετος τομῇ αὐτοῦ καὶ ὁ ὄγκος του V ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν πυραμίδων, ὡς ἐξῆς :



Σχ. 520

$$(1) \quad V = (A'.AB\Gamma) + (A'.BB'\Gamma') + (A'.B\Gamma\Gamma').$$

Ἐκτελοῦμεν τοὺς ἐξῆς προφανεῖς μετασχηματισμοὺς (§ 521 πόρ. I): $(A'.BB'\Gamma')$

$$= (A.BB'\Gamma') = (\Gamma'.ABB') = (\Gamma.ABB') = (B'.AB\Gamma) = \frac{1}{3} B\beta \text{ καὶ}$$

$$(A'B\Gamma\Gamma') = (A.B\Gamma\Gamma') = (\Gamma'.AB\Gamma) = \frac{1}{3} B\gamma. \text{ Ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον εἶναι}$$

$$(A'.AB\Gamma) = \frac{1}{3} B\alpha, \text{ ή σχέσις (1) γράφεται: } V = \frac{1}{3} B\alpha + \frac{1}{3} B\beta + \frac{1}{3} B\gamma \Rightarrow$$

$$V = \frac{1}{3} B(\alpha + \beta + \gamma).$$

ii) Έστω ότι τὸ τριγωνικὸν κολοβὸν πρῖσμα δὲν εἶναι ὀρθὸν (σχ. 521). Φέρομεν μίαν κάθετον τομὴν (ΚΛΜ) = Β αὐτοῦ καὶ τότε τὸ στερεὸν ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο ὀρθῶν κολοβῶν τριγωνικῶν πρισμάτων με κοινὴν βάσιν τὴν (ΚΛΜ) = Β, ἥτοι :

$$(2) V = (ΚΛΜ.ΑΒ\Gamma) + (ΚΛΜ.Α'Β'\Gamma').$$

Κατὰ τὸ προηγούμενον θὰ ἔχωμεν :

$$(ΚΛΜ.ΑΒ\Gamma) = \frac{1}{3} B(ΚΑ + ΛΒ + Μ\Gamma)$$

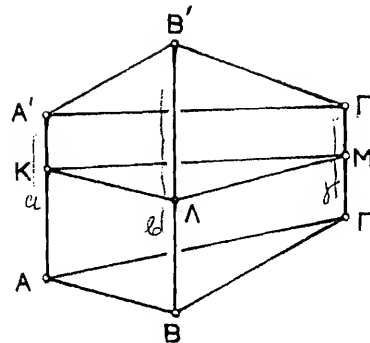
$$\text{καὶ } (ΚΛΜ.Α'Β'\Gamma') = \frac{1}{3} B(ΚΑ' + ΛΒ' + Μ\Gamma'), \text{ ἐπομένως ἡ σχέσις (2)}$$

γράφεται :

$$V = \frac{1}{3} B(ΚΑ + ΛΒ + Μ\Gamma) + \frac{1}{3} B(ΚΑ' + ΛΒ' + Μ\Gamma') = \frac{1}{3} B(ΑΑ'$$

$$+ ΒΒ' + \Gamma\Gamma') = \frac{1}{3} B(\alpha + \beta + \gamma), \text{ ἥτοι}$$

$$V = \frac{1}{3} B(\alpha + \beta + \gamma)$$



Σχ. 521

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

902. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α.

903. Κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ἡ ἀκμὴ τῆς βάσεως εἶναι α καὶ αἱ παράπλευροί ἔδραι τῆς σχηματίζουν γωνίας 45° μετὰ τὴν βάσιν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τῆς.

904. Δίδονται τρεῖς παράλληλοι εὐθεῖαι (e_1) , (e_2) , (e_3) , ὅχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐπὶ τῆς (e_1) ὀλισθαίνει τμῆμα AB σταθεροῦ μήκους καὶ ἐπὶ τῶν (e_2) καὶ (e_3) δύο σημεῖα Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ μεταβλητοῦ τετραέδρου ABΓΔ εἶναι σταθερός.

905. Ὁ ὄγκος κανονικοῦ τετραέδρου νὰ ἐκφρασθῇ α) ἐκ τοῦ ὕψους του h, β) ἐκ τῆς ἐπιφανείας του E.

906. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ἐπιφάνεια κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ τῆς βάσεως εἶναι α καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμὴ εἶναι $\frac{\alpha \sqrt{17}}{2}$.

907. Κανονικής τετραγωνικής πυραμίδος ή άκμή της βάσεως είναι α και ή παρά-
πλευρος επιφάνεια είναι διπλάσια της βάσεως. Να υπολογισθῇ ό όγκος της πυραμίδος.

B'.

908. Δείξατε ότι ό όγκος τετραέδρου ισούται πρὸς τὸ $1/3$ τοῦ γινομένου μιᾶς άκμῆς
του ἐπὶ τὴν προβολὴν τοῦ στερεοῦ εἰς ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν άκμὴν ταύτην.

909. Ἐάν τετραέδρου αἱ δύο ἀπέναντι άκμαι εἶναι ὀρθογώνιοι, δείξατε ὅτι ό όγκος του
ισοῦται πρὸς $1/6$ τοῦ γινομένου τῶν άκμῶν τούτων, ἐπὶ τὴν ἐλάχιστην ἀπόστασιν αὐτῶν.

910. Ἐάν τετραέδρου ή μία κορυφή προβάλλεται ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἔδραν εἰς τὸ ὀρ-
θόκεντρον αὐτῆς, δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον δύο οἰωνδῆποτε άκμῶν τοῦ τετραέδρου ἐπὶ τὴν
κοινὴν κάθετον αὐτῶν εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἐκλογῆς τῶν άκμῶν τούτων.

911. Τετραέδρου $AB\Gamma\Delta$ αἱ ἔδραι $AB\Gamma$ καὶ $\Delta B\Gamma$ εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα, ή άκμή
 $A\Delta = \alpha$ καὶ ή διέδρος $\widehat{B\Gamma}$ εἶναι 60° . Να υπολογισθῇ ό όγκος του.

912. Ἐντὸς τετραέδρου νά εὑρεθῇ σημεῖον K τοιοῦτον, ὥστε τὰ τετράεδρα με κορυ-
φήν τὸ K καὶ βάσεις τὰς ἔδρας τοῦ τετραέδρου, νά εἶναι ἰσοδύναμα.

913. Πυραμίδος $K.AB\Gamma\Delta$ ή βάσις $AB\Gamma\Delta$ εἶναι παραλληλόγραμμον. Δείξατε ὅτι
ό όγκος της ισούται πρὸς τὰ $2/3$ τῆς ἔδρας KAB ἐπὶ τὴν ἐλάχιστην ἀπόστασιν τῶν άκμῶν
 KA καὶ $\Gamma\Delta$.

914. Κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ή άκμή της βάσεως εἶναι 2α καὶ αἱ παρά-
πλευροι ἔδραι σχηματίζουν με τὴν βάσιν γωνίας 15° . Να υπολογισθῇ ό όγκος της.

915. Δίδεται τετράγωνον $AB\Gamma\Delta$ πλευρᾶς α . Ἀπὸ τὰς κορυφὰς A καὶ Γ φέρομεν
καθέτους ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος του καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν
τμήματα $AE = AF$ καὶ $\Gamma Z = AB$. Να υπολογισθῇ ό όγκος τοῦ στερεοῦ $AB\Gamma\Delta EZ$.

916. Δίδεται τετράγωνον $AB\Gamma\Delta$ πλευρᾶς α . Ἀπὸ τὰς κορυφὰς του B καὶ Δ φέρομεν
κάθετα τμήματα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου $BE = 3\alpha$, $\Delta Z = 2\alpha$ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ
μέρος. Να υπολογισθῇ ό όγκος τοῦ τετραέδρου $A\Gamma EZ$.

917. Να εὑρεθῇ ό όγκος κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ή παράπλευρος
ἐπιφάνεια εἶναι $12\alpha^2$ καὶ αἱ παράπλευροι ἔδραι σχηματίζουν διέδρους γωνίας 30° με τὴν
βάσιν.

918. Τρισσογώνιος στερεά γωνία K τέμνεται δι' ἐπιπέδου εἰς τὰ A , B καὶ Γ . Ἐάν
 $KA = 2\alpha$, $KB = 3\alpha$ καὶ $K\Gamma = 4\alpha$, νά υπολογισθῇ i) τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς καὶ ii) τὸ ὕψος
 KH τοῦ τετραέδρου $KAB\Gamma$.

A'.

919. Να εὑρεθῇ ό όγκος πρίσματος, τοῦ ὁποίου ή βάσις εἶναι κανονικὸν α) τρίγω-
νον, β) τετράγωνον, γ) ἑξάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ακτίνος R καὶ ἔχει ὕψος δι-
πλάσιον τῆς άκμῆς της βάσεως.

920. Ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ή βάσις εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον με κάθετους
πλευρᾶς 20α καὶ 15α , τὸ δὲ ὕψος του ισούται με τὴν ὑποτείνουσιν τῆς τριγωνικῆς βάσεως.
Νά εὑρεθῇ ό όγκος αὐτοῦ.

921. Τριγωνικὸν πρίσμα ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α καὶ αἱ παρά-
πλευροι άκμαι του εἶναι κεκλιμέναι κατὰ 60° πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως. Να υπολογισθῇ
τὸ ἐμβαδὸν τῆς καθέτου τομῆς του.

922. Δείξτε ότι ο όγκος τριγωνικού πρίσματος ισοῦται πρὸς τὸ ἕμισυ τοῦ γινομένου μιᾶς παραπλεύρου ἑδρας του, ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς ἀπ' αὐτήν.

923. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν δύο πρισμαμάτων, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι κωνικὸν ἐξάγωνον τοῦ ἐνός, τρίγωνον τοῦ ἄλλου, ἐγγεγραμμένα εἰς ἴσους κύκλους ἀκτίνος R , τὰ δὲ ὕψη των ἴσα πρὸς τὰ ἀποστήματα τῶν βάσεων ἀντιστοίχως.

924. Δείξτε ότι τὸ ἄθροισμα τῶν ὀγκῶν τῶν δύο πυραμίδων, μὲ κοινὴν κορυφὴν τυχόν σημείον ἐσωτερικὸν δοθέντος πρίσματος καὶ βάσεις τὰς βάσεις τοῦ πρίσματος, εἶναι σταθερόν.

925. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὀγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπίπεδου, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόδοδον μὲ ἄθροισμα 27cm καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι 454cm^2 .

926. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὀγκος τοῦ κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι 486cm^2 .

927. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὀγκος κύβου α) ἐκ τῆς διαγωνίου του δ καὶ β) ἐκ τῆς ἐπιφανείας του E .

928. Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπίπεδου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν $2, 3, 4$ καὶ ὁ ὀγκος του εἶναι 648cm^3 . Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις του.

929. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τῶν συντρεχουσῶν εἰς τὴν αὐτὴν κορυφὴν A κύβου ἀκμῆς α λαμβάνομεν τμήματα $AB' = AT' = AD' = 2\alpha/3$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν τοῦ κύβου καὶ τοῦ τετραέδρου $AB'T'D'$.

B'.

930. Ὄρθογωνίου παραλληλεπίπεδου αἱ διαστάσεις εἶναι $3\alpha, 4\alpha, 5\alpha$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὀγκος του, ἐὰν ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν ὀγκῶν ληφθῇ ὁ ὀγκος κανονικοῦ τετραέδρου μὲ ἀκμὴν 2α .

931. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπίπεδου, ἐὰν ἡ διαγώνιος αὐτοῦ εἶναι 26cm , ἡ διαγώνιος μιᾶς ἑδρας του 10cm καὶ ἡ ἐπιφάνειά του 768cm^2 .

932. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν παραλληλεπίπεδου καὶ τοῦ τετραέδρου τοῦ ὁποίου τρεῖς ἀκμὲς συντρέχουν εἰς μίαν κορυφὴν τοῦ παραλληλεπίπεδου.

933. Δοθέν παραλληλεπίπεδον νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' ἐπιπέδων ἀγομένων ἐκ μιᾶς ἀκμῆς του.

934. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν ὀρθογωνίου παραλληλεπίπεδου καὶ τοῦ οκταέδρου μὲ κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ παραλληλεπίπεδου.

935. Δείξτε ότι οἱ ὀγκοὶ δύο παραλληλεπίπεδων, μὲ μίαν στερεὰν γωνίαν κοινήν, εἶναι ὅπως τὰ γινόμενα τῶν ἀκμῶν τῶν περιεχουσῶν τὴν κοινήν στερεὰν γωνίαν.

A'.

936. Δείξτε ότι ὁ ὀγκος κολούρου πυραμίδος δίδεται ἐκ τοῦ τύπου $V = \frac{1}{3} B(1 + \lambda + \lambda^2)h$, ἐνθα λ εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητος τῶν δύο βάσεων.

937. Κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς, μὲ ἀκμὴν βάσεως 2α καὶ ὕψος $\alpha\sqrt{3}$, τέμνεται δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν καὶ διερχομένου ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ ὕψους. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὅλική ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὀγκος τῆς σχηματιζομένης κολούρου πυραμίδος.

938. Ὄρθον κολοβὸν πρίσμα ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α καὶ παραπλευροὺς ἀκμὰς $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὀγκος του.

939. Δείξτε ότι ο όγκος κολοβού τριγωνικού πρίσματος ισοϋται προς το έμβαδόν της καθέτου τομής του επί την απόστασιν των κ. βάσεων των βάσεων.

Β'.

940. Κανονικής τετραγωνικής πυραμίδος ή βάσις έχει πλευράν 2α και αί παράπλευροι άκμιαί σχηματίζουν γωνίας 60° μετά τοῦ επιπέδου της βάσεως. Νά εύρεθῇ εἰς ποίαν απόστασιν από την βάσιν πρέπει νά άχθῇ επίπεδον παράλληλον προς την βάσιν οὔτως, ὥστε ἡ άποκοπτομένη κόλουρος πυραμὶς νά ἔχη ὄγκον $\frac{104\alpha^3\sqrt{3}}{81}$.

941. Τριγωνικού πρίσματος αἱ παράπλευροι άκμιαί ἔχουν μήκος 20cm. Ἐπὶ δύο παραπλεύρων άκμῶν λαμβάνομεν σημεία Η και Θ, άπέχοντα από τὰς άντιστοίχους κορυφάς της αὐτῆς βάσεως άποστάσεις 12cm και 15cm. Ἐπὶ τῆς τρίτης παραπλεύρου άκμῆς νά όρισθῇ σημείον Ι οὔτως, ὥστε τὸ επίπεδον (ΗΘΙ) νά διαιρῇ τὸ πρίσμα εἰς δύο ισοδύναμα μέρη.

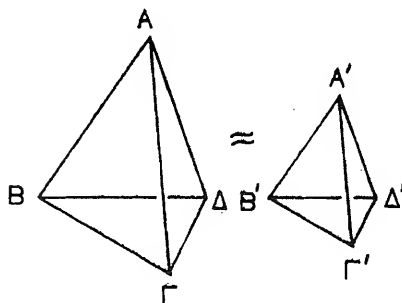
942. Δείξτε ότι ο όγκος κολοβού παραλληλεπιπέδου ισοϋται προς τὸ 1/4 τοῦ γινομένου της καθέτου τομῆς επί τὸ άθροισμα τῶν παραπλεύρων άκμῶν του.

943. Δείξτε ότι ο όγκος κολοβού παραλληλεπιπέδου ισοϋται προς τὸ έμβαδόν της καθέτου τομῆς του επί την απόστασιν τῶν κέντρων τῶν βάσεων αὐτοῦ.

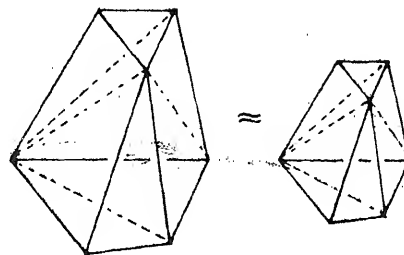
ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

530. "Όμοια τετράεδρα. Ὅρισμός. Δύο τετράεδρα καλοῦνται ὅμοια, ὅταν ἔχουν τὰς ἑδρας των ὁμοίας μίαν προς μίαν και ὁμοίως τοποθετημένας (σχ. 522).

Ὁ λόγος ὁμοιότητος τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν εἶναι ὁ αὐτός δι' ὅλα τὰ ζεύγη τῶν ὁμοίων ἑδρῶν και καλεῖται λόγος ὁμοιότητος τῶν τετράεδρων. Αἱ άντίστοιχοι στερεαί, ὡς και αἱ διεδροι γωνίαι τῶν δύο τετράεδρων, εἶναι ἴσαι.



Σχ. 522



Σχ. 523

531. "Όμοια πολύεδρα. Ὅρισμός. Δύο πολύεδρα καλοῦνται ὅμοια, ἂν δύνανται νά διαιρεθοῦν δι' επιπέδων άγομένων εκ μιᾶς κορυφῆς των άντιστοίχως εἰς ὅμοια τετράεδρα και ὁμοίως τοποθετημένα (σχ. 523).

Ἀπό τὰ προηγούμενα ἔπονται τὰ ἑξῆς :

i) Ὑπάρχει άμφιμονοσήμαντος άντιστοιχία ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ

ένος πολυέδρου (ἔδραι, κορυφαί, ἀκμαί, γωνίαι κλπ.) πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ ἄλλου. Δύο ἀντίστοιχα στοιχεῖα καλοῦνται **ὁμόλογα**.

ii) Αἱ ἀντίστοιχοι ἔδραι εἶναι ὅμοια πολύγωνα μὲ τὸν αὐτὸν λόγον ὁμοιότητος τῶν πολυέδρων.

iii) Αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι τῶν δύο πολυέδρων (ἐπίπεδοι, διέδροι, στερεαί) εἶναι ἴσαι.

iv) Ἡ σχέσις τῆς ὁμοιότητος δύο πολυέδρων, ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ τὸ \approx , εἶναι σχέσις ἀνακλαστική, συμμετρική καὶ μεταβατική, ἥτοι :

$$\alpha) (\Sigma) \approx (\Sigma),$$

$$\beta) (\Sigma_1) \approx (\Sigma_2) \Rightarrow (\Sigma_2) \approx (\Sigma_1),$$

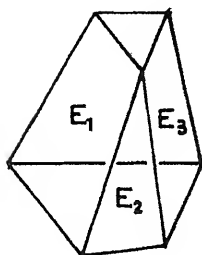
$$\gamma) (\Sigma_1) \approx (\Sigma_2) \wedge (\Sigma_2) \approx (\Sigma_3) \Rightarrow (\Sigma_1) \approx (\Sigma_3)$$

Ἄρα ἡ σχέσις τῆς ὁμοιότητος εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

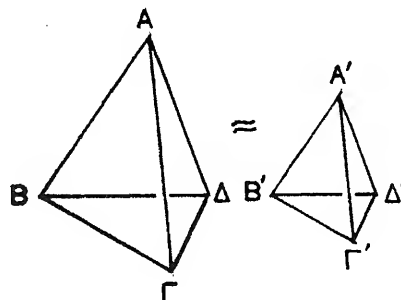
532. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ὅμοια πολύεδρα μὲ λόγον ὁμοιότητος λ (σχ. 524) καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἔδραι ἔχουν ἐμβαδὰ E_1, E_2, \dots, E_n καὶ E'_1, E'_2, \dots, E'_n ἀντιστοίχως. Ἐπειδὴ αἱ ἀντίστοιχοι ἔδραι εἶναι ὅμοια πολύγωνα μὲ λόγον ὁμοιότητος λ , ἔχομεν :

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{E'_1} &= \lambda^2, \frac{E_2}{E'_2} = \lambda^2, \dots, \frac{E_n}{E'_n} = \lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{E_1}{E'_1} = \frac{E_2}{E'_2} = \dots = \frac{E_n}{E'_n} = \\ &= \frac{E_1 + E_2 + \dots + E_n}{E'_1 + E'_2 + \dots + E'_n} = \frac{E}{E'}, \text{ ὅπου } E \text{ καὶ } E' \text{ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο πολυέδρων. Ἄρα εἶναι } \frac{E}{E'} = \lambda^2. \end{aligned}$$



Σχ. 524



Σχ. 525

533. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν δύο ὁμοίων τετραέδρων ἰσοῦται πρὸς τὸν κύβον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ὅμοια τετραέδρα $AB\Gamma\Delta$ καὶ $A'B'\Gamma'\Delta'$ (σχ. 525) καὶ ἔστω λ ὁ λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν. Τότε θὰ εἶναι : $\frac{AB}{A'B'} =$

$$= \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \lambda \Rightarrow AB = \lambda A'B', A\Gamma = \lambda A'\Gamma', A\Delta = \lambda A'\Delta'. \text{ Έπει-}$$

δη αἱ τρίεδροι γωνίαι \widehat{A} καὶ $\widehat{A'}$ εἶναι ἴσαι, ἔπεται ὅτι (§ 527) :

$$\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')} = \frac{AB \cdot A\Gamma \cdot A\Delta}{A'B' \cdot A'\Gamma' \cdot A'\Delta'} = \frac{\lambda A'B' \cdot \lambda A'\Gamma' \cdot \lambda A'\Delta'}{A'B' \cdot A'\Gamma' \cdot A'\Delta'} = \lambda^3. \text{ Ἄρα}$$

$$\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')} = \lambda^3.$$

534. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων ἰσοῦται πρὸς τὸν κύβον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.

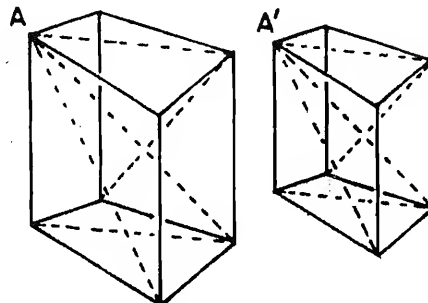
Ἀπόδειξις. Ἀς θεωρήσωμεν δύο ὁμοία πολυέδρα (σχ. 526), τῶν ὁποίων οἱ ὀγκοὶ εἶναι V καὶ V' . Ἐκ δύο ὁμολόγων κορυφῶν A καὶ A' φέρομεν ἐπίπεδα καὶ διαιροῦμεν τὰ δύο στερεὰ εἰς ζεύγη ὁμοίων τετραέδρων μὲ τὸν αὐτὸν λόγον ὁμοιότητος λ , ἔστωσαν δὲ V_1, V_2, \dots, V_n καὶ V'_1, V'_2, \dots, V'_n οἱ ὀγκοὶ αὐτῶν. Τότε θὰ εἶναι (§ 533) :

$$\frac{V_1}{V'_1} = \lambda^3, \frac{V_2}{V'_2} = \lambda^3, \dots, \frac{V_n}{V'_n} = \lambda^3 \Rightarrow \lambda^3 = \frac{V_1}{V'_1} = \frac{V_2}{V'_2} = \dots = \frac{V_n}{V'_n} =$$

$$\frac{V_1 + V_2 + \dots + V_n}{V'_1 + V'_2 + \dots + V'_n} = \frac{V}{V'}.$$

Ἄρα εἶναι :

$$\frac{V}{V'} = \lambda^3.$$



Σχ. 526

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

944. Δίδεται τετραέδρον $AB\Gamma\Delta$ καὶ ἔστωσαν K, Λ, M, N τὰ κέντρα βάρους τῶν ἐδρῶν τοῦ

α) Δείξατε ὅτι $AB\Gamma\Delta \approx K\Lambda M N$.

β) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν καὶ ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν τῶν δύο τετραέδρων.

945. Δίδεται πυραμὶς $K.AB\Gamma\Delta$. Τέμνομεν αὐτὴν δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν τῆς καὶ διερχομένου ἀπὸ τοῦ μέσου A' τῆς ἀκμῆς KA .

α) Δείξατε ὅτι σχηματίζεται νέα πυραμὶς ὁμοία τῆς δοθείσης.

β) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν καὶ ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν τῶν δύο πυραμίδων.

946. Ἡ βάσις πυραμίδος ἔχει ἐμβαδὸν 144cm^2 . Τέμνομεν μὲ ἐπίπεδον παράλληλον τῆς βάσεως εἰς ἀπόστασιν 4cm ἀπὸ τῆς κορυφῆς καὶ ἡ τομὴ ἔχει ἐμβαδὸν 64cm^2 . Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος.

947. Δύο ισοϋψείς πυραμίδες έχουν βάσεις 120cm^2 και 180cm^2 αντίστοιχως. Τέμνομεν αὐτάς δι' ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις των εἰς τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῶν καὶ ἡ τομὴ τῆς πρώτης πυραμίδος εἶναι 70cm^2 . Νὰ εὑρεθῇ ἡ τομὴ τῆς δευτέρας πυραμίδος.

948. Δείξατε ὅτι οἱ κύβοι τῶν ἐπιφανειῶν δυο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ὅπως τὰ τετράγωνα τῶν ὅγκων των.

Β'.

949. Δείξατε ὅτι τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν τετραέδρου εἶναι κορυφαὶ ὀκταέδρου τοῦ ὁποῦ ὁ ὅγκος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ὅγκου τοῦ τετραέδρου.

950. Δίδεται πολύεδρον $AB\Gamma\dots N$. Ἐπὶ τῶν ἡμιευθειῶν $AB, A\Gamma, \dots, AN$ λαμβάνομεν σημεῖα B', Γ', \dots, N' ἀντιστοιχῶς οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{AB'}{AB} = \frac{A\Gamma'}{A\Gamma} = \dots = \frac{AN'}{AN} = \lambda$.

Δείξατε ὅτι τὸ πολύεδρον $AB'\Gamma'\dots N'$ εἶναι ὁμοιον πρὸς τὸ $AB\Gamma\dots N$.

951. Δοθεῖσα κύλινδρος πυραμὶς νὰ διαιρεθῇ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις της εἰς δύο ὁμοίας κολούρους πυραμίδας.

952. Νὰ τμηθῇ πυραμὶς ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν οὕτως, ὥστε νὰ χωρισθῇ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

953. Νὰ τμηθῇ πυραμὶς ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν οὕτως, ὥστε νὰ χωρισθῇ εἰς δύο στερεὰ μὲ δεδομένον λόγον μ/ν .

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

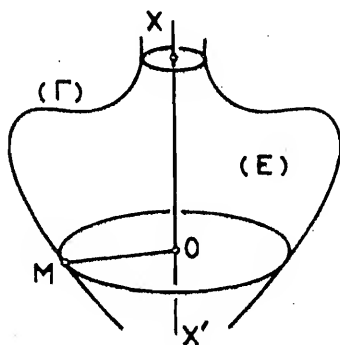
ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

535. Ὁρισμοί.

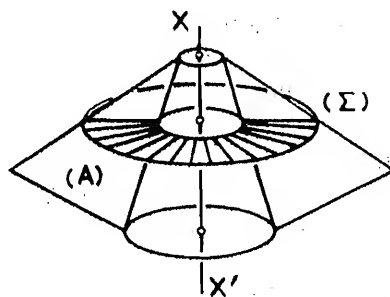
i) Κάθε γραμμὴ (Γ), περιστρεφομένη περὶ ἄξονα xx' κατὰ μίαν πλήρη γωνίαν (360°), διαγράφει ἐπιφάνειαν E , ἥ ὁποία καλεῖται ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς (σχ. 527).

ii) Κάθε σχῆμα (A), στρεφόμενον περὶ ἄξονα xx' κατὰ μίαν πλήρη γωνίαν, δημιουργεῖ στερεὸν (Σ), τὸ ὁποῖον καλεῖται στερεὸν ἐκ περιστροφῆς (σχ. 528).

Σημειώσεις. Εἰς τὰ ἐπόμενα θὰ λέγωμεν χάριν συντομίας «σχῆμα στρέφεται περὶ ἄξονα» καὶ θὰ ἐννοοῦμεν «σχῆμα στρέφεται πλήρη στροφὴν περὶ ἄξονα».



Σχ. 527



Σχ. 528

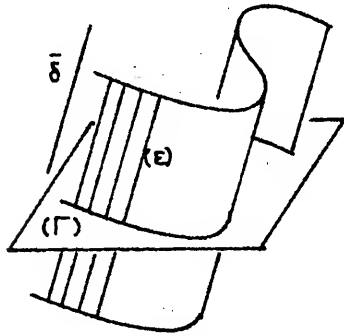
Πόρισμα I. Ἐκ τυχόντος σημείου M τῆς γραμμῆς (Γ) (σχ. 527) φέρομεν $MO \perp xx'$. Εἰς τὴν περιστροφὴν τὸ τμήμα MO παραμένει σταθερὸν κατὰ μέγεθος, τὸ σημεῖον O σταθερὸν κατὰ θέσιν καὶ ἐπομένως τὸ σημεῖον M διαγράφει κύκλον (O, OM), τοῦ ὁποῖου τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Ἄρα ἡ τομὴ ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς ὑπὸ ἐπιπέδου κάθετου ἐπὶ τὸν ἄξονα εἶναι κύκλος.

Πόρισμα II. Ἡ τομὴ στερεοῦ ἐκ περιστροφῆς, ὑπὸ ἐπιπέδου κάθετου ἐπὶ τὸν ἄξονα περιστροφῆς (σχ. 528), εἶναι ἐν γένει κυκλικὸς δακτύλιος.

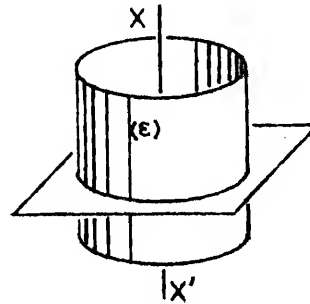
Πόρισμα III. Κάθε ἐπιφάνεια ἢ κάθε στερεὸν ἐκ περιστροφῆς ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὸν ἄξονα περιστροφῆς, ὁ ὁποῖος καλεῖται καὶ ἄξων τοῦ σχήματος.

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

536. Γενική έννοια κυλινδρικής επιφανείας. Κυλινδρική επιφάνεια ἐν γένει καλεῖται κάθε εὐθριογενής επιφάνεια, τῆς ὁποίας ἡ εὐθεῖα (ϵ), ποὺ τὴν διαγράφει, παραμένει πάντοτε παράλληλος πρὸς δεδομένην διεύθυνσιν (δ) καὶ τέμνει σταθερὰν γραμμὴν (Γ) (σχ. 529). Ἡ γραμμὴ (Γ) καλεῖται ὁδηγὸς τῆς κινήσεως τῆς εὐθείας (ϵ). Ἡ κυλινδρική επιφάνεια ἐν γένει δὲν εἶναι ἐκ περιστροφῆς επιφάνεια.



Σχ. 529



Σχ. 530

537. Ὀρθή κυλινδρική επιφάνεια καλεῖται ἡ ἐκ περιστροφῆς επιφάνεια, ἡ ὁποία διαγράφεται ἀπὸ εὐθείαν (ϵ), παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς xx' (σχ. 530).

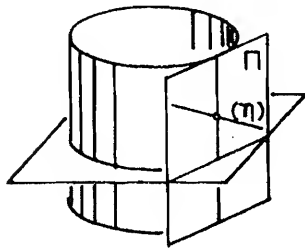
Αἱ διαδοχικαὶ θέσεις τῆς εὐθείας (ϵ) εἰς τὴν περιστροφὴν καλοῦνται γενέτειραι ἀκμαὶ τῆς κυλινδρικής επιφανείας καὶ εἶναι μεταξύ των παράλληλοι, ἐφ' ὅσον ἐκάστη εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Εἰς τὰ ἐπόμενα θὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον μὲ ὀρθὰς κυλινδρικὰς επιφανείας (ἐκ περιστροφῆς) καὶ ἐπομένως ὅταν θὰ λέγωμεν κυλινδρική επιφάνεια, θὰ ἐννοοῦμεν ὀρθή κυλινδρική επιφάνεια ἐκ περιστροφῆς.

538. Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον κυλινδρικής επιφανείας καλεῖται κάθε ἐπίπεδον (Π), τὸ ὁποῖον ἔχει μετὰ τῆς κυλινδρικής επιφανείας κοινὴν μίαν μόνον γενέτειραν ἀκμὴν (σχ. 531). Κάθε εὐθεῖα (η) τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου (ἐξαιρέσει τῆς γενετείρας ἀκμῆς) καλεῖται ἐφαπτομένη εὐθεῖα τῆς κυλινδρικής επιφανείας καὶ ἔχει ἐν μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν επιφάνειαν.

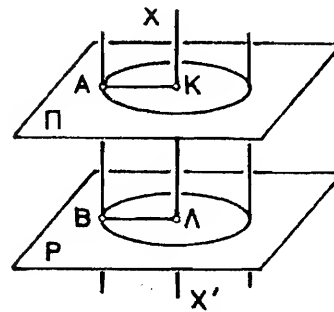
539. Θεώρημα. Αἱ τομαὶ κυλινδρικής επιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων καθέτων πρὸς τὸν ἄξονα τῆς επιφανείας εἶναι ἴσοι κύκλοι.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν δύο τομὰς μιᾶς κυλινδρικής επιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων (Π) καὶ (P) καθέτων πρὸς τὸν ἄξονα xx' τῆς επιφανείας (σχ. 532). Αἱ τομαὶ εἶναι ὅπωςδήποτε κύκλοι, ἐφ' ὅσον ἡ επιφάνεια εἶναι ἐκ περιστροφῆς (§ 535 πόρ. I) καὶ ἔστωσαν K καὶ Λ τὰ κέντρα των ἐπὶ τοῦ ἄξονος xx' . Μία γενέτειρα ἀκμὴ τέμνει τὰ ἐπίπεδα τομῆς εἰς τὰ A καὶ B . Τὸ τετράπλευρον

ΑΚΛΒ είναι ὀρθογώνιον, διότι $AB \parallel KL$ καὶ $KL \perp (P)$. Ἄρα εἶναι $KA = LB$ καὶ ἐπομένως οἱ δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι.



Σχ. 531



Σχ. 532

540. Κύλινδρος. Ἐάν κυκλινδρική ἐπιφάνεια τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδων (Π) καὶ (P) , καθέτων ἐπὶ τὸν ἄξονα $\chi\chi'$ (σχ. 532), τὸ ἀποκοπτόμενον στερεὸν μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων καλεῖται ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος.

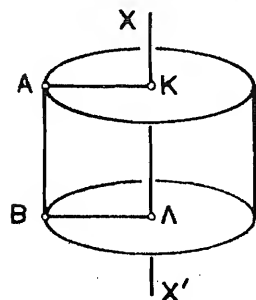
Οἱ ἴσοι κύκλοι, κατὰ τοὺς ὁποίους τὰ δύο ἐπίπεδα τέμνουν τὴν κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν, καλοῦνται **βάσεις** τοῦ κυλίνδρου καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων καλεῖται **ὕψος** τοῦ στερεοῦ. Τὸ τμήμα AB τῆς γενετείρας ἀκμῆς τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καλεῖται **γενέτειρα ἀκμὴ** τοῦ κυλίνδρου. Ἡ γενέτειρα ἀκμὴ τοῦ κυλίνδρου, εἰς τὴν περιστροφὴν τῆς περὶ τὸν ἄξονα $\chi\chi'$, διαγράφει τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, ἡ ὁποία καλεῖται καὶ **κυρτὴ ἐπιφάνεια** τοῦ στερεοῦ.

Παρατήρησις. Ὡς ὅρισμὸν τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιοῦμεν καὶ τὴν ἀκόλουθον ἰσοδύναμον πρότασιν.

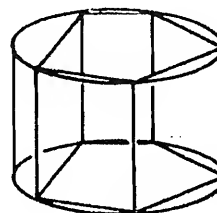
541. Ὁρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ἀπὸ τὴν περιστροφὴν ὀρθογωνίου ΑΚΛΒ περὶ μίαν πλευράν του (σχ. 533). Εἰς τὰ ἐπόμενα ὁ ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος θὰ ἀναφέρεται ἀπλῶς ὡς κύλινδρος.

542. Ἐγγεγραμμένον καὶ περιγγεγραμμένον πρῖσμα εἰς κύλινδρον.

i) Ἐν πρῖσμα καλεῖται ἐγγεγραμμένον εἰς κύλινδρον (σχ. 534), ὅταν



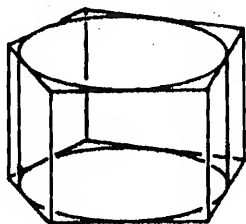
Σχ. 533



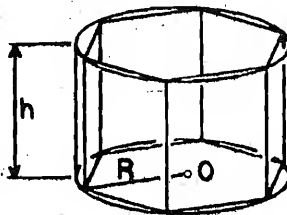
Σχ. 534

αί βάσεις του είναι πολύγωνα ἐγγεγραμμένα εἰς τοὺς κύκλους - βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τοῦ πρίσματος εἶναι γενέτειραι ἀκμαὶ διὰ τὸν κύλινδρον.

ii) Ἐν πρίσμα καλεῖται περιγεγραμμένον περὶ κύλινδρον (σχ. 535), ὅταν αἱ βάσεις του εἶναι πολύγωνα περιγεγραμμένα περὶ τοὺς κύκλους - βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Αἱ παράπλευροι ἔδραι τοῦ πρίσματος εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.



Σχ. 535



Σχ. 536

543. Μέτρησης κυλίνδρου. Ἀς θεωρήσωμεν ὀρθὸν κύλινδρον μὲ βάσιν κύκλον (O, R) , ὕψος h καὶ ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὸν κανονικὸν πρίσμα (σχ. 536). Φανταζόμεθα τὸ πρίσμα μεταβλητὸν οὕτως, ὥστε τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτοῦ, αὐξανόμενον συνεχῶς, νὰ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον. Τότε τὸ πρίσμα θὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ κυλίνδρου καὶ οἱ τύποι, ποὺ ἀφοροῦν εἰς τὰ πρίσματα, ἰσχύουν οὐσιαστικῶς καὶ διὰ τοὺς κυλίνδρους, μετασχηματιζόμενοι καταλλήλως.

Τότε :

i) Παράπλευρος ἐπιφάνεια ἢ κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλίνδρου καλεῖται τὸ ὄριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια μεταβλητοῦ κανονικοῦ πρίσματος μὲ ἀκτῖνα βάσεως R καὶ ὕψος h , ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς του τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.

Διὰ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν ὀρθοῦ πρίσματος γνωρίζομε τὸν τύπον $E_n = P_n \cdot h$ (§ 518). Τότε ἡ κυρτὴ (παράπλευρος) ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται πρὸς $E_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n \cdot h = 2\pi R h$ (περίμετρος βάσεως \times ὕψος) ἥτοι εἶναι :

$$E_\infty = 2\pi R h.$$

Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια εὐρίσκεται, ἐὰν εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν προσθέσωμεν τὰς δύο βάσεις τοῦ κυλίνδρου, ἥτοι εἶναι :

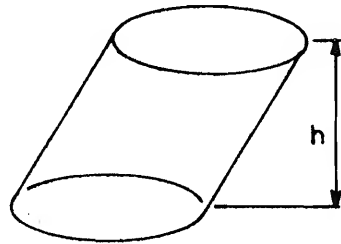
$$E_{ολ} = 2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi R (h + R)$$

ii) Ὅγκος κυλίνδρου καλεῖται τὸ ὄριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος μεταβλητοῦ κανονικοῦ πρίσματος μὲ ἀκτῖνα βάσεως R καὶ ὕψος h , ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς του τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον.

Ο τύπος, ο οποίος δίδει τον όγκον V κυλίνδρου, προέρχεται από τον τύπον $V = Bh$ του όγκου πρίσματος και είναι : $V = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n h = \pi R^2 h$, όπου E_n το έμβαδόν της κανονικής βάσεως του έγγεγραμμένου πρίσματος. Άρα είναι :

$$V = \pi R^2 h.$$

Παρατήρησης. Ο προηγούμενος τύπος του όγκου ισχύει και διά τους πλαγίους κυκλικούς κυλίνδρους (σχ. 537), ήτοι κυλίνδρους με τās γενετείρας άκμάς των πλαγίας, ως προς τās κυκλικās βάσεις των. Γενικώς ισχύει ο τύπος «**Όγκος = Βάσις × Ύψος**» διά κάθε κύλινδρον (όρθον ή πλαγίον), του οποίου ή βάσις δέν είναι κατ' ανάγκην κύκλος και τοῦτο, διότι δυνάμεθα, ως και προηγουμένως, νά θεωρήσωμεν ότι ο κάθε κύλινδρος προέρχεται από κάποιον μεταβλητό έγγεγραμμένο πρίσμα, όπου το πλήθος τών πλευρών του τείνει προς το άπειρον, ταυτοχρόνως δέ ή κάθε πλευρά του τείνει εις το μηδέν.



Σχ. 537

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

954. Εάν δύο όρθοι κύλινδροι έχουν ίσας βάσεις, δείξατε ότι ο λόγος τών κυρτών επιφανειών των ίσούται προς τον λόγον τών ύψών των.

955. Εάν δύο όρθοι κύλινδροι έχουν ίσα ύψη, δείξατε ότι ο λόγος τών κυρτών επιφανειών των είναι ίσος προς τον λόγον τών ακτίνων τών βάσεων.

956. Η περίμετρος της βάσεως όρθου κυλίνδρου είναι 31,4 cm και το ύψος του 6 cm. Νά εύρεθ ή επιφάνεια και ο όγκος του.

957. Όρθου κυλίνδρου ή κυρτή επιφάνεια είναι τριπλάσια της βάσεως. Νά εύρεθ ή ό όγκος του, εάν ή άκτις της βάσεως είναι 4 cm. $V = 192 \pi^3$

958. Η διάμετρος της βάσεως όρθου κυλίνδρου είναι 10 cm και ή κυρτή επιφάνεια αυτού είναι 125,6 cm². Νά υπολογισθ ή ό όγκος του. $V = 314 \pi m^3$

959. Δείξατε ότι ο όγκος όρθου κυλίνδρου ίσούται προς το 1/2 του γινομένου της άκτινος του επί την κυρτήν επιφάνειάν του.

960. Όρθογώνιον ΑΒΓΔ διαστάσεων ΑΒ = 4α και ΑΔ = 3α στρέφεται περί την ΑΒ. Επί τών πλευρών του ΔΑ και ΓΒ λαμβάνομεν τμήματα ΔΕ = ΓΖ = α. Νά υπολογισθ ή επιφάνεια και ο όγκος του στερεού, του διαγραφόμενου από το όρθογώνιον ΓΔΕΖ.

Β'.

961. Ο όγκος κανονικού έξαγωνικού πρίσματος είναι $6\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Νά υπολογισθ ή ό όγκος του περιγεγραμμένου περί αυτό κυλίνδρου.

962. Δίδεται κανονικόν τετραγωνικόν πρίσμα με άκμήν βάσεως α και ύψος 2α. Νά εύρεθ ή επιφάνεια και ο όγκος του εις αυτό α) έγγεγραμμένου κυλίνδρου, β) περιγεγραμμένου κυλίνδρου.

963. Ὁρθογωνίου αἱ διαστάσεις εἶναι α καὶ β μὲ $\alpha < \beta$. Περὶ ποῖαν τῶν πλευρῶν του πρέπει νὰ στραφῇ τὸ ὀρθογώνιον ὥστε ὁ προκύπτων κύλινδρος νὰ ἔχη α) τὴν μεγαλύτεραν ἐπιφάνειαν, β) τὸν μεγαλύτερον ὄγκον.

964. Ἐάν κύλινδρος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου, παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ, δείξατε ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ὀρθογώνιον.

965. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐπίπεδα συμμετρίας ἐνὸς ὀρθοῦ κυλίνδρου καὶ τὸ κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

966. Διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ κυλίνδρου φέρομεν δύο ἡμιεπίπεδα σχηματίζοντα γωνίαν 60° . Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν τῶν δύο στερεῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κύλινδρος.

967. Δίδεται ὀρθὸς κύλινδρος μὲ βάσιν κύκλον ἀκτίνος R καὶ ὕψος h . Φέρομεν χορδὴν AB τῆς βάσεως ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ διὰ τῆς AB ἐπιπέδον παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν καὶ ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν τῶν δύο στερεῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κύλινδρος.

968. Χορδὴ κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καλεῖται ἐν εὐθύγραμμον τμήμα μὲ τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας. Δείξατε ὅτι ἡ κοινὴ κάθετος τοῦ ἄξονος μιᾶς ὀρθῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καὶ μιᾶς χορδῆς τῆς διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς χορδῆς.

969. Ὁρθογώνιον στρέφεται περὶ ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του, παράλληλον μιᾶς πλευρᾶς του καὶ μὴ τέμνοντα τὸ ὀρθογώνιον. Δείξατε ὅτι α) Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου στερεοῦ ἰσοῦται πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ ὀρθογωνίου ἐπὶ τὸ μήκος τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον διαγράφει τὸ κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου. β) Ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ἐπὶ τὸ μήκος τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον διαγράφει τὸ κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου.

970. Δίδονται τρία ἐπίπεδα (Π) , (P) , (Σ) , τεμνόμενα ἀνὰ δύο καὶ παράλληλα πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (δ) . Δείξατε ὅτι ὑπάρχουν τέσσαρες ὀρθαὶ κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἐφάπτεται καὶ εἰς τὰ τρία ἐπίπεδα.

971. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ . τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ϵ) εἶναι α .

972. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ . τόπος τῶν εὐθειῶν σταθερᾶς διευθύνσεως καὶ ἐφαπτομένων, δοθείσης ὀρθῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

973. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) . Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ . τόπος τῶν σημείων M , τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς δύο εὐθείας εἶναι κ/λ .

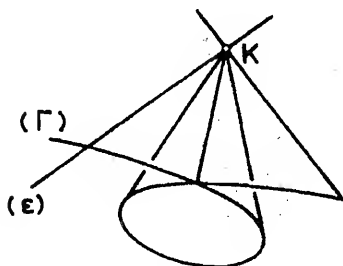
974. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) . Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ . τόπος τῶν σημείων M , τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς παραλλήλους εἶναι σταθερόν.

ΚΩΝΟΣ

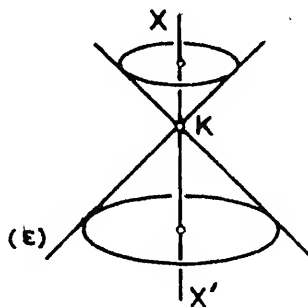
544. Γενικὴ ἔννοια κωνικῆς ἐπιφανείας. Κωνικὴ ἐπιφάνεια ἐν γένει καλεῖται κάθε εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια, ὅπου ἡ εὐθεῖα (ϵ) , ποὺ τὴν διαγράφει, διέρχεται πάντοτε διὰ σταθεροῦ σημείου K καὶ τέμνει σταθερὰν γραμμὴν (Γ) (σχ. 538). Τὸ σημεῖον K καλεῖται κορυφὴ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ ἡ γραμμὴ (Γ) ὁδηγὸς τῆς κινήσεως τῆς εὐθείας (ϵ) . Ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἐν γένει, δὲν εἶναι ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια.

545. Ὁρθὴ κωνικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται ἡ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια ἡ διαγραφομένη ἀπὸ εὐθεῖαν (ϵ) , τέμνουσαν τὸν ἄξονα περιστροφῆς xx' εἰς σημεῖον K (σχ. 539).

Τὸ σημεῖον K καλεῖται **κορυφή** τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ αἱ διαδοχικαὶ θέσεις τῆς εὐθείας (ϵ) εἰς τὴν περιστροφὴν τῆς καλοῦνται **γενέτειραι ἄκμαι** τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. Εἰς τὰ ἐπόμενα θὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον μετὰ τὰς ὀρθὰς κωνικὰς ἐπιφανείας (ἐκ περιστροφῆς).

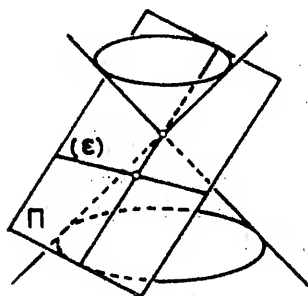


Σχ. 538

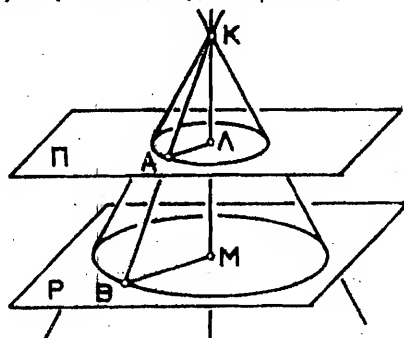


Σχ. 539

546. Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον κωνικῆς ἐπιφανείας καλεῖται κάθε ἐπίπεδον (Π), τὸ ὁποῖον ἔχει μετὰ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας κοινὴν μίαν μόνον γενέτειραν ἄκμην (σχ. 540). Κάθε εὐθεῖα (ϵ) τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου (ἐξαιρέσει τῆς γενετείρας ἄκμης) ἔχει ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ καλεῖται **ἐφαπτομένη** εὐθεῖα τῆς ἐπιφανείας.



Σχ. 540



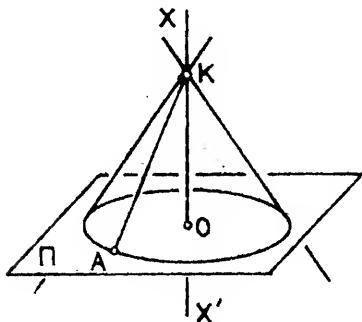
Σχ. 541

547. Θεώρημα. Αἱ τομαὶ κωνικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων καθέτων πρὸς τὸν ἄξονά της εἶναι κύκλοι καὶ ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων των εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων των ἀπὸ τὴν κορυφὴν.

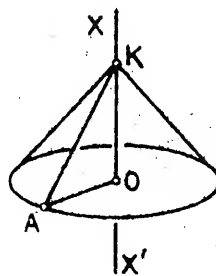
Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν δύο τομὰς μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων (Π) καὶ (P) καθέτων πρὸς τὸν ἄξονα xx' τῆς ἐπιφανείας (σχ. 541). Αἱ τομαὶ εἶναι ὅπωςδήποτε κύκλοι, ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐκ περιστροφῆς (§ 535) καὶ ἔστωσαν Λ καὶ M τὰ κέντρα των ἐπὶ τοῦ ἄξονος xx' . Μία γενέτειρα ἄκμῃ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τέμνει τὰ ἐπίπεδα τομῆς εἰς τὰ Λ καὶ B . Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $K\Lambda\Lambda$ καὶ KMB εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν κοινὴν τὴν γωνίαν των εἰς τὸ K . Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν :

$$\frac{\Lambda\Lambda}{MB} = \frac{K\Lambda}{KM} = \frac{KA}{KB}.$$

548. Ὅρθος κυκλικὸς κώνος. Ἐὰν κωνικὴ ἐπιφάνεια τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου (Π) καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς xx' (σχ. 542), τὸ στερεὸν τὸ περιεχόμενον μεταξύ τῆς κορυφῆς K τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ τῆς ἐπιπέδου τομῆς καλεῖται κώνος.



Σχ. 542



Σχ. 543

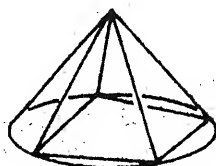
Ὁ κύκλος, κατὰ τὸν ὁποῖον τέμνεται ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται **βάσις** τοῦ κώνου καὶ ἡ ἀπόστασις KO τῆς κορυφῆς K ἀπὸ τὴν βάσιν καλεῖται **ὕψος** τοῦ στερεοῦ. Γενέτειρα ἀκμὴ τοῦ κώνου καλεῖται τὸ τμήμα KA ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου ἕως τὸν κύκλον τῆς βάσεως. Ἡ Γενέτειρα ἀκμὴ KA τοῦ κώνου, εἰς τὴν περιστροφὴν τῆς περὶ τὸν ἄξονα xx' , διαγράφει τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, ἡ ὁποία καλεῖται καὶ **κυρτὴ ἐπιφάνεια** τοῦ στερεοῦ. Εἰς τὰ ἐπόμενα θὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον μὲ ὀρθοὺς κυκλικοὺς κώνους καὶ θὰ τοὺς ἀναφέρωμεν ἀπλῶς ὡς κώνους.

Παρατήρησις. Ὡς ὀρισμὸν τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ τὴν ἀκόλουθον ἰσοδύναμον πρότασιν : **Κώνος** καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ἀπὸ τὴν περιστροφὴν ὀρθογωνίου τριγώνου OKA περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν του (σχ. 543).

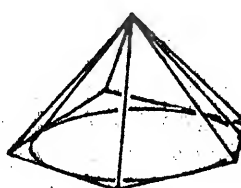
549. Ἐγγεγραμμένη καὶ περιγεγραμμένη πυραμὶς εἰς κώνον.

i) Μία πυραμὶς καλεῖται **ἐγγεγραμμένη** εἰς κώνον (σχ. 544), ὅταν τὰ δύο στερεὰ ἔχουν κοινὴν κορυφὴν καὶ ἡ βᾶσις τῆς πυραμίδος εἶναι πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον - βάσιν τοῦ κώνου. Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς πυραμίδος εἶναι γενέτειραι ἀκμαὶ διὰ τὸν κώνον.

ii) Μία πυραμὶς καλεῖται **περιγεγραμμένη** περὶ κώνον (σχ. 545), ὅταν



Σχ. 544



Σχ. 545

τὰ δύο στερεὰ ἔχουν κοινὴν κορυφὴν καὶ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι πολυγώνον περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον - βάσιν τοῦ κώνου. Αἱ παράπλευροι ἑδραὶ τῆς πυραμίδος εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

550. Μέτρησις τοῦ κώνου. Ἐὰν θεωρήσωμεν κώνον ἐκ περιστροφῆς μετὰ βάσιν κύκλον (O, R) , ὕψος h , γενέταιραν ἀκμὴν λ καὶ ἐγγεγραμμένην εἰς αὐτὸν κανονικὴν πυραμίδα (σχ. 546). Φανταζόμεθα τὴν πυραμίδα μεταβλητὴν εἰς τρόπον, ὥστε τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της νὰ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον. Τότε ἡ μεταβλητὴ πυραμὶς τείνει νὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ κώνου καὶ οἱ τύποι, ποὺ ἀφοροῦν εἰς τὰς πυραμίδας, ἰσχύουν οὐσιαστικῶς καὶ διὰ τοὺς κώνους, μετασχηματιζόμενοι καταλλήλως.

Οὕτω :

i) Παράπλευρος ἐπιφάνεια ἢ κυρτὴ ἐπιφάνεια κώνου ἐκ περιστροφῆς καλεῖται τὸ ὄριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια μεταβλητῆς κανονικῆς πυραμίδος μετὰ ἀκτῖνα βάσεως R καὶ παράπλευρον ἀκμὴν λ , ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.

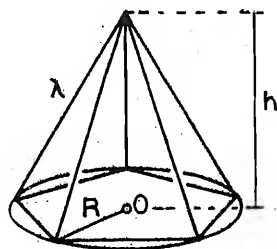
Διὰ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν κανονικῆς πυραμίδος, γνωρίζομεν τὸν τύπον $E_{\pi} = \frac{P_{\nu} u}{2}$ (§ 515), ὅπου P_{ν} ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως καὶ u τὸ παράπλευρον ὕψος. Τότε ἡ κυρτὴ (παράπλευρος) ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἰσοῦται πρὸς : $E_{\kappa} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{P_{\nu} u}{2} = \frac{2\pi R \lambda}{2} = \pi R \lambda$, ἥτοι εἶναι :

$$E_{\kappa} = \pi R \lambda$$

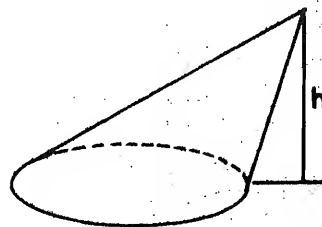
Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια εὐρίσκεται, ἐὰν εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν προσθέσωμεν τὴν βάσιν τοῦ κώνου, ἥτοι εἶναι :

$$E_{\sigma\lambda} = \pi R \lambda + \pi R^2 = \pi R(\lambda + R)$$

ii) Ὁγκος κώνου καλεῖται τὸ ὄριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος μεταβλητῆς κανονικῆς πυραμίδος μετὰ ἀκτῖνα βάσεως R καὶ ὕψος h , ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.



Σχ. 546



Σχ. 547

Ο τύπος, ο οποίος δίδει τον όγκον V του κώνου, προέρχεται από τον τύπον $V = \frac{1}{3} Bh$ του όγκου της πυραμίδος και είναι: $V = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} E_n h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$, όπου E_n το έμβαδόν της κανονικής βάσεως της έγγεγραμμένης πυραμίδος. Άρα είναι:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Παρατήρησης. Ο προηγούμενος τύπος όγκου ισχύει και διά τους πλ-γίους κώνους (σχ. 547) και γενικώς ισχύει ο τύπος «Όγκος = $\frac{1}{3}$ [Βάσις × Ύψος]» διά τους τυχίους κώνους, δηλαδή κώνους, των οποίων ή βάσις δέν είναι κατ' ανάγκην κύκλος. Η απόδειξις γίνεται με την ίδιαν διαδικασία της έγγεγραμμένης πυραμίδος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A.

† (975). Ίσοπλευρος κώνος καλείται ο κώνος, πού παράγεται από την περιστροφήν ίσοπλευρου τριγώνου περί έν ύψος του. Νά υπολογισθῇ ή επιφάνεια και ο όγκος ίσοπλευρου κώνου, εκ της πλευράς α του ίσοπλευρου τριγώνου, εκ του οποίου παρήχθη.

976. Ίσοπλεύρου κώνου με επιφάνειαν $E = 3\pi a^2$ νά υπολογισθῇ ή μεσαία τομή.

†† (977). Νά υπολογισθῇ ο όγκος κώνου, του οποίου ή κυρτή επιφάνεια είναι $20\pi \text{ cm}^2$ και ή ακτίνα της βάσεως αυτού είναι 4 cm .

978. Νά υπολογισθῇ ή επιφάνεια κώνου, του οποίου ο όγκος είναι $72\pi \text{ cm}^3$ και το ύψος του 8 cm .

†† (979). Δίδεται κανονική εξαγωνική πυραμίδα με πλευράν βάσεως $5a$ και ύψος $12a$. Νά υπολογισθῇ ο όγκος και ή ολική επιφάνεια του περιγεγραμμένου κώνου.

980. Όμοιοι κώνοι καλούνται δύο κώνοι παραγόμενοι από την περιστροφήν δύο όμοιων όρθογωνίων τριγώνων περί μίαν των όμολόγων καθέτων πλευρών των αντίστοιχως. Λόγος όμοιότητος καλείται ο λόγος δύο αντίστοιχων γραμμικών στοιχείων των. Δείξατε ότι ο λόγος των επιφανειών δύο όμοιων κώνων ίσούται προς το τετράγωνον του λόγου όμοιότητος αυτών.

(981). Δείξατε ότι ο λόγος των όγκων δύο όμοιων κώνων ίσούται προς την κύβον του λόγου όμοιότητος αυτών.

† (982). Δίδεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα με όγκον 6 cm^3 . Νά υπολογισθῇ i) ο όγκος του περιγεγραμμένου περί αυτήν κώνου ii) ο όγκος του έγγεγραμμένου εις αυτήν κώνου.

983. Η κυρτή επιφάνεια κώνου είναι $24\pi \text{ cm}^2$ και το ύψος του $h = 4 \text{ cm}$. Νά εύρεθῇ ο όγκος του.

984. Δίδεται κώνος και ζητείται νά χωρισθῇ ή κυρτή επιφάνειά του εις δύο ίσοδύναμα μέρη δι' επιπέδου παραλλήλου προς την βάση του.

985. Ίσοσκελές τρίγωνον $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = \alpha$ και $\hat{A} = 120^\circ$ στρέφεται περί την AB . Νά υπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

986. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος κώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ $1/3$ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τῆς βάσεώς του ἀπὸ μίαν γενέτειραν ἀκμὴν.

B'.

987. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κώνου εἶναι $E = \pi(33 + 7\sqrt{33})\text{cm}^2$ καὶ ὁ ὄγκος του $V = 44\pi\text{cm}^3$. Νά εὐρεθῇ ἡ γενέτειρα ἀκμὴ καὶ τὸ ὕψος τοῦ κώνου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἐκφράζονται ὑπὸ ἀκεραίων ἀριθμῶν.

988. Ὁρθογώνιον τρίγωνον στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς τρεῖς πλευράς του. Ἐὰν V_1, V_2 εἶναι οἱ ὄγκοι οἱ παραγόμενοι διὰ τῆς περιστροφῆς του περὶ τὰς καθέτους πλευράς του καὶ V εἶναι ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος διὰ τῆς περιστροφῆς του περὶ τὴν ὑποτείνουσαν, δείξατε ὅτι: $\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} = \frac{1}{V^2}$.

989. Περὶ δοθεῖσαν τριέδρον στερεὰν γωνίαν νά περιγραφῇ κωνικὴ ἐπιφάνεια (ἐκ περιστροφῆς).

990. Εἰς δοθεῖσαν τριέδρον στερεὰν γωνίαν νά ἐγγραφῇ κωνικὴ ἐπιφάνεια (ἐκ περιστροφῆς).

991. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος κώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐκ τοῦ ὁποίου παράγεται, ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον διαγράφει τὸ κ. βάρος αὐτοῦ.

992. Δίδεται κώνος με ἀκτῖνα βάσεως R καὶ ὕψος h . Νά υπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν ἐπιπέδων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν διαιρεῖ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη καὶ τὸ ἄλλο διαιρεῖ τὸν ὄγκον τοῦ κώνου εἰς δύο ἰσους ὄγκους.

993. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια δοθέντος κώνου νά διαιρεθῇ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του εἰς δύο τμήματα με λόγον μ/ν .

994. Δοθεὶς κώνος νά διαιρεθῇ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του, εἰς δύο τμήματα, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ὄγκων νά εἶναι μ/ν .

995. Δίδεται κώνος με κορυφὴν K καὶ εἰς τὴν βάσιν του φέρομεν χορδὴν AB ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κανονικοῦ τριγώνου. Νά υπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κώνος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου KAB .

ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

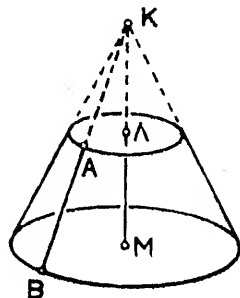
551. Ὁρισμός. Κόλουργος κώνος καλεῖται τὸ τμήμα ἑνὸς κώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ μιᾶς παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν τομῆς τοῦ κώνου.

Οἱ δύο παράλληλοι κύκλοι τοῦ κολούρου κώνου καλοῦνται **βάσεις** αὐτοῦ καὶ ἡ ἀπόστασις των καλεῖται **ὕψος** τοῦ στερεοῦ (σχ. 548).

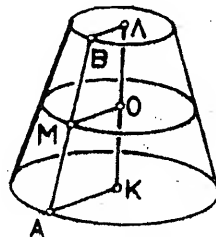
Γενέτειρα ἀκμὴ καλεῖται τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του, τὸ ὁποῖον προεκτείνόμενον, διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν K τοῦ κώνου, ἀπὸ τὸν ὁποῖον προῆλθεν ὁ κόλουργος κώνος.

Μεσαία τομὴ κολούρου κώνου καλεῖται ἡ τομὴ τοῦ στερεοῦ δι' ἐπιπέδου

παράλληλου πρὸς τὰς βάσεις, τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ τὸ ὕψος του (σχ. 549). Ἡ μεσαία τομὴ εἶναι κύκλος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς OM ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιᾶθροισμα τῶν ἀκτίνων KA καὶ LB τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου, ὡς προκύπτει ἀπὸ τὸ τραπέζιον $ABAK$ μετὰ διάμεσον τὴν OM .



Σχ. 548

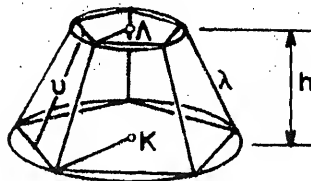


Σχ. 549

Παρατήρησις. Ὡς ὁρισμὸν τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κολούρου κώνου δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ τὴν ἐξῆς ἰσοδύναμον πρότασιν.

Κόλουρος κώνος καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ἀπὸ τὴν περιστροφὴν ὀρθογωνίου τραπεζίου $ABAK$, στρεφομένου περὶ τὴν πλευρὰν KL , ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις (σχ. 549).

552. Μέτρησις κολούρου κώνου. Ἄς θεωρήσωμεν κόλουρον κώνον ἐκ περιστροφῆς μετὰ βάσεις κύκλους (K, R) , (L, ρ) ὕψος h καὶ γενέτειραν ἀκμὴν λ (σχ. 550). Ἐγγράφομεν εἰς αὐτὸν κανονικὴν κόλουρον πυραμίδα, τὴν ὁποίαν ὅμως θεωροῦμεν μεταβλητὴν οὕτως, ὥστε τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τῆς νὰ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον. Τότε ἡ κόλουρος πυραμὶς τείνει νὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ κολούρου κώνου καὶ ἐπομένως οἱ τύποι, ποὺ ἀφοροῦν εἰς τὰς κολούρους πυραμίδας, ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς κολούρους κώνους, μετασχηματιζόμενοι καταλλήλως.



Σχ. 550

i) **Παράπλευρος ἐπιφάνεια** ἢ **κυρτὴ ἐπιφάνεια κολούρου κώνου** ἐκ περιστροφῆς καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια μεταβλητῆς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος μετὰ ἀκτίνας βάσεων R , ρ καὶ παράπλευρον ἀκμὴν λ , ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τῆς τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.

Διὰ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τῆς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος, γνωρίζομεν τὸν τύπον $E_{\pi} = \frac{P_v + p_v}{2} u$, (§ 516), ὅπου P_v , p_v αἱ περίμετροι τῶν βάσεων αὐτῆς καὶ u τὸ παράπλευρον ὕψος. Τότε ἡ κυρτὴ (παράπλευρος)

ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου ἰσοῦται πρὸς : $E_x = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{P_v + p_v}{2} \cdot v =$
 $\frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \lambda = \pi(R + r)\lambda$, ἥτοι εἶναι :

$$E_x = \pi(R + r)\lambda.$$

Ἡ ὅλική ἐπιφάνεια εὐρίσκεται, ἐὰν εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν προσθέσωμεν τὰς δύο βάσεις τοῦ κολούρου κώνου, ἥτοι εἶναι :

$$E_{ολ} = \pi(R + r)\lambda + \pi R^2 + \pi r^2.$$

ii) Ὅγκος κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς καλεῖται τὸ ὄριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος μεταβλητῆς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος με ἀκτίνας βάσεων R, r καὶ ὕψος h , ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τῆς τείνη εἰς τὸ ἄπειρον.

Ὁ τύπος τοῦ ὄγκου τοῦ κολούρου κώνου προέρχεται ἀπὸ τὸν τύπον $V = \frac{1}{3} (B + \sqrt{B\beta} + \beta)h$ τοῦ ὄγκου κολούρου πυραμίδος, ὡς ἐξῆς :

$$V = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{3} (E_v + \sqrt{E_v \epsilon_v} + \epsilon_v)h = \frac{1}{3} (\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2 \pi r^2} + \pi r^2)h =$$

$$\frac{\pi}{3} (R^2 + Rr + r^2)h, \text{ ὅπου } E_v \text{ καὶ } \epsilon_v \text{ τὰ ἐμβαδὰ τῶν κανονικῶν βάσεων τῆς}$$

ἐγγεγραμμένης κολούρου πυραμίδος. Ἀρα εἶναι :

$$V = \frac{\pi}{3} (R^2 + Rr + r^2)h.$$

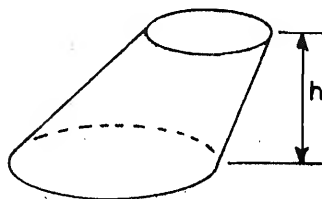
Παρατήρησις. Ὁ προηγούμενος τύπος τοῦ ὄγκου ἰσχύει καὶ διὰ τοῦς πλαγίους κυκλικούς κολούρους κώνους (σχ. 551). Γενικῶς δι' ὅλους τοῦς κολούρους κώνους ἰσχύει ὁ τύπος $V = \frac{1}{3} (B + \sqrt{B\beta} + \beta)h$. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται μετὰ τὴν αὐτὴν διαδικασίαν τῆς ἐγγεγραμμένης κολούρου πυραμίδος.

Πόρισμα I. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια $E_x = \pi(R + r)\lambda$ κολούρου κώνου μετασχηματίζεται ὡς ἐξῆς :

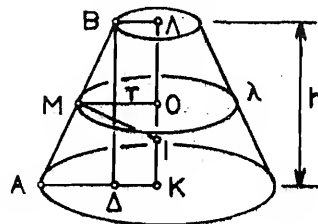
$$E_x = 2\pi r\lambda$$

ὅπου r ἡ ἀκτίς τῆς μεσαίας τομῆς.

Τοῦτο εἶναι προφανές, διότι $R + r = 2r$, ὡς προκύπτει ἀπὸ τὸ τραπέζιον $ABAK$ (σχ. 552).



Σχ. 551



Σχ. 552

Πόρισμα II. Η κυρτή επιφάνεια $E_x = 2\pi gl$ κολούρου κώνου μετασχηματίζεται ως εξής :

$$E_x = 2\pi MI \cdot h$$

όπου MI τὸ μεσοκάθετον τμήμα τῆς γενετείρας AB μέχρι τοῦ ἄξονος.

Τοῦτο ἐπεταί ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων MOI καὶ $B\Delta A$ ($B\Delta \perp KA$), ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν : $\frac{MO}{MI} = \frac{B\Delta}{BA} \Rightarrow \frac{r}{MI} = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow gl = MI \cdot h$. Τότε ὁ προηγούμενος τύπος $E_x = 2\pi gl$ μετασχηματίζεται εἰς τὸν $E_x = 2\pi \cdot MI \cdot h$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

996. Κολούρου κώνου αἱ βάσεις εἶναι περιγεγραμμένες περὶ κανονικὰ ἐξάγωνα με πλευρὰς 2 cm, 10 cm ἀντιστοίχως καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 15 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου.

997. Κόλουρος κώνος ἔχει ὄγκον $V = 700\pi a^3$, ὕψος $h = 12a$ καὶ ἡ μία ἀκτίς του εἶναι διπλάσια τῆς ἄλλης. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του.

998. Δοχεῖον σχήματος κολούρου κώνου, με κάτω βάσιν ἐσωτερικῆς διαμέτρου 20 cm, ἄνω βάσιν ἐσωτερικῆς διαμέτρου 40 cm καὶ γενέτειραν ἀκμὴν 26 cm, πληροῦται διὰ πετρελαίου μέχρις ὕψους 5 cm ἀπὸ τῆς ἄνω βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου πετρελαίου εἰς λίτρα καὶ τὸ βάρος του (εἰδ. βάρος πετρελαίου 0,8).

999. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ εὐθεῖα (ϵ) ἐφαπτομένη αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τυχούσαν διάμετρον KA καὶ περιστρέφομεν τὸ σχῆμα περὶ τὴν εὐθεῖαν (ϵ) . Δείξατε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν διαγράφει ἡ διάμετρος KA εἶναι σταθερά.

1000. Κόλουρος κώνος ἔχει βάσεις με ἀκτίνες r καὶ $3r$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν καὶ ὁ λόγος τῶν ὀγκῶν τῶν δύο κολούρων κώνων, εἰς τοὺς ὁποίους διαίρεται ὁ δοθεὶς κόλουρος κώνος ὑπὸ τῆς μεσαίας τομῆς του.

1001. Κανονικὸν ἐξάγωνον στρέφεται περὶ ἓνα ἄξονα συμμετρίας του. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ (δύο περιπτώσεις).

1002. Ἰσοσκελὲς τραπέζιον με βάσεις α , 2α καὶ ὕψος $\alpha \frac{\sqrt{3}}{2}$ στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς βάσεις του. i) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο παραγομένων στερεῶν καὶ νὰ γίνῃ σύγκρισις αὐτῶν ii) Ὁμοίως διὰ τοὺς ὄγκους.

1003. Τὸ αὐτὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως στρέφεται περὶ μίαν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

1004. Δίδεται ὀρθογώνιον $AB\Gamma\Delta$ καὶ ἔστω K τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς $\Gamma\Delta$. Φέρομεν τὰς KA , KB καὶ $KO \perp AB$. Τὸ σχῆμα στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας του KO καὶ τὸ μὲν ὀρθογώνιον διαγράφει κύλινδρον, τὸ δὲ ἰσοσκελὲς τρίγωνον KAB διαγράφει κώνον, ὁ ὁποῖος καλεῖται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸν κύλινδρον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο στερεῶν i) ἐὰν τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τετράγωνον, ii) ἐὰν εἶναι $\frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{3}{2}$.

1005. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον KAB ($KA = KB$). Ἐγγράφομεν εἰς αὐτὸ ὀρθογώνιον $\Gamma\Delta EZ$ μετὰ τὴν EZ ἐπὶ τῆς AB καὶ φέρομεν $KO \perp AB$. Τὸ σχῆμα στρέφεται περὶ τὸν

άξονα συμμετρίας του ΚΟ και τὸ μὲν τρίγωνον διαγράφει κώνον, τὸ δὲ ὀρθογώνιον διαγράφει κύλινδρον, ὁ ὁποῖος καλεῖται *ἐγγεγραμμένος* εἰς τὸν κώνον. Νά ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο στερεῶν, ἐάν τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τετράγωνον.

Β'.

1006. Κόλουρος κώνος ἔχει ὄγκον $V = 124\pi\alpha^3$, ὕψος $h = 4\alpha$ καὶ κυρτὴν ἐπιφάνειαν $E = 55\pi\alpha^2$. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἀκτῖνες του.

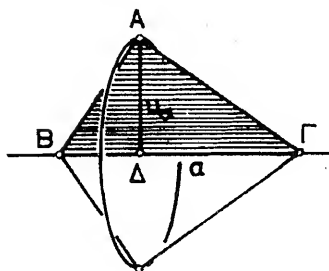
1007. Δίδεται κόλουρος κώνος μὲ στοιχεῖα R, ρ, h . Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἐκ τῆς μεγαλυτέρας βάσεως πρέπει νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδος τομὴ παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις οὕτως, ὥστε ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἰσοδυνάμους κυρτὰς ἐπιφανείας;

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΠΕΡΙ ΑΞΟΝΑ

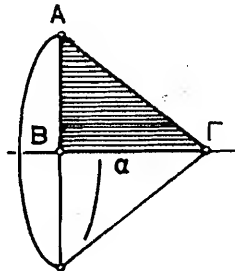
553. Θεώρημα. Τρίγωνον ΑΒΓ, στρεφόμενον περὶ τὴν πλευρὰν του a , παράγει ὄγκον ἴσον πρὸς $\frac{1}{3} \pi \alpha \alpha^2$.

i) Ἐάν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀξυγώνιον εἰς τὰς γωνίας τοῦ \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$, ὁ παραγόμενος ὄγκος ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο κώνων (σχ. 553) μὲ κοινὴν βάσιν κύκλον ἀκτῖνος u_α . Τότε ἔχομεν :

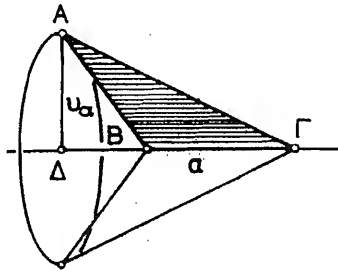
$$V = \frac{1}{3} \pi u_\alpha^2 \cdot \Delta B + \frac{1}{3} \pi u_\alpha^2 \cdot \Delta \Gamma = \frac{1}{3} \pi (\Delta B + \Delta \Gamma) u_\alpha^2 = \frac{1}{3} \pi \alpha u_\alpha^2.$$



Σχ. 553



Σχ. 554



Σχ. 555

ii) Ἐάν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον εἰς μίαν τῶν γωνιῶν τοῦ \widehat{B} ἢ $\widehat{\Gamma}$, ἔστω εἰς τὴν \widehat{B} (σχ. 554), ὁ παραγόμενος ὄγκος ἰσοῦται πρὸς τὸν ὄγκον κώνου μὲ βάσιν κύκλον ἀκτῖνος $AB = u_\alpha$ καὶ ὕψος $B\Gamma = a$, ἥτοι εἶναι :

$$V = \frac{1}{3} \pi u_\alpha^2 \cdot B\Gamma = \frac{1}{3} \pi \alpha u_\alpha^2$$

iii) Ἐάν τὸ τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον εἰς μίαν ἐκ τῶν γωνιῶν τοῦ \widehat{B}

ή $\widehat{\Gamma}$, έστω είς τήν \widehat{B} (σχ. 555), ό παραγόμενος όγκος αναλύεται είς διαφοράν δύο κώνων μέ κοινήν βάσιν κύκλον άκτίνοσ u_α . Τότε έχομεν :

$$V = \frac{1}{3} \pi u_\alpha^2 \cdot \Delta\Gamma - \frac{1}{3} \pi u_\alpha^2 \cdot \Delta B = \frac{1}{3} \pi (\Delta\Gamma - \Delta B) u_\alpha^2 = \frac{1}{3} \pi \alpha u_\alpha^2.$$

"Αρα καί είς τās τρεΐς περιπτώσεις ό παραγόμενος όγκος ίσοϋται πρός :

$$V = \frac{1}{3} \pi \alpha u_\alpha^2.$$

554. Θεώρημα. Ό όγκος, ό παραγόμενος υπό τριγώνου στρεφομένου περί άξονα τοϋ επιπέδου του, διερχόμενον διά μιās κορυφής του καί μή τέμνοντα τό τρίγωνον ίσοϋται πρός τό τρίτον τής επιφανείας, τήν όποιάν διαγράφει ή άπέναντι πλευρά επί τό έπ' αϋτήν ύψος.

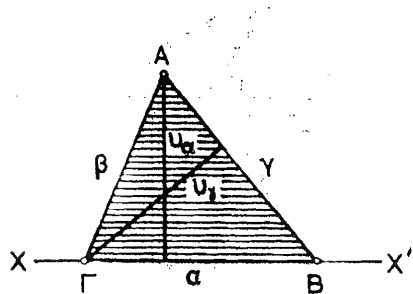
Απόδειξις. Έστω τρίγωνον $AB\Gamma$ καί xx' ό άξων περιστροφής, διερχόμενος διά τής κορυφής Γ .

i) "Ας θεωρήσωμεν ότι ό άξων xx' περιέχει τήν πλευράν $B\Gamma$ (σχ. 556).

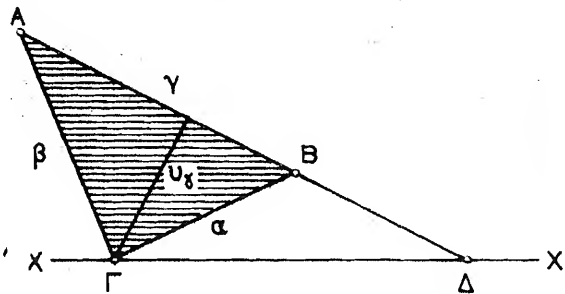
Τότε ό παραγόμενος όγκος ίσοϋται πρός $V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3} \pi \alpha u_\alpha^2$ (§ 553) καί

μετασχηματίζεται, ώς έξής: $V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3} \pi (\alpha u_\alpha) u_\alpha = \frac{1}{3} \pi (\gamma u_\gamma) u_\alpha =$
 $= \frac{1}{3} (\pi u_\alpha \gamma) u_\gamma = \frac{1}{3} E_{AB} u_\gamma$, όπου $E_{AB} = \pi u_\alpha \gamma$ είναι ή επιφάνεια, ή δια-
 γραφομένη από τήν πλευράν AB .

ii) Έστω ότι ή πλευρά AB προεκτεινομένη τέμνει τόν άξωνα περιστροφής είς σημείον Δ (σχ. 557). Τότε ό παραγόμενος όγκος $V_{(AB\Gamma)}$ ίσοϋται



Σχ. 556



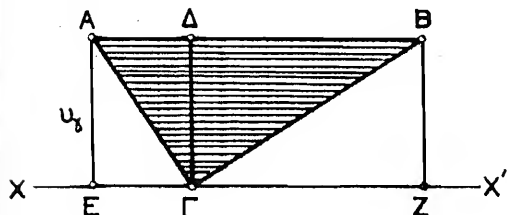
Σχ. 557

πρός τήν διαφοράν $V_{(A\Gamma\Delta)} - V_{(B\Gamma\Delta)}$ καί κατά τήν προηγουμένην περίπτωσηιν είναι :

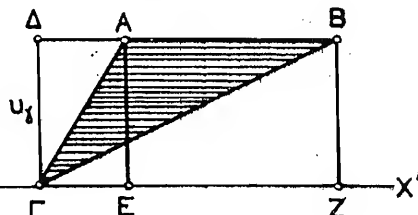
$$V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3} E_{A\Delta} u_\gamma - \frac{1}{3} E_{B\Delta} u_\gamma = \frac{1}{3} (E_{A\Delta} - E_{B\Delta}) u_\gamma = \frac{1}{3} E_{AB} u_\gamma.$$

iii) Έστω ότι ή πλευρά AB είναι παράλληλος πρός τόν άξωνα περι-

στροφής. Φέρομεν $AE \perp xx'$, $BZ \perp xx'$ και είναι προφανώς $AE = BZ = u_\gamma$. Εάν το Γ προβάλλεται επί της AB εις σημείον Δ ενδιάμεσον τῶν A και B (σχ. 558), ὁ παραγόμενος ὄγκος $V_{(AB\Gamma)}$ ἀναλύεται ὡς ἑξῆς :



Σχ. 558



Σχ. 559

$$\begin{aligned} V_{(AB\Gamma)} &= V_{(ABZE)} - V_{(A\Gamma E)} - V_{(B\Gamma Z)} = \pi u_\gamma^2 AB - \frac{1}{3} \pi u_\gamma^2 E\Gamma - \frac{1}{3} \pi u_\gamma^2 Z\Gamma = \\ &= \frac{1}{3} [3\pi u_\gamma AB - \pi u_\gamma E\Gamma - \pi u_\gamma Z\Gamma] u_\gamma = \frac{1}{3} [\pi u_\gamma (3AB - E\Gamma - Z\Gamma)] u_\gamma = \\ &= \frac{1}{3} [\pi u_\gamma (3AB - AB)] u_\gamma = \frac{1}{3} [\pi u_\gamma (2AB)] u_\gamma = \frac{1}{3} (2\pi u_\gamma AB) u_\gamma = \frac{1}{3} E_{AB} u_\gamma. \end{aligned}$$

Εάν ἡ προβολὴ Δ τοῦ Γ ἐπὶ τῆς AB εἶναι ἐκτὸς τοῦ τμήματος AB (σχ. 559), ὁ παραγόμενος ὄγκος $V_{(AB\Gamma)}$ ἀναλύεται ὡς ἑξῆς : $V_{(AB\Gamma)} = V_{(ABZE)} + V_{(A\Gamma E)} - V_{(B\Gamma Z)}$ καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ ὡς ἄνω τρόπου καταλήγομεν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα.

Ἄρα καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις ὁ παραγόμενος ὄγκος ἰσοῦται πρὸς

$$V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3} E_{AB} u_\gamma$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1008. Ὁρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει καθέτους πλευρὰς 6 cm καὶ 8 cm στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς δύο καθέτους πλευρὰς καὶ περὶ τὴν ὑποτείνουσάν αὐτοῦ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ ἐκάστην φοράν.

1009. Ὁρθογώνιον τρίγωνον στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς δύο καθέτους πλευρὰς του. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ παραγόμενοι ὄγκοι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς, περὶ τὰς ὁποίας περιστρέφεται.

1010. Ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρὰς α στρέφεται περὶ ἄξονα, μὴ τέμνοντα τὸ τρίγωνον καὶ σχηματίζοντα γωνίαν 30° μετὰ τὴν προσκειμένην πλευρὰν του. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

1011. Ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ μετὰ ἴσας πλευρὰς $AB = A\Gamma = \alpha$ καὶ μετὰ γωνίαν κορυφῆς $\hat{A} = 120^\circ$ στρέφεται περὶ τὴν πλευρὰν AB αὐτοῦ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

1012. Ὁρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1L$) στρέφεται περὶ ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου

του διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς A καὶ ἐφαπτόμενον τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸ κύκλου. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ παραγόμενος ὄγκος ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

1013. Τρίγωνον $AB\Gamma$ μὲ $\alpha > \beta > \gamma$ στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς τρεῖς πλευράς του. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος ἐκ τῶν τριῶν παραγομένων ὀγκων.

1014. Ὁρθογώνιον τρίγωνον στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς τρεῖς πλευράς αὐτοῦ. Ἄν V_1 καὶ V_2 εἶναι οἱ παραγόμενοι ὄγκοι διὰ στροφῆς τοῦ τριγώνου περὶ τὰς δύο καθέτους πλευράς του καὶ V ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος διὰ στροφῆς αὐτοῦ περὶ τὴν ὑποτείνουσαν, νὰ εὑρεθῇ σχέσις συνδέουσα τοὺς ὄγκους V_1 , V_2 καὶ V .

ΣΦΑΙΡΑ

555. Ὅρισμοί. Δοθέντος σταθεροῦ σημείου O , τὸ ὁποῖον καλεῖται **κέντρον** καὶ σταθεροῦ μήκους R , τὸ ὁποῖον καλεῖται **ἄκτις**, καλοῦμεν :

i) **Σφαῖραν** τὸ σύνολον τῶν σημείων M τοῦ χώρου, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει $OM \leq R$ καὶ συμβολίζομεν (O, R) .

ii) **Σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν** τὸ σύνολον τῶν σημείων M τοῦ χώρου, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει $OM = R$.

Εἰς τὰ ἐπόμενα, ὠρισμένας φοράς, λέγοντες «σφαῖρα» θὰ ἐννοοῦμεν τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν.

iii) **Ἄκτις** τῆς σφαίρας καλεῖται τὸ εὐθύγραμμον τμήμα $OM = R$, ὅπου O εἶναι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ M τυχὸν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

iv) **Χορδὴ** καλεῖται κάθε εὐθύγραμμον τμήμα μὲ τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

v) **Διάμετρος** καλεῖται κάθε χορδὴ διερχομένη ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἐξ ὅλων τῶν χορδῶν καὶ ἔχει μῆκος ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτίνος. Τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου καλοῦνται ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα καὶ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

Ἀπὸ τοὺς ἀνωτέρω ὁρισμοὺς ἔπονται εὐκόλως τὰ ἀκόλουθα :

Ἄς θεωρήσωμεν ἐπίπεδον (Π) , διερχόμενον ἀπὸ τὸ κέντρον O τῆς σφαίρας (O, R) (σχ. 560). Ἐπ' αὐτοῦ τὰ σημεῖα M τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας εἶναι τοιαῦτα, ὥστε $OM = R$ καὶ ἐπομένως ἀπαρτίζουν κύκλον (O, R) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) . Εἰς τοιοῦτος κύκλος καλεῖται **μέγιστος κύκλος** τῆς σφαίρας καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ καλεῖται **διαμετρικὸν ἐπίπεδον**.

556. Συμμετρίαι εἰς τὴν σφαῖραν ὑπάρχουν :

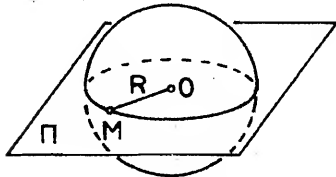
i) **Κεντρικὴ συμμετρία** ὡς πρὸς τὸ κέντρον της.

ii) **Ἀξονικὴ συμμετρία** ὡς πρὸς κάθε διάμετρόν της.

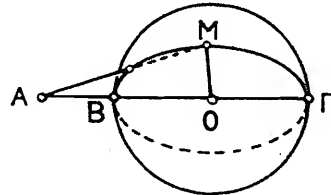
iii) **Συμμετρία ἐπιπέδου** ὡς πρὸς κάθε διαμετρικὸν ἐπίπεδον.

557. Ἡ σφαῖρα εἶναι στερεὸν ἐκ περιστροφῆς. Παράγεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν κύκλου (O, R) περὶ μίαν διάμετρόν του.

558. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ σφαῖραν. Ἐὰς θεωρήσωμεν σφαῖραν (O, R) , σημεῖον A καὶ διάμετρον $B\Gamma$ διερχομένην διὰ τοῦ A (σχ. 561). Ἐὰν M εἴναι τυχὸν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἀπὸ τὸ τρίγωνον AOM λαμβάνομεν :



Σχ. 560



Σχ. 561

i) $AM \geq |AO - OM| \Rightarrow AM \geq |AO - OB| \Rightarrow AM \geq AB \Rightarrow AB \leq AM$.
Λόγω τῆς τελευταίας σχέσεως, τὴν ἀπόστασιν AB ὀρίζομεν ὡς **ἐλαχίστην ἀπόστασιν** τοῦ σημείου A ἀπὸ τὴν σφαῖραν, ἰσοῦται δὲ αὕτη πρὸς $|\delta - R|$, ὅπου $\delta = AO$.

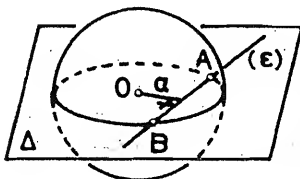
ii) $AM \leq AO + OM \Rightarrow AM \leq AO + OG \Rightarrow AM \leq AG \Rightarrow AG \geq AM$.
Λόγω τῆς τελευταίας σχέσεως, τὴν ἀπόστασιν AG ὀρίζομεν ὡς **μεγίστην ἀπόστασιν** τοῦ σημείου A ἀπὸ τὴν σφαῖραν, ἰσοῦται δὲ αὕτη πρὸς $\delta + R$.

559. Σχετικά θέσεις ευθείας καὶ σφαίρας. Μία εὐθεῖα (ϵ) καὶ μία σφαῖρα (O, R) , ὅπως καὶ ἂν εὐρίσκωνται, ἔχουν πάντοτε ὡς ἐπίπεδον συμμετρίας τὸ διαμετρικὸν ἐπίπεδον (Δ) τῆς σφαίρας, ποὺ περιέχει τὴν εὐθεῖαν (ϵ) (σχ. 562). Ἡ εὐθεῖα (ϵ) δὲν δύναται νὰ ἔχη σημεῖα τῆς ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου (Δ) καὶ ἐπομένως τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο σχημάτων θὰ τὰ ἀναζητήσωμεν ἐπὶ τοῦ (Δ) . Τὸ ἐπίπεδον (Δ) τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον (O, R) καὶ ἐπομένως αἱ σχετικαὶ θέσεις εὐθείας καὶ σφαίρας ἀνάγονται εἰς τὰς γνωστὰς σχετικὰς θέσεις εὐθείας καὶ κύκλου, ἥτοι, ἐὰν α εἴναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν, ἔχομεν :

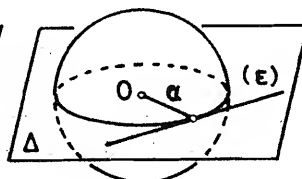
i) Ἡ σφαῖρα καὶ ἡ εὐθεῖα ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα (τέμνονται) $\Leftrightarrow \alpha < R$ (σχ. 562).

ii) Ἡ σφαῖρα καὶ ἡ εὐθεῖα ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον (ἐφάπτονται) $\Leftrightarrow \alpha = R$ (σχ. 563).

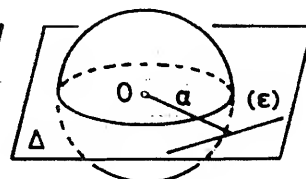
iii) Ἡ σφαῖρα καὶ ἡ εὐθεῖα δὲν ἔχουν κοινὰ σημεῖα $\Leftrightarrow \alpha > R$ (σχ. 564).



Σχ. 562

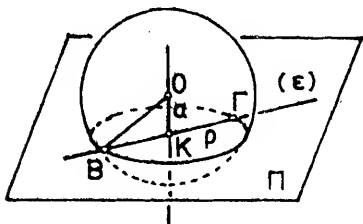


Σχ. 563

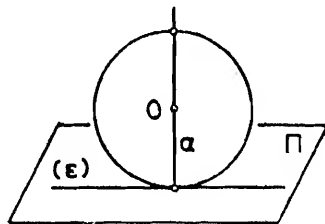


Σχ. 564

560. Σχετικές θέσεις σφαίρας και επιπέδου. Μία σφαίρα παράγεται από περιστροφήν κύκλου περί διάμετρον. "Εν επίπεδον παράγεται από περιστροφήν εὐθείας περί ἄξονα κάθετον αὐτῆς. Ἐπομένως τὸ σχῆμα «σφαῖρα - επίπεδον» παράγεται ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον σχῆμα «κύκλος - εὐθεῖα» στρεφόμενον περί ἄξονα, διερχόμενον ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν. Ἄρα αἱ σχετικές θέσεις σφαίρας - επιπέδου εἶναι ἀντί-



Σχ. 565



Σχ. 566

στοιχοὶ ἐκείνων τοῦ σχήματος κύκλου - εὐθείας εἰς τὸ ἐπίπεδον, ἥτοι, ἐὰν α εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου σφαίρας (O, R) διαγραφομένης ἀπὸ κύκλον (O, R) καὶ (Π) τὸ ἐπίπεδον τὸ διαγραφόμενον ἀπὸ εὐθεῖαν (ϵ) , ἔχομεν :

i) Ὁ κύκλος (O, R) μὲ τὴν εὐθεῖαν (ϵ) τέμνονται εἰς τὰ B καὶ Γ (σχ. 565) \Leftrightarrow ἡ σφαῖρα (O, R) μὲ τὸ ἐπίπεδον (Π) τέμνονται, $\Leftrightarrow \alpha < R$. Τὰ B καὶ Γ , στρεφόμενα περί τὴν μεσοκάθετον OK τῆς χορδῆς $B\Gamma$, διαγράφουν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) κύκλον (K, ρ) . Ἄρα ἡ τομὴ σφαίρας καὶ ἐπιπέδου εἶναι κύκλος μὲ ἀκτῖνα $\rho \leq R$. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον (Π) δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, εἶναι $\rho < R$ καὶ ὁ κύκλος (K, ρ) καλεῖται μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας, ἐνῶ ἐὰν τὸ (Π) διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας (διαμετρικὸν ἐπίπεδον), θὰ εἶναι $\rho = R$ καὶ ἡ τομὴ θὰ εἶναι μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας.

ii) Ὁ κύκλος (O, R) μὲ τὴν εὐθεῖαν (ϵ) ἐφάπτονται εἰς τὸ A (σχ. 566) \Leftrightarrow ἡ σφαῖρα (O, R) μὲ τὸ ἐπίπεδον (Π) ἐφάπτονται εἰς τὸ A (ἔχουν ἓνα μόνον κοινὸν σημεῖον) $\Leftrightarrow \alpha = R$.

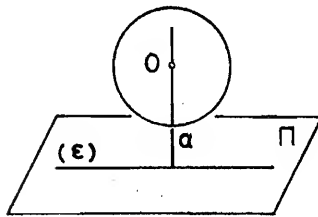
iii) Ὁ κύκλος (O, R) μὲ τὴν εὐθεῖαν (ϵ) δὲν τέμνονται (σχ. 567) \Leftrightarrow ἡ σφαῖρα (O, R) μὲ τὸ ἐπίπεδον (Π) δὲν τέμνονται $\Leftrightarrow \alpha > R$.

Πόρισμα. Διὰ τριῶν σημείων μιᾶς σφαιρικῆς ἐπιφανείας διέρχεται εἰς κύκλος τῆς σφαίρας.

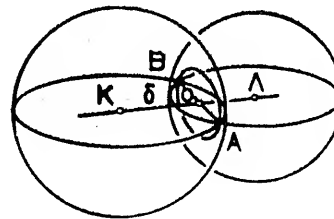
561. Σχετικές θέσεις δύο σφαιρῶν. Διάκεντρος δύο σφαιρῶν (K, R) καὶ (Λ, ρ) καλεῖται τὸ τμήμα KL καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ δ . Δύο σφαῖραι παράγονται ἀπὸ τὴν περιστροφήν δύο κύκλων περί τὴν διάκεντρον αὐτῶν. Ἐπομένως αἱ σχετικές θέσεις δύο σφαιρῶν εἶναι ἀντίστοιχοι τῶν σχετικῶν θέσεων δύο κύκλων εἰς τὸ ἐπίπεδον καὶ ἔπομένως ἔχομεν :

i) Δύο κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) τέμνονται εἰς τὰ A καὶ B (σχ. 568) \Leftrightarrow

αἱ σφαῖραι (K, R) καὶ (Λ, ρ) τέμνονται $\Leftrightarrow |R - \rho| < \delta < R + \rho$. Τὰ κοινὰ σημεῖα A καὶ B τῶν δύο κύκλων, στρεφόμενα περὶ τὴν μεσοκάθετον $Κ\Lambda$, διαγράφουν κύκλον. Ἄρα ἡ τομὴ δύο σφαιρῶν εἶναι κύκλος. Τὸ κέντρον τοῦ O εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς διακέντρου τῶν δύο σφαιρῶν καὶ τὸ ἐπίπεδόν του εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν διάκεντρον.



Σχ. 567

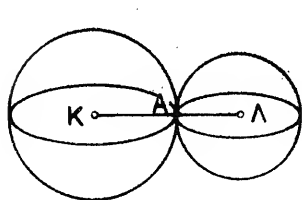


Σχ. 568

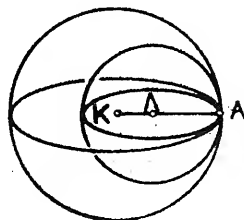
ii) Οἱ κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς σημεῖον A (σχ. 569) \Leftrightarrow αἱ σφαῖραι (K, R) καὶ (Λ, ρ) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς σημεῖον A (ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον) $\Leftrightarrow \delta = R + \rho$. Τὸ σημεῖον A εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς διακέντρου.

iii) Οἱ κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς σημεῖον A (σχ. 570) \Leftrightarrow αἱ σφαῖραι (K, R) καὶ (Λ, ρ) ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ A (ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον) $\Leftrightarrow \delta = |R - \rho|$. Τὸ σημεῖον A εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς διακέντρου καὶ ἡ μία σφαῖρα εὐρίσκεται ἐντὸς τῆς ἄλλης.

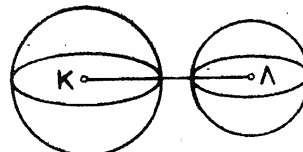
iv) Οἱ κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ὁ εἷς εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου (σχ. 571) \Leftrightarrow αἱ δύο σφαῖραι (K, R) καὶ (Λ, ρ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ἡ μία εὐρίσκεται ἐκτὸς τῆς ἄλλης $\Leftrightarrow \delta > R + \rho$.



Σχ. 569



Σχ. 570



Σχ. 571

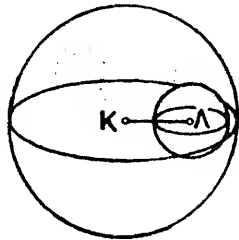
v) Οἱ κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ὁ εἷς εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἄλλου (σχ. 572) \Leftrightarrow αἱ σφαῖραι (K, R) καὶ (Λ, ρ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ἡ μία εὐρίσκεται ἐντὸς τῆς ἄλλης $\Leftrightarrow \delta < |R - \rho|$.

562. Γωνία δύο σφαιρῶν. Ἀναφέρεται μόνον εἰς τὰς τεμνομένας σφαίρας καὶ εἶναι ἡ γωνία τῶν δύο κύκλων (§ 198), ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τῶν ὁποίων προῆλθον αἱ δύο σφαῖραι.

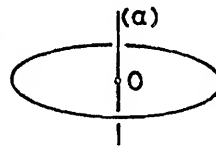
563. Ὅρισμοί.

i) Ἄξων κύκλου καλεῖται ἡ εὐθεῖα (α) ἡ διερχομένη ἀπὸ τὸ κέντρον O τοῦ κύκλου καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου (σχ. 573).

ii) Πόλοι κύκλου σφαίρας. Ἐὰν κύκλος (O, ρ) ἀνήκῃ εἰς σφαῖραν (K, R) (σχ. 574), τὰ σημεῖα Π_1 καὶ Π_2 , εἰς τὰ ὁποῖα ὁ ἄξων τοῦ κύκλου τέμνει τὴν σφαῖραν, καλοῦνται πόλοι τοῦ κύκλου (O, ρ) τῆς σφαίρας (K, R) .



Σχ. 572



Σχ. 573

iii) Πολικὴ ἀπόστασις. Ἐκαστος πόλος (σχ. 574) ἰσαπέχει ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα M τοῦ κύκλου (O, ρ) , διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $MO\Pi_1$ καὶ $MO\Pi_2$ διατηροῦν σταθερὸν μέγεθος διὰ τὰς διαφόρους θέσεις τοῦ M ἐπὶ τοῦ κύκλου (O, ρ) . Ἐκαστὴ τῶν ἀποστάσεων τούτων καλεῖται **πολικὴ ἀπόστασις** τοῦ κύκλου. Κάθε κύκλος ἐπομένως ἔχει δύο πολικὰς ἀποστάσεις ρ_1 καὶ ρ_2 . Ἐπειδὴ οἱ πόλοι Π_1 καὶ Π_2 εἶναι ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα τῆς σφαίρας, τὸ τρίγωνον $\Pi_1 M \Pi_2$ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 4R^2$.

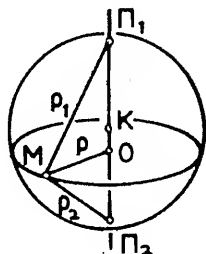
iv) Ἐγγεγραμμένον πολυέδρον εἰς σφαῖραν καλεῖται κάθε πολυέδρον, τοῦ ὁποῖου αἱ κορυφαὶ ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν. Ἡ σφαῖρα καλεῖται **περιγεγραμμένη** περὶ τὸ πολυέδρον καὶ τὸ κέντρον τῆς καλεῖται **περίκεντρον** τοῦ πολυέδρου.

v) Περιγεγραμμένον πολυέδρον περὶ σφαῖραν καλεῖται κάθε πολυέδρον, τοῦ ὁποῖου αἱ ἑδραὶ ἐφάπτονται εἰς τὴν αὐτὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν. Ἡ σφαῖρα εὐρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυέδρου καὶ καλεῖται **ἐγγεγραμμένη** εἰς αὐτό. Τὸ κέντρον τῆς καλεῖται **ἑγκεντρον** τοῦ πολυέδρου.

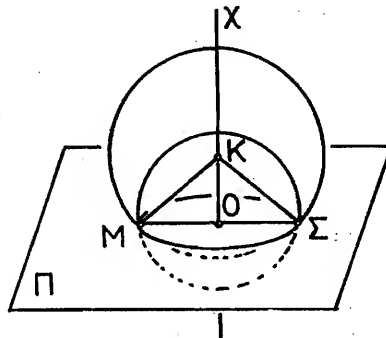
564. Θεώρημα. Εἰς κύκλος (O, ρ) ἀνήκει εἰς ἀπείρους σφαῖρας, τὰ κέντρα τῶν ὁποίων εὐρίσκονται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ κύκλου.

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον K τοῦ ἄξονος Ox τοῦ κύκλου (O, ρ) ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ σημεῖα M τοῦ κύκλου (O, ρ) (σχ. 575). Τοῦτο ὅμως εἶναι φανερόν, διότι διὰ τὰς διαφόρους θέσεις τοῦ M ἐπὶ τοῦ κύκλου (O, ρ) τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα KOM διατηροῦν σταθερὸν μέγεθος, διότι εἰς αὐτά, ἐκτὸς τῆς ὀρθῆς γωνίας εἰς τὸ O , παραμένουν σταθεραὶ κατὰ μῆκος αἱ πλευραὶ OK καὶ $OM = \rho$. Ἀρα καὶ τὸ μῆκος KM παραμένει σταθερόν καὶ ἐπομένως τὸ τυχὸν σημεῖον K τοῦ ἄξονος Ox εἶναι κέντρον σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει ὁ κύκλος (O, ρ) .

Ίσχύει και τὸ ἀντίστροφον, ἥτοι, ἐὰν ὁ κύκλος (O, ρ) ἀνήκει εἰς σφαῖραν (K, R) , τὸ κέντρον τῆς K εὐρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ox τοῦ κύκλου (O, ρ) . Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ KO εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) τοῦ κύκλου (O, ρ) . Ἐὰν Σ εἶναι τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τοῦ M , ὡς πρὸς τὸν κύκλον (O, ρ) , εἶναι προφανῶς $KM = K\Sigma$, ὡς σημεῖα τῆς σφαίρας $(K, R) \Rightarrow KO \perp M\Sigma$.



Σχ. 574



Σχ. 575

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ KO εἶναι κάθετος ἐπὶ μίαν ἀκόμῃ διάμετρον τοῦ κύκλου (O, ρ) καὶ ἐπομένως $KO \perp (\Pi)$, ἥτοι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀνήκει εἰς τὸν ἄξονα Ox τοῦ κύκλου (O, ρ) .

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα συνάγεται ὅτι ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν εἰς τὰς ὁποίας ἀνήκει ὁ κύκλος (O, ρ) , εἶναι ὁ ἄξων Ox τοῦ κύκλου.

565. Καθορισμός σφαίρας. Μία σφαῖρα εἶναι καθωρισμένη, δταν εἶναι γνωστὰ τὰ ἀκόλουθα στοιχεῖα :

i) **Κέντρον καὶ ἀκτίς.** Ἐὰν μιᾶς σφαίρας γνωρίζωμεν τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτίνα, θὰ θεωρῶμεν ὅτι γνωρίζωμεν τὴν σφαῖραν.

ii) **Τέσσαρα σημεῖα ὄχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.** Ἐὰν A, B, Γ, Δ εἶναι τέσσαρα σημεῖα ὄχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὰ τρία ἐξ αὐτῶν A, B, Γ ὀρίζουν κύκλον. Τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων A, B, Γ, Δ , ὀρίζεται ἀπὸ τὴν τομὴν τοῦ ἄξονος τοῦ κύκλου $(AB\Gamma)$ καὶ τοῦ μεσοκάθετου ἐπιπέδου ἑνὸς τῶν τμημάτων $A\Delta, B\Delta, \Gamma\Delta$. Τὰ μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν $A\Delta, B\Delta$ καὶ $\Gamma\Delta$ τέμνουν τὸν ἄξονα τοῦ κύκλου $(AB\Gamma)$ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον (διὰ τὴν ;).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A'.

1015. Δίδεται σφαῖρα ἀκτίνας 5 cm καὶ ἐπίπεδον ἀπέχον ἀπὸ τὸ κέντρον 3 cm. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἡ τομὴ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου. (Ἐγγεγραμμένος κύλινδρος εἰς σφαῖραν καλεῖται εἰς κύλινδρος, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι κύκλοι τῆς σφαίρας).

1016. Δύο σφαίραι με ακτίνας 5 cm και 12 cm αντίστοιχως έχουν διάκεντρον 13 cm. Νά υπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς των.

1017. Δείξατε ὅτι : κάθε ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος εἶναι ἐγγράψιμος εἰς σφαῖραν, ἥτοι ὑπάρχει σφαῖρα, ἐπὶ τῆς ὁποίας εὐρίσκονται αἱ βάσεις τοῦ κυλίνδρου.

1018. Δίδεται σφαῖρα (O, R) . Νά υπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὺς τῆς βάσεως εἶναι $R/2$.

1019. Νά εὐρεθῇ ἡ συνθήκη, ὑπὸ τὴν ὁποίαν εἰς ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος εἶναι περιγεγραμμένος περὶ σφαῖραν, ἥτοι νά ὑπάρχῃ σφαῖρα ἐφαπτομένη τῶν βάσεων καὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

1020. Ἐάν δύο κύκλοι, ὅχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τέμνονται, δείξατε ὅτι ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν.

1021. Νά ἀχθῇ ἐπίπεδον (Π) ἐφαπτόμενον δοθείσης σφαίρας (O, R) καὶ παράλληλον πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον (P) .

1022. Νά ἀχθῇ ἐπίπεδον (Π) ἐφαπτόμενον δοθείσης σφαίρας (O, R) καὶ διερχόμενον διὰ δοθείσης εὐθείας (ε) .

1023. Νά γραφῇ σφαῖρα δοθείσης ἀκτῖνος R , διερχομένη διὰ τριῶν δοθέντων σημείων A, B, Γ .

1024. Νά γραφῇ σφαῖρα δοθείσης ἀκτῖνος R , ἐφαπτομένη τῶν ἐδρῶν δοθείσης τριέδρου στερεᾶς γωνίας $Kxyz$.

1025. Ἐάν σφαῖρα διέρχεται ἐκ σημείου A καὶ ἐφάπτεται τῶν ἐδρῶν διέδρου γωνίας, δείξατε ὅτι διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ συμμετρικὸν τοῦ A , ὡς πρὸς τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆς διέδρου.

B.

1026. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε τετράεδρον εἶναι i) ἐγγράψιμον εἰς σφαῖραν καὶ ii) περιγράψιμον περὶ σφαῖραν.

1027. Νά εὐρεθοῦν αἱ συνθήκαι, ὑπὸ τὰς ὁποίας δύο κύκλοι, ὅχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν.

1028. Νά υπολογισθῇ ἡ ἀκτὺς τῆς τομῆς δύο τεμνομένων σφαιρῶν, ἐκ τῶν ἀκτῖνων τῶν σφαιρῶν καὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν.

1029. Δείξατε ὅτι κάθε κυκλικὸς κῶνος εἶναι ἐγγράψιμος εἰς σφαῖραν, ἥτοι ὑπάρχει σφαῖρα, ἐπὶ τῆς ὁποίας εὐρίσκεται ἡ βάση καὶ ἡ κορυφή τοῦ κώνου.

1030. Δίδεται σφαῖρα (O, R) . Νά υπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος ἰσοπλεύρου κώνου ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν, ἐκ τῆς ἀκτῖνος R τῆς σφαίρας.

1031. Δείξατε ὅτι κάθε ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος εἶναι περιγράψιμος περὶ σφαῖραν, ἥτοι ὑπάρχει σφαῖρα ἐφαπτομένη τῆς βάσεως καὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

1032. Νά υπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος ἰσοπλεύρου κώνου περιγεγραμμένου περὶ δοθείσαν σφαῖραν (O, ρ) .

1033. Νά υπολογισθῇ ἡ ἀκτὺς τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς κῶνον ἀκτῖνος 5α καὶ ὕψους 12α .

1034. Δίδεται κανονικὸν τετράεδρον $KAB\Gamma$ ἀκμῆς α . Νά υπολογισθῇ ἡ ἀκτὺς τῆς σφαίρας τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν ἔδραν $AB\Gamma$ καὶ εἰς τὰς ἀκμὰς $KA, KB, K\Gamma$.

1035. Δείξατε ὅτι, ἐάν παραλληλεπίπεδον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς σφαῖραν, εἶναι ὀρθογώνιον.

1036. Δείξατε ὅτι, ἵνα ἓν παραλληλεπίπεδον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ σφαῖραν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ἔδραι του νὰ εἶναι ἰσοδύναμα παραλληλόγραμμα.

1037. Δίδεται σφαίρα (O, R) και σημείον K εκτός αὐτῆς. Τρισσορθογώνιος στερεά γωνία ἔχει τὴν κορυφὴν τῆς εἰς τὸ K καὶ στρέφεται περὶ αὐτὸ οὕτως, ὥστε αἱ ἔδραι τῆς νὰ τέμνουν τὴν σφαῖραν. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν κύκλων, κατὰ τοὺς ὁποίους αἱ ἔδραι τῆς στερεᾶς γωνίας τέμνουν τὴν σφαῖραν, εἶναι σταθερόν.

1038. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος περιγεγραμμένου περὶ σφαῖραν πολυέδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ $1/3$ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

1039. Τετραέδρου $KAB\Gamma$ ἡ στερεὰ γωνία K εἶναι τρισσορθογώνιος καὶ ἔχει $KA = \alpha$, $KB = \beta$, $K\Gamma = \gamma$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τῶν α , β , γ ἡ ἀκτίς τῆς περιγεγραμμένης περὶ αὐτὸ σφαίρας.

1040. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια κανονικοῦ τετραέδρου

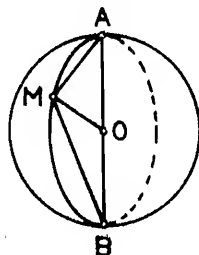
i) ἐκ τῆς ἀκτίνος R τῆς περιγεγραμμένης περὶ αὐτὸ σφαίρας

ii) ἐκ τῆς ἀκτίνος ρ τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸ σφαίρας.

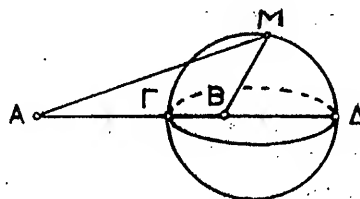
Νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ πλέον σχέσεις συνδέουσα τὰς ἀκτῖνας R καὶ ρ .

566. Γεωμετρικοί τόποι. Ἐκτός τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία ἐξ ὁρίσμου εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπὸ σταθερὸν σημεῖον ἀπέχουν σταθερὰν ἀπόστασιν, ἐνδιαφέροντες γεωμετρικοὶ τόποι εἶναι καὶ οἱ ἀκόλουθοι :

i) Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθέν εὐθύγραμμον τμήμα AB φαίνεται ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν, εἶναι σφαιρικὴ ἐπιφάνεια διαμέτρου AB (σχ. 576).



Σχ. 576



Σχ. 577

Πράγματι, ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἐπειδὴ $MO = AB/2 \Rightarrow \widehat{AMB} = 1^\circ$. Ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφον, ἥτοι ἐὰν $\widehat{AMB} = 1^\circ \Rightarrow MO = AB/2$ καὶ ἐπομένως τὸ M εἶναι σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

ii) Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δεδομένα σημεία A καὶ B εἶναι $\frac{\mu}{\nu}$, εἶναι σφαιρικὴ ἐπιφάνεια διαμέτρου $\Gamma\Delta$ (Ἀπολλώνιος σφαῖρα), ὅπου τὰ Γ καὶ Δ διαιροῦν τὸ τμήμα AB ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς λόγον $\frac{\mu}{\nu}$ (σχ. 577).

Πράγματι, ἔστω M τυχὸν σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$. Τότε ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθοριζομένου ὑπὸ τοῦ M καὶ τῆς εὐθείας AB , ὁ γ .

τόπος τοῦ M εἶναι Ἀπολλώνιος κύκλος σταθερᾶς διαμέτρου $\Gamma\Delta$ (§ 341). Ἐὰν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν AB , ὁ Ἀπολλώνιος κύκλος θὰ διαγράφῃ Ἀπολλώνιον σφαιρικὴν ἐπιφανείαν διαμέτρου $\Gamma\Delta$, ἡ ὁποία εἶναι ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου M .

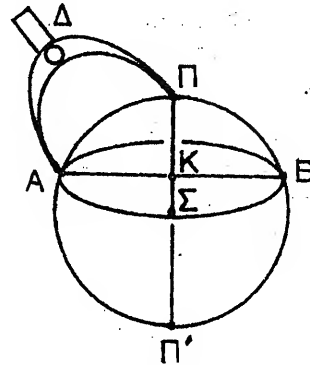
ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

567. Σφαιρικὸς διαβήτης. Διὰ νὰ χαράξωμεν ἕνα κύκλον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, χρησιμοποιοῦμεν τὸν σφαιρικὸν διαβήτην, ἥτοι ἕνα διαβήτην, τοῦ ὁποίου τὰ σκέλη εἶναι καμπύλα καὶ ὅχι εὐθύγραμμα, ὅπως τοῦ κοινοῦ διαβήτου (σχ. 578). Πρὸς τοῦτο στηρίζομεν τὸ ἓν ἄκρον τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου ἐπὶ τινος σημείου τῆς σφαίρας καὶ μετὰ τυχὸν ἄνοιγμῳ αὐτοῦ γράφομεν κύκλον ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

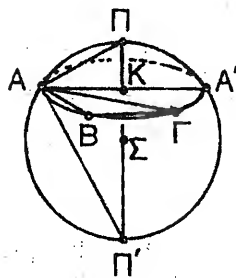
568. Πρόβλημα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτίς δοθείσης σφαίρας.

Λύσις. Μετὰ κέντρον τὸ τυχὸν σημεῖον Π τῆς σφαίρας Σ καὶ ἀκτῖνα τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου, ἔστω τὴν ΠA (σχ. 579), γράφομεν κύκλον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ λαμβάνομεν τρία σημεῖα A, B, Γ τοῦ κύκλου. Κατόπιν μετροῦμεν μετὰ τὸν σφαιρικὸν διαβήτην τὰς ἀποστάσεις $AB, B\Gamma, A\Gamma$ καὶ μετὰ πλευρὰς αὐτὰς κατασκευάζομεν τὸ ἐπίπεδον τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ (σχ. 580), εἰς τὸ ὁποῖον περιγράφομεν τὸν κύκλον $(K', K'A')$. Εἶναι προφανές ὅτι εἶναι ἐκ κατασκευῆς $A'B'\Gamma' = AB\Gamma$ καὶ ἄρα $K'A' = KA$.

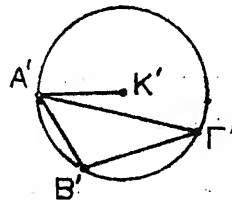
Κατόπιν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας $X\Psi$ λαμβάνομεν σημεῖον Δ (σχ. 581) καὶ φέρομεν τὴν ΔE κάθετον ἐπὶ τὴν $X\Psi$ καὶ ἴσην μετὰ τὴν $K'A'$. Μετὰ κέντρον τὸ E καὶ ἀκτῖνα τὴν πολικὴν ἀπόστασιν $A\Pi$ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν $X\Psi$ εἰς τὸ σημεῖον Z . Φέρομεν τὴν $EZ' \perp EZ$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν $X\Psi$ εἰς τὸ



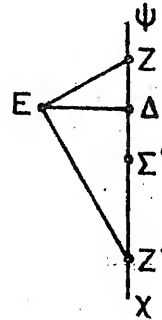
Σχ. 578



Σχ. 579

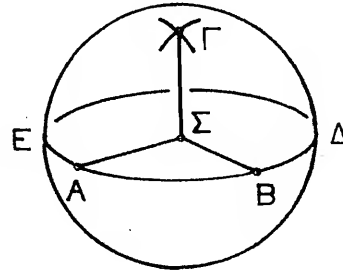


Σχ. 580



Σχ. 581

Z' . Είναι προφανές ότι είναι τρίγ. $\Delta EZ = \text{ΚΑΠ}$ ως ὀρθογώνια, έχοντα $\Delta E = \text{ΚΑ}$ καὶ $EZ = \text{ΑΠ}$. Ἐπίσης εἶναι τρίγωνα $EZZ' = \text{ΑΠΠ}'$, διότι ἔχουν $\widehat{E} = \widehat{A} = 90^\circ$, $EZ = \text{ΑΠ}$ καὶ $\widehat{EZZ'} = \widehat{ΑΠΠ}'$. Ἀρα $\text{ΠΠ}' = ZZ'$, ἤτοι ἡ ZZ' εἶναι ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας Σ καὶ ἄρα ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας Σ εἶναι ἡ $\frac{ZZ'}{2}$.



Σχ. 582

569. Πρόβλημα. Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ μέγιστος κύκλος διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων αὐτῆς.

Λύσις. Μὲ κέντρα τὰ δοθέντα σημεία A καὶ B (σχ. 582) καὶ ἄνοιγμα τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου ἴσον πρὸς τεταρτημόριον, δηλαδή πρὸς τὴν ὑποτείνουσιν ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἔχοντος καθετοὺς πλευρὰς ἴσας πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, τὴν ὁποῖαν ἀκτῖνα εὐρίσκομεν ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, γράφομεν δύο τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ . Κατόπιν μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν κύκλον, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ ζητούμενος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

1041. Δίδονται δύο σταθερὰ σημεία O καὶ A . Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος: i) τῶν προβολῶν τοῦ A ἐπὶ τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ O καὶ ii) τῶν συμμετρικῶν τοῦ A ὡς πρὸς τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ O .

1042. Δίδεται σφαῖρα (O, R) καὶ σημεῖον A . Ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, φέρομεν τὴν AM καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν $MK = MA$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου K .

1043. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων M τοῦ χώρου, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι: $MA^2 + MB^2 = k^2$, ἔνθα A καὶ B σταθερὰ σημεία καὶ k δεδομένον τμήμα.

1044. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων M τοῦ χώρου, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι: $MA^2 - MB^2 = k^2$, ἔνθα A καὶ B σταθερὰ σημεία καὶ k δεδομένον τμήμα.

Β'.

1045. Δίδεται σφαῖρα (K, R) . Μεταβλητὴ εὐθεῖα (ϵ) εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (δ) καὶ ἐφάπτεται τῆς σφαίρας εἰς σημεῖον M . Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ M .

1046. Δίδεται σφαῖρα (K, R) καὶ εὐθεῖα (ϵ) . Μεταβλητὸν ἐπίπεδον (Π) διέρχεται διὰ τῆς εὐθείας (ϵ) καὶ τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ κύκλον (O, ρ) . Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου O .

1047. Μεταβλητὸν τρίγωνον $AB\Gamma$ διατηρεῖ σταθερὰν κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος τὴν βάσιν $B\Gamma = \alpha$ καὶ σταθερὰν κατὰ μέγεθος τὴν διάμεσον $AM = \mu_\alpha$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς κορυφῆς A , ἔαν $AB = 2A\Gamma$.

1048. Δίδεται σφαῖρα (K, R) καὶ σταθερὰ διάμετρος AKB αὐτῆς. Ἐὰν M εἶναι

τυχόν σημείον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, φέρομεν τὴν AM καὶ ἐκ τοῦ K παράλληλον τῆς AM , ἡ ὁποία τέμνει τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς σφαίρας ἐκ τοῦ M εἰς τὸ I . Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου I .

1049. Δίδεται σφαῖρα (K, R) καὶ σταθερὰ διάμετρος AKB αὐτῆς. Ἐάν M εἴναι τυχόν σημείον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, φέρομεν τὴν BM καὶ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $MP = MB$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος i) τοῦ σημείου Γ , ii) τοῦ σημείου I τῆς τομῆς AM καὶ KI .

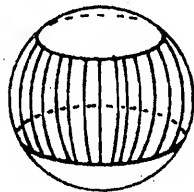
1050. Δίδεται σφαῖρα (K, R) καὶ σταθερὸν ἐπίπεδον (Π) διερχόμενον ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς K . Ἐάν M εἴναι τυχόν σημείον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, φέρομεν $MA \perp (\Pi)$ καὶ ἐπὶ τῆς KM λαμβάνομεν $KI = MA$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου I .

1051. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο σταθερὰ σημεῖα A καὶ B αὐτοῦ. Δύο μεταβληταὶ σφαῖραι κέντρων K καὶ Λ ἐφάπτονται τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τὰ A καὶ B καὶ μεταξύ των εἰς τὸ M . Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου M .

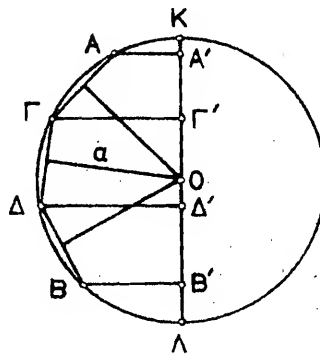
ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

570. Σφαιρικὴ ζώνη καλεῖται τὸ τμήμα τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα τέμνουσιν τὴν σφαῖραν (σχ. 583).

Αἱ τομαὶ εἶναι κύκλοι καὶ καλοῦνται βάσεις τῆς σφαιρικῆς ζώνης καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων καλεῖται ὕψος αὐτῆς.



Σχ. 583



Σχ. 584

Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαιρικῆς ζώνης, θεωροῦμεν ἡμικύκλιον διαμέτρου $KO\Lambda$ (σχ. 584) καὶ ἐν τόξον \widehat{AB} αὐτοῦ, εἰς τὸ ὁποῖον ἐγγράφομεν κανονικὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν $A\Gamma\Delta B$. Ἐάν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον $K\Lambda$, τὸ ἡμικύκλιον θὰ διαγράψῃ σφαῖραν, ἐνῶ τὸ τόξον \widehat{AB} θὰ διαγράψῃ σφαιρικὴν ζώνην ὕψους $A'B'$, ὅπου $AA' \perp K\Lambda$ καὶ $BB' \perp K\Lambda$. Ἡ ἐγγεγραμμένη πολυγωνικὴ γραμμὴ $A\Gamma\Delta B$ θὰ διαγράψῃ ἐπιφάνειαν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμά τῶν ἐπιφανειῶν, ποὺ διαγράφουν αἱ πλευραὶ τῆς. Φέρο-

μεν $\Gamma\Gamma' \perp \text{ΚΛ}$, $\Delta\Delta' \perp \text{ΚΛ}$ και τὰ ἀποστήματα α ἐκ τοῦ κέντρου Ο τοῦ ἡμικυκλίου. Αἱ ἐπιφάνειαι, πού διαγράφουν αἱ πλευραὶ τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς, εἶναι κυρταὶ ἐπιφάνειαι κολούρων κώνων καὶ ἐπομένως ἔχομεν (§ 552 πόρ. II) : $E_{\text{ΑΓ}} = 2\pi\alpha\text{Α}'\Gamma'$, $E_{\text{ΓΔ}} = 2\pi\alpha\text{Γ}'\Delta'$, $E_{\text{ΔΒ}} = 2\pi\alpha\text{Δ}'\text{Β}'$. Διὰ προσθέσεως αὐτῶν λαμβάνομεν : $E_{\text{ΑΓΔΒ}} = 2\pi\alpha (\text{Α}'\Gamma' + \Gamma'\Delta' + \Delta'\text{Β}') = 2\pi\alpha\text{Α}'\text{Β}'$ (1). Ἐὰν φαντασθῶμεν ὅτι αἱ πλευραὶ τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς αὐξανόμεναι τείνουν εἰς τὸ ἄπειρον, τότε ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ τείνει νὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ τόξου $\widehat{\text{ΑΒ}}$ καὶ ἐπομένως ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ὑπ' αὐτῆς τείνει εἰς τὴν ζητούμενην ἐπιφάνειαν τῆς σφαιρικῆς ζώνης με ὕψος $\text{Α}'\text{Β}' = h$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν, τὸ μόνον, πού θὰ μεταβληθῇ εἰς τὴν ἔκφρασιν (1) τῆς γραφομένης ἐπιφανείας, εἶναι τὸ ἀπόστημα α , τὸ ὅποιον θὰ ταυτισθῇ με τὴν ἀκτῖνα R καὶ ἐπομένως ἔχομεν διὰ τὴν ἐπιφάνειαν σφαιρικῆς ζώνης ὕψους h τὸν τύπον :

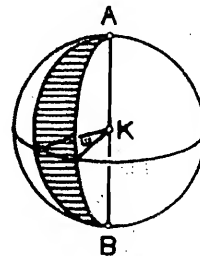
$$E = 2\pi R h.$$

571. Μονοβασική σφαιρική ζώνη. Ἐὰν ἐν ἐκ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας, ἡ ὑπ' αὐτῶν καθοριζομένη σφαιρική ζώνη ἔχει μίαν βάσιν καὶ καλεῖται **μονοβασική**. Ἡ ἐπιφάνειά της δίδεται ἀπὸ τὸν ἴδιον τύπον τῆς προηγουμένης παραγράφου.

572. Σφαιρική ἐπιφάνεια. Ἡ σφαιρική ἐπιφάνεια δύναται νὰ θεωρηθῇ ἐπιφάνεια σφαιρικῆς ζώνης με ὕψος $h = 2R$. Τότε ὁ προηγούμενος τύπος δίδει

$$E_{\text{σφ}} = 4\pi R^2.$$

Πόρισμα. Ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο σφαιρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῶν ἀκτίνων τῶν.



Σχ. 585

★ **573. Σφαιρική ἄρκτος** καλεῖται τὸ τμήμα τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν ἐδρῶν διέδρου γωνίας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ ΑΒ εἶναι διάμετρος τῆς σφαίρας (σχ. 585).

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι δύο σφαιρικαὶ ἄτρακτοι τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἴσων σφαιρῶν αἱ ὁποῖαι ὀρίζονται ἀπὸ ἴσας διέδρους γωνίας εἶναι ἴσαι.

Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαιρικῆς ἀτράκτου εἶναι ἀνάλογος τοῦ μέτρου ω τῆς διέδρου γωνίας, ἀπὸ τὴν ὁποίαν καθορίζεται καὶ θὰ καλεῖται **σφαιρική ἀτράκτος γωνίας** ω .

Ἐπειδὴ ἡ σφαιρική ἐπιφάνεια δύναται νὰ θεωρηθῇ σφαιρική ἀτράκτος πλήρους γωνίας (360°), ἡ ἐπιφάνεια E μιᾶς σφαιρικῆς ἀτράκτου γωνίας ω θὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε :

$$\frac{E}{\omega} = \frac{4\pi R^2}{360^\circ} \Rightarrow E = \frac{4\pi R^2 \omega^\circ}{360^\circ}.$$

Σημειώσεις. Ἐὰν ἡ γωνία ω° , μετρούμενη εἰς ἀκτίνια, εἶναι α , ὁ ἀνωτέρω τύπος τῆς ἐπιφανείας σφαιρικῆς ἀτράκτου μετασχηματίζεται, ὡς ἑξῆς : $E = \frac{4\pi R^2 \alpha}{2\pi} = 2R^2 \alpha$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

1052. Σφαῖρα ἀκτίνος 5 cm τέμνεται ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας 3 cm καὶ 4 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης τῆς περιλαμβανομένης μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων (δύο περιπτώσεις).

1053. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος σφαιρικῆς ζώνης ἰσοδυνάμου πρὸς μέγιστον κύκλον σφαίρας ἀκτίνος R.

1054. Τὸ ἐπίπεδον μικροῦ κύκλου σφαίρας ἀκτίνος 4 cm ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας 1 cm. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο μονοβασικῶν ζωνῶν, εἰς τὰς ὁποίας διαιρεῖται ἡ σφαῖρα.

1055. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τῆς περιγεγραμμένης περὶ κανονικὸν τετράεδρον ἀκμῆς α. Ὁμοίως τῆς ἐγγεγραμμένης.

Β'.

1056. Σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ἀκτίνος R νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' ἐπιπέδων παραλλήλων.

1057. Τέμνομεν σφαῖραν (O,R) δι' ἐπίπεδον διερχομένου διὰ μιᾶς ἔδρας τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κύβου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια ἐκάστης τῶν δύο μονοβασικῶν σφαιρικῶν ζωνῶν, εἰς τὰς ὁποίας διαιρεῖται ἡ σφαῖρα.

1058. Σφαῖρα ἀκτίνος α φωτίζεται ἀπὸ σημειακὴν φωτεινὴν πηγὴν Φ, εὑρισκόμενην εἰς ἀπόστασιν 2α ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ φωτιζομένη ἐπιφάνεια.

1059. Σφαῖρα (O,R) νὰ τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδων ἰσαπεχόντων ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης, τὴν ὁποίαν περικλείουν.

1060. Δείξατε ὅτι ἡ σφαιρικὴ ζώνη, ποὺ καθορίζεται ἀπὸ δύο ὁμοκέντρους σφαίρας ἐπὶ τρίτης μεταβλητῆς σφαίρας διερχομένης ἀπὸ τὸ κέντρον των, ἔχει σταθερὰν ἐπιφάνειαν.

574. Σφαιρικός τομέυς καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ἀπὸ κυκλικὸν τομέα AOB, στρεφόμενον περὶ διάμετρον τοῦ ἐπιπέδου του μὴ τέμνουσαν αὐτόν (σχ. 586).

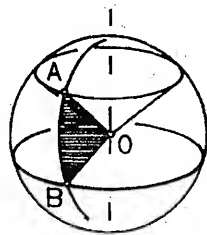
Τὸ τόξον \widehat{AB} διαγράφει σφαιρικὴν ζώνην, ἡ ὁποία καλεῖται **βάσις** τοῦ σφαιρικοῦ τομέως καὶ ὕψος αὐτοῦ καλεῖται τὸ ὕψος τῆς βάσεώς του, ἥτοι τῆς σφαιρικῆς ζώνης, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτόν.

Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ ὅγκου σφαιρικοῦ τομέως, θεωροῦμεν εἰς τὸ τόξον \widehat{AB} (σχ. 587) τοῦ κυκλικοῦ τομέως, ἀπὸ τὸν ὁποῖον παράγεται, ἐγγεγραμμένην κανονικὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν. Ὁ ὅγκος, ποὺ παράγεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἐπιπέδου σχήματος OAGΔBO περὶ τὴν ΚΑ, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὀγκων, ποὺ παράγουν τὰ τρίγωνα OAG, OΓΔ, OΔB κατὰ τὴν περιστροφὴν. Φέρομεν ἐκ τοῦ κέντρου O τὰ ἀποστήματα α καὶ ἔχομεν (§ 554) :

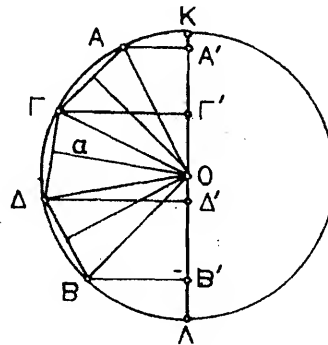
$$V_{(OAG)} = \frac{1}{3} E_{AG} \cdot \alpha, \quad V_{(OΓΔ)} = \frac{1}{3} E_{ΓΔ} \cdot \alpha, \quad V_{(OΔB)} = \frac{1}{3} E_{ΔB} \cdot \alpha \Rightarrow$$

$$(1) \quad V_{(OAGΔBO)} = \frac{1}{3} [E_{AG} + E_{ΓΔ} + E_{ΔB}] \cdot \alpha = \frac{1}{3} E_{AGΔB} \cdot \alpha.$$

Ἐάν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τόξον \widehat{AB} πολυγωνικῆς γραμμῆς αὐξανόμενον τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, τὸ ἀπόστημα α τείνει εἰς



Σχ. 586



Σχ. 587

τὴν ἀκτῖνα R καὶ ὁ παραγόμενος ὄγκος ἰσοῦται πρὸς τὸν ὄγκον V τοῦ σφαιρικοῦ τομέως. Τότε ἀπὸ τὴν προηγουμένην σχέσιν (1) ἔχομεν: $V = \frac{1}{3} E_{\widehat{AB}} R$ καί, ἐπειδὴ $E_{\widehat{AB}} = 2\pi R h$ (§ 570), ἔπεται ὅτι ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τομέως ἰσοῦται πρὸς :

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

575. Όγκος σφαίρας. Ἡ σφαῖρα δύναται νὰ θεωρηθῇ σφαιρικός τομεύς με ὕψος $h = 2R$ καὶ ἐπομένως ἀπὸ τὸν προηγουμένον τύπον λαμβάνομεν :

$$V_{\sigma\phi} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Πόρισμα. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο σφαιρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν κύβον τοῦ λόγου τῶν ἀκτίνων τῶν.

★ **576. Σφαιρικός δνυχ** καλεῖται τὸ μῆμα τῆς σφαίρας τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν ἐδρῶν διέδρου γωνίας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ AB εἶναι διάμετρος τῆς σφαίρας (σχ. 588).

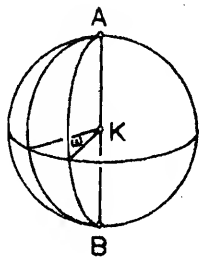
Ὁ ὄγκος V τοῦ σφαιρικοῦ δνυχος εἶναι ἀνάλογος τῆς διέδρου γωνίας αὐτοῦ, ἥτοι εἶναι: $\frac{V}{\omega} = \frac{V_{\sigma\phi}}{360^\circ}$ καὶ ἐπομένως δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\omega^\circ}{360^\circ}.$$

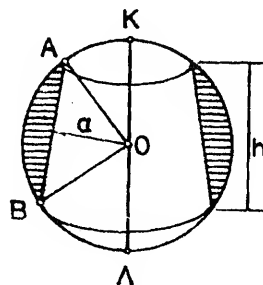
577. Σφαιρικός δακτύλιος καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ἀπὸ κυκλικὸν τμήμα AB στρεφόμενον περὶ διάμετρον KA τοῦ ἐπιπέδου του, μὴ τέμνουσαν αὐτὸ (σχ. 589).

Ἡ ἀπόστασις h τῶν δύο παραλλήλων κύκλων, ποὺ διαγράφουν τὰ σημεῖα A καὶ B , καλεῖται ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου.

Ὁ ὄγκος V τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου ὑπολογίζεται ὡς ἡ διαφορὰ τῶν



Σχ. 588



Σχ. 589

ὄγκων τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, ποὺ παράγεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ κυκλικοῦ τομέως AOB καὶ τοῦ ὄγκου, ποὺ παράγεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ τριγώνου AOB . Φέρομεν τὸ ἀπόστημα α καὶ ἔχομεν: $V = \frac{2}{3} \pi R^2 h -$

$$\frac{1}{3} E_{AB} \cdot \alpha = \frac{2}{3} \pi R^2 h - \frac{1}{3} (2\pi \alpha h) \alpha = \frac{2}{3} \pi R^2 h - \frac{2}{3} \pi \alpha^2 h =$$

$$\frac{2}{3} \pi (R^2 - \alpha^2) h = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{AB}{2} \right)^2 h = \frac{1}{6} \pi AB^2 h. \text{ Ἄρα ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ δακτυλίου δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:}$$

$$V = \frac{1}{6} \pi AB^2 h.$$

578. Σφαιρικὸν τμήμα. Ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνουν σφαῖραν, τὸ τμήμα αὐτῆς, τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων, καλεῖται σφαιρικὸν τμήμα (σχ. 590).

Ἡ ἀπόστασις h τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων καλεῖται ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος καὶ οἱ κύκλοι κατὰ τοὺς ὁποίους τὰ ἐπίπεδα τέμνουν τὴν σφαῖραν, καλοῦνται βάσεις αὐτοῦ.

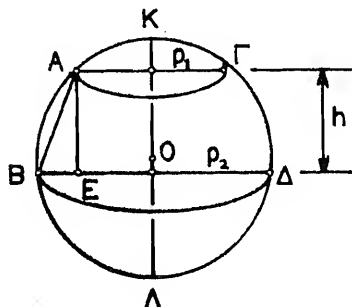
Ἄς θεωρήσωμεν διάμετρον KOA τῆς σφαίρας κάθετον ἐπὶ τὰς βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος καὶ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς KL τέμνον τοὺς κύκλους - βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος εἰς τὰ A, Γ καὶ B, Δ ἀντιστοίχως. Ὁ ὄγκος V τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου AB ἀφ' ἑνὸς καὶ τοῦ κολούρου χώνου $AB\Delta\Gamma$ ἀφ' ἑτέρου. Ἐὰν ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος,

$$\text{ἔχομεν: } V = \frac{1}{6} \pi AB^2 h + \frac{1}{3} \pi (\rho_1^2 + \rho_1 \rho_2 + \rho_2^2) h = \frac{1}{6} \pi [AB^2 + 2\rho_1^2 +$$

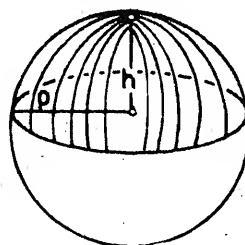
$+ 2\rho_1\rho_2 + 2\rho_2^2] h$. Φέρομεν $AE \perp BD \Rightarrow AE=h \Rightarrow AB^2 = h^2 + (\rho_2 - \rho_1)^2 =$
 $= h^2 + \rho^2 - 2\rho_1\rho_2 + \rho_2^2$ καὶ ὁ ὄγκος μετασχηματίζεται, ὡς ἀκολού-
 θως: $V = \frac{1}{6} \pi [(h^2 + \rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2 + \rho_2^2) + 2\rho_1^2 + 2\rho_1\rho_2 + 2\rho_2^2] h =$
 $\frac{1}{6} \pi [h^2 + 3\rho_1^2 + 3\rho_2^2] h = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi (\rho_1^2 + \rho_2^2) h$. Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ
 σφαιρικοῦ τμήματος δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον :

$$V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi (\rho_1^2 + \rho_2^2) h.$$

579. Μονοβασικόν σφαιρικόν τμήμα. Σφαῖρα τεμνομένη ὑπὸ ἐπι-
 πέδου διαιρεῖται εἰς δύο τμήματα δυνάμενα νὰ θεωρηθοῦν σφαιρικά τμήματα



Σχ. 590



Σχ. 591

μὲ μίαν βάσιν τὴν τομὴν ἀκτίνος ρ (σχ. 591) καὶ τὴν ἄλλην μηδενικὴν, ἐξ οὗ
 καὶ καλοῦνται μονοβασικά σφαιρικά τμήματα. Ἐὰν h εἴναι τὸ ὕψος ἑνὸς ἐξ
 αὐτῶν, ὁ ὄγκος του δίδεται ἐκ τοῦ τύπου τῆς προηγουμένης παραγράφου, ὁ
 ὅποιος μετασχηματίζεται, ὡς ἐξῆς :

$$V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi \rho^2 h$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

1061. Δίδεται σφαῖρα ἀκτίνος 8 cm. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως τοῦ
 ὁποίου ἡ βάσις εἶναι τόξον 60° , ὁ δὲ ἄξων αὐτοῦ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν τοῦ
 τόξου τούτου.

1062. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς κύβον ἀκμῆς α .

1063. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας τῆς περιγεγραμμένης περὶ κύβον ἀκμῆς α .

1064. Ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας ἰσοῦται ἀριθμητικῶς πρὸς τὸ ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου
 αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτίς καὶ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ταύτης.

1065. Ποία εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας, τῆς ὁποίας ὁ ὄγκος ἰσοῦται ἀριθμητικῶς πρὸς
 τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της :

1066. Να εύρεθῇ ὁ ὄγκος σφαίρας, ἐγγεγραμμένης εἰς κύλινδρον ἀκτίνος βάσεως R .

1067. Να εύρεθῇ ὁ ὄγκος σφαίρας, ἐγγεγραμμένης εἰς κώνον ἀκτίνος βάσεως α καὶ ὕψους 3α .

1068. Να εύρεθῇ ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ δακτυλίου, ἂν ἡ χορδὴ τοῦ τόξου τοῦ παράγοντος αὐτὸν ἰσοῦται μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας ἀκτίνος R ἐγγεγραμμένου τετραγώνου, ὃ δὲ ἄξων περιστροφῆς διέρχεται διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου τῆς χορδῆς ταύτης.

1069. Εἰς σφαῖραν ἀκτίνος R φέρομεν χορδὴν AB κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ἀκτίνος OT . Να εύρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ δακτυλίου τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος τοῦ ἔχοντος χορδὴν τὴν AB καὶ στρεφομένου περὶ τὸν ἄξωνα OP παράλληλον πρὸς τὴν AB .

1070. Να ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τμήματος μὲ μίαν βάσιν ἰσοῦται μὲ $\pi h^2 R - \frac{1}{3} \pi h^3$, ἐνθα R εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας καὶ h τὸ ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

1071. Εἰς σφαῖραν ἀκτίνος 4 cm φέρομεν δύο παραλλήλους κύκλους πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου καὶ μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κινονικοῦ ἑξαγώνου εἰς μέγιστον κύκλον αὐτῆς. Να εύρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σχηματιζομένου σφαιρικοῦ τμήματος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης αὐτοῦ.

1072. Να ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῶν δύο σφαιρικῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται σφαῖρα ὑπὸ ἐπιπέδου ἀπέχοντος ἀπὸ τὸ κέντρον ἀπόστασιν ἴσην μὲ $\frac{3R}{5}$.

1073. Ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τμήματος ἰσοῦται πρὸς τὸν ὄγκον κυλίνδρου, ἔχοντος ὕψος τὸ αὐτὸ καὶ βάσιν τὴν τομὴν τῆς σφαίρας ἡ ὁποία ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, ἡλαττωμένον κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου σφαίρας ἐχούσης διάμετρον τὸ ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

1074. Ἐὰν V_1 εἶναι ὁ ὄγκος σφαίρας, V_2 ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου, V_3 ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου κώνου, δείξατε ὅτι: $\frac{V_1}{4} = \frac{V_2}{6} = \frac{V_3}{9}$. Ἐπίσης νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ τῆς αὐτῆς σχέσεως συνδέονται καὶ αἱ ἐπιφάνειαι E_1, E_2, E_3 τῶν αὐτῶν στερεῶν.

1075. Κυκλικὸς τομεὺς γωνίας 60° καὶ ἀκτίνος ρ στρέφεται περὶ μίαν τῶν ἀκραίων ἀκτίνων του. Να ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

Β.

1076. Κύβος ἀκμῆς α πληροῦται ὑπὸ ἰσῶν σφαιρῶν διαμέτρου α/ν , $\nu = 1, 2, 3 \dots$. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν σφαιρῶν εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ πλήθους των.

1077. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι καὶ δύο ἴσαι καὶ παράλληλοι χορδαὶ αὐτῶν. Δείξατε ὅτι οἱ σφαιρικοὶ δακτύλιοι, ποὺ παράγονται ἀπὸ τὰ δύο κυκλικά τμήματα, ὅταν ταῦτα στράφωυν περὶ μίαν διάμετρον, εἶναι ἰσοδύναμοι.

1078. Κωνικὸν δοχεῖον ἰσοπλεύρου κώνου πληροῦται δι' ὕγρου μέχρις ὕψους 5 cm . Ἐντὸς αὐτοῦ βυθίζεται σφαῖρα ἀκτίνος 1 cm . Να ὑπολογισθῇ ἡ ἀνύψωσις τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὕγρου. Ἐπίσης νὰ ὑπολογισθῇ πόσος θὰ ἔπρεπε νὰ ᾔητο ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ δοχεῖον ὕγρου, ὥστε ἡ βυθιζομένη εἰς αὐτὸ σφαῖρα νὰ ἐφάπτεται τῆς ἐλευθέρως ἐπιφανείας τοῦ ὕγρου.

1079. Δύο σφαῖραι ($K, 3\alpha$) καὶ ($\Lambda, 4\alpha$) ἔχουν διάκεντρον $KA = 5\alpha$. Να ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους των.

1080. Δείξατε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας πρὸς τὴν ὀλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν ἰσοπλεύρου κώνου ἔχει λόγον $4/9$. Τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουν καὶ οἱ ὄγκοι τῶν δύο στερεῶν.

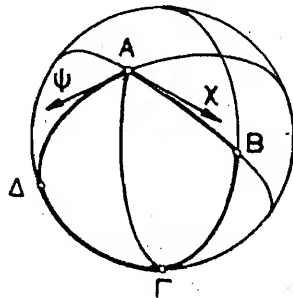
1081. Δείξατε ότι ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν κυλίνδρου ἔχουν λόγον $2/3$. Τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουν καὶ οἱ ὅγκοι τῶν δύο στερεῶν.

1082. Σφαῖρα (O, R) τέμνεται δι' ἐπιπέδου. Ἐάν τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο σχηματιζομένων μονοβασικῶν ζωνῶν, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ ἐπιπέδου τομῆς ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

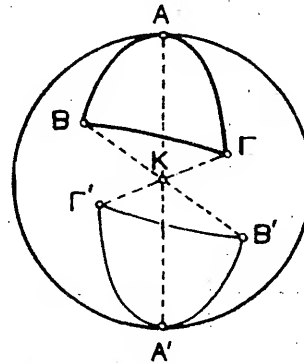
ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

580. Ὅρισμοί. Σφαιρικὸν πολύγωνον καλεῖται ἐν τμήμα σφαιρικῆς ἐπιφανείας, περατούμενον εἰς κυκλικὰ τόξα μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας, τὰ ὁποῖα νοοῦνται ὅχι μεγαλύτερα ἡμικυκλίου (σχ. 592).

Τὰ κυκλικὰ τόξα, εἰς τὰ ὁποῖα περατοῦται ἐν σφαιρικὸν πολύγωνον,



Σχ. 592



Σχ. 593

καλοῦνται **πλευραὶ** τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν πλευρῶν καλοῦνται **κορυφαὶ** αὐτοῦ.

Διαγώνιος σφαιρικοῦ πολυγώνου καλεῖται τὸ ἔλασσον κυκλικὸν τόξον μεγίστου κύκλου (π.χ. $\widehat{A\Gamma}$), τὸ ὁποῖον περατοῦται εἰς δύο κορυφὰς τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου, αἱ ὁποῖαι δὲν ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν πλευράν.

Γωνία δύο διαδοχικῶν πλευρῶν \widehat{AB} καὶ $\widehat{A\Delta}$ σφαιρικοῦ πολυγώνου καλεῖται ἡ γωνία $\widehat{x\hat{A}y}$ τῶν δύο ἐφαπτομένων ἡμιευθειῶν, τῶν ὁμορρόπων πρὸς τὰ τόξα \widehat{AB} καὶ $\widehat{A\Delta}$ (σχ. 592). Ἡ γωνία αὕτη, ἡ ὁποία συμβολίζεται καὶ ὡς γωνία \hat{A} τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου ἢ καὶ ὡς $\widehat{BA\Delta}$, ἰσοῦται πρὸς τὴν διεδρον γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζουν τὰ ἐπίπεδα τῶν μεγίστων κύκλων τῶν τόξων \widehat{AB} καὶ $\widehat{A\Delta}$.

Τὸ ἀπλούστερον τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων εἶναι τὸ **σφαιρικὸν δίγωνον**, τὸ ὁποῖον ταυτίζεται με σφαιρικὴν ἄτρακτον (§ 573).

581. Σφαιρικὸν τρίγωνον. Τὰ κύρια στοιχεῖα ἐνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ (σχ. 593) εἶναι αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ \widehat{AB} , $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A}$ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι

του $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$, αἱ ὁποῖαι, κατὰ μέτρον, εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς διέδρους $\widehat{KA}, \widehat{KB}, \widehat{K\Gamma}$, ὅπου K τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

Εἰς τὰ σφαιρικά τρίγωνα διακρίνομεν ὡς δευτερεύοντα στοιχεῖα ὕψη, διαμέσους, διχοτόμους, τὰ ὅποια εἶναι κυκλικά τόξα μεγίστων κύκλων, καθοριζόμενα ἀντιστοίχως, ὅπως καὶ εἰς τὰ ἐπίπεδα τρίγωνα. Ἐπίσης διακρίνομεν ἀκτῖνας τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Οἱ χαρακτηρισμοὶ **ἰσοσκελὲς καὶ ἰσόπλευρον** τριγώνων μεταφέρονται καὶ εἰς τὰ σφαιρικά τρίγωνα, με ἔννοιαν τὴν αὐτὴν τῶν ἐπιπέδων τριγώνων.

Συμμετρικὸν τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ καλεῖται τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ κέντρον K τῆς σφαίρας. Αὐτὸ εἶναι σφαιρικὸν τρίγωνον τῆς αὐτῆς σφαίρας.

Εἰς κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον $AB\Gamma$ ἀντιστοιχεῖ μία τριέδρος στερεὰ γωνία $K.AB\Gamma$, τῆς ὁποίας αἱ διέδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι κατὰ μέτρον με τὰς γωνίας τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου. Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι διὰ τὰς γωνίας $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ ἐνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ἰσχύουν αἱ γνωσταὶ σχέσεις τῶν διέδρων γωνιῶν μιᾶς τριέδρου στερεᾶς γωνίας, ἥτοι: $2^{\circ} < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} < 6^{\circ}$ καὶ $\widehat{A} + 2^{\circ} > \widehat{B} + \widehat{\Gamma}$, $\widehat{B} + 2^{\circ} > \widehat{A} + \widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Gamma} + 2^{\circ} > \widehat{A} + \widehat{B}$.

Τονίζομεν ἰδιαιτέρως ὅτι ὡς ἔπεται ἀπὸ τὴν πρώτην τῶν προηγουμένων σχέσεων, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ τριγώνου δὲν εἶναι σταθερὸν καὶ μάλιστα ὑπερβαίνει τὰς δύο ὀρθὰς κατὰ γωνίαν μικροτέραν τῶν 4° , ἡ ὁποία καλεῖται **σφαιρικὴ ὑπεροχή**.

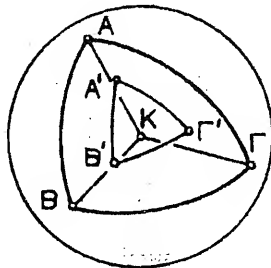
Ἐν σφαιρικὸν τρίγωνον καλεῖται **ὀρθογώνιον** ἢ **μονορθογώνιον**, **δισορθογώνιον**, **τρισορθογώνιον**, ἐὰν ἔχη ἀντιστοίχως μίαν ὀρθὴν γωνίαν, δύο ἢ τρεῖς.

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι, διὰ κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον, ἡ κάθε πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος καὶ μεγαλυτέρα τῆς ἀπολύτου διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἥτοι εἶναι $|\widehat{A\Gamma} - \widehat{B\Gamma}| < \widehat{AB} < \widehat{A\Gamma} + \widehat{B\Gamma}$, σχέσεις ἀντίστοιχοι πρὸς ἐκεῖνας, ποὺ ἰσχύουν διὰ τὰς ἑδρας (ἐπιπέδους γωνίας) τῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν.

Ἰσότης. Τὰ τέσσαρα θεωρήματα, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὴν ἰσότητα τῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν (§ 485 ἕως 488), μεταφέρονται καὶ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν σφαιρικῶν τριγώνων καὶ συνοφίζονται εἰς τὴν ἀκόλουθον πρότασιν:

Δύο σφαιρικά τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἀνήκουν εἰς ἴσας σφαίρας καὶ εἰς αὐτὰ ἀντιστοιχοῦν ἴσαι ἐπίκεντροι στερεαὶ γωνίαι.

582. Πολικὰ σφαιρικά τρίγωνα. Εἰς κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον καθορίζεται



Σχ. 594

διαδικῶς ἐν ἄλλο σφαιρικὸν τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ τῆς ἰδίας σφαίρας, καλούμενον πολικὸν τρίγωνον τοῦ $AB\Gamma$ τοιοῦτον ὥστε αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ δύο τρίγωνα τριέδροι γωνίαι $K.AB\Gamma$ καὶ $K.A'B'\Gamma'$ νὰ εἶναι παραπληρωματικαὶ (σχ. 594). Διὰ τὰ δύο τρίγωνα ἰσχύουν αἱ γνωσταὶ σχέσεις τῶν παραπληρωματικῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν, ἥτοι, ἐὰν $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}, \alpha, \beta, \gamma$ καὶ $\widehat{A'}, \widehat{B'}, \widehat{\Gamma'}, \alpha', \beta', \gamma'$ εἶναι τὰ ἐξ κύρια στοιχεῖα τῶν δύο τριγώνων ἀντιστοίχως, τότε :

$$\widehat{A} + \alpha' = \widehat{B} + \beta' = \widehat{\Gamma} + \gamma' = 2^{\circ} \text{ καὶ } \alpha + \widehat{A'} = \beta + \widehat{B'} = \gamma + \widehat{\Gamma'} = 2^{\circ}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1083. Ἐὰν ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἐνὸς μονορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ὀρθή, τότε τὸ σφαιρικὸν τοῦτο τρίγωνον εἶναι δισορθογώνιον.

1084. Ἐὰν αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ ἐνὸς μονορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ὀρθαί, τότε τὸ σφαιρικὸν τοῦτο τρίγωνον εἶναι τρισορθογώνιον.

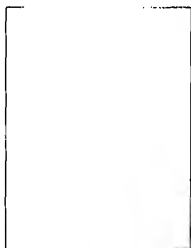
1085. Ἐὰν αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ ἐνὸς μονορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικρότεραι τῶν 90° , τότε καὶ ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ θὰ εἶναι μικρότερα τῶν 90° .

1086. Ἐὰν αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ ἐνὸς μονορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μεγαλύτεραι τῶν 90° , τότε ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ εἶναι μικρότερα τῶν 90° .

1087. Ἐὰν μία κάθετος πλευρὰ ἐνὸς μονορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικρότερα τῶν 90° καὶ ἡ ἄλλη μεγαλύτερα τῶν 90° , τότε ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ εἶναι μεγαλύτερα τῶν 90° .

Τὰ ἀντίτυπα τοῦ βιβλίου φέρουν τὸ κάτωθι βιβλιοσῆμον, εἰς ἀπόδειξιν τῆς γνησιότητος αὐτῶν.

Ἐντίτυπον στερούμενον τοῦ βιβλιοσήμου τούτου θεωρεῖται κλεψίτυπον. Ὁ διαθέτων, πωλὼν ἢ χρησιμοποιοῦν αὐτὸ διώκεται κατὰ τὰς διατάξεις τοῦ ἀρθροῦ 7 τοῦ Νόμου 1129 τῆς 15/21 Μαρτίου 1946 (Ἐφ. Κυβ. 1946, Α' 108).



ΕΚΔΟΣΙΣ Α', 1975 (ΙΧ) — ΑΝΤΙΤ. 353.000 — ΣΥΜΒΑΣΙΣ : 2616/7-6-75
ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΞΙΑ : Μ. ΠΕΧΛΙΩΤΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ - Α. Ε.